Un restaurateur propose 7 entrées dont 2 à 8 DH chacune, 4 à 10 DH chacune et une à 12 DH ; 3 plats du jour dont 2 à 20 DH chacun et un à 25 DH et 5 desserts dont 2 à 8 DH chacun et 3 à 6 DH chacun. Un client compose son menu (un menu est composé d'une entrée, d'un plat du jour et d'un dessert).

Soit X le prix du menu ainsi composé.

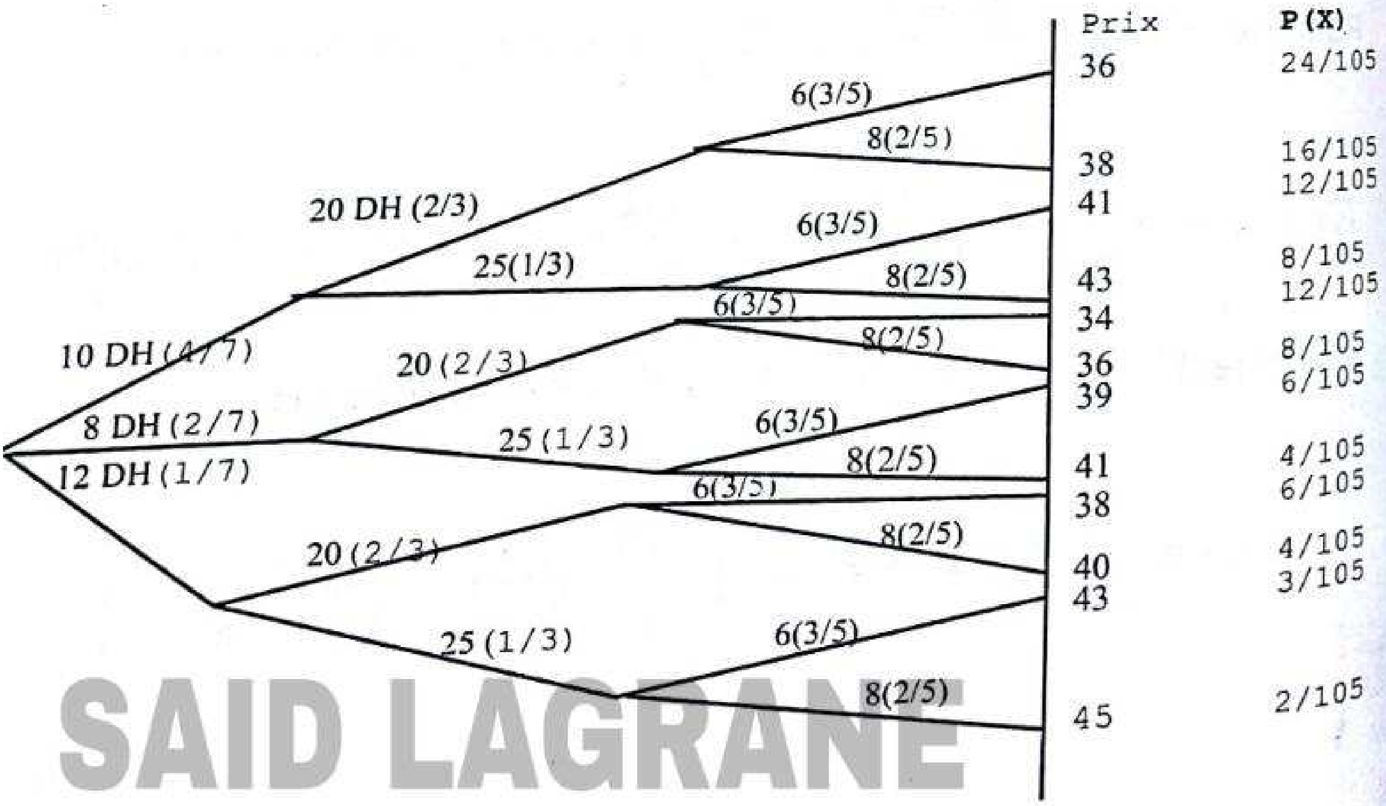
Exercice 1

1. Donner la loi de probabilité de X.

2. Calculer $E(X)$ et donner sa signification.

Solution :

1. Pour répondre à cette question, on va utiliser l'arbre des probabilités suivant :



A partir de cet arbre des probabilités, on construit la loi de probabilité de X comme suit :

$X = x_i$	34	36	38	39	40	41	43	45	Somme
$p(X = x_i)$	$\frac{12}{105}$	$\frac{32}{105}$	$\frac{22}{105}$	$\frac{6}{105}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{16}{105}$	$\frac{11}{105}$	$\frac{2}{105}$	1

2. Calcul et signification de $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{8}(X_i)(p_i) \\ &= \left(34\times\frac{12}{105}\right)+\left(36\times\frac{32}{105}\right)+\left(38\times\frac{22}{105}\right)+\left(39\times\frac{6}{105}\right) \\ &\quad+\left(40\times\frac{4}{105}\right)+\left(41\times\frac{16}{105}\right)+\left(43\times\frac{11}{105}\right)+\left(45\times\frac{2}{105}\right) \\ &= \frac{4009}{105} = 38{,}18. \end{aligned}$$

$E(X) = 38{,}18$ *signifie que le prix moyen pour un repas est égal à*

38,18 DH.

Le nombre X d'étudiants se rendant à la bibliothèque au cours d'une période de 5 mn est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée comme suit :

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$0,3$	$0,1$	$0,4$	$0,2$

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2

2. Soit Y une variable aléatoire représentant le nombre d'étudiants se rendant à la bibliothèque au cours d'une période d'une heure. En divisant l'heure en 12 intervalles et en posant $X_i =$ {nombre d'étudiants se rendant à la bibliothèque au cours du $i^{ème}$ intervalle} et en supposant que les X_i sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que X.

   Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Solution :

1. Calcul de $E(X)$ et $V(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=0}^{3}(X_i)(p_i)$$
$$=(0\times 0,3)+(1\times 0,1)+(2\times 0,4)+(3\times 0,2)=1,5.$$

$$E(X^2)=\sum_{i=0}^{3}(X_i^2)(p_i)$$
$$=(0^2\times 0,3)+(1^2\times 0,1)+(2^2\times 0,4)+(3^2\times 0,2)$$
$$=3,5.$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=3,5-(1,5)^2=1,25.$$

2. Calcul de $E(Y)$ et $V(Y)$:

Une heure se subdivise en 12 périodes de 5 minutes. Soit X_i le nombre d'étudiants au cours de la période i. On définit une nouvelle variable aléatoire Y comme suit : $Y=X_1+X_2+\ldots+X_{12}$ et puisque l'espérance mathématique est linéaire, $E(Y)$ et $V(Y)$ sont données comme suit :

- $E(Y)=E(X_1+X_2+\ldots+X_{12})$
  $=12\times E(X)=12\times 1,5=18$;

- $V(Y) = V(12 \times X) = (12^2) \times V(X)$
$= 12^2 \times 1,25 = 180.$

Exercice 3

Un jeu consiste à jeter un dé, on gagne 20 DH si le dé amène un 2 ; 40 DH si le dé amène un 4 ; on perd 30 DH si le dé amène un 5 et 15 DH si le dé amène un 6 et il n'y a ni perte ni gain pour les autres numéros. Calculer le gain espéré.

Solution :

Soit la variable aléatoire X qui désigne le gain algébrique, avec $X = \{-30 ; -15 ; 0 ; 20 ; 40\}$. Les valeurs négatives signifient des pertes.

La loi de probabilité de X est donnée comme suit :

$X = x_i$	-30	-15	0	20	40	Somme
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6} = 1$

Le gain espéré est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, avec :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} (X_i)(p_i)$$
$$= \left(-30 \times \frac{1}{6}\right) + \left(-15 \times \frac{1}{6}\right) + \left(0 \times \frac{2}{6}\right) + \left(20 \times \frac{1}{6}\right) + \left(40 \times \frac{1}{6}\right)$$
$$= 2,5.$$

Exercice 4

A la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun un billet dont 7 pour la destination de la gare B (prix du billet est de 50 DH), 5 pour la destination de la gare C (prix du billet est de 60 DH), 4 pour la destination de la gare D (prix du billet est de 75 DH).

1. On choisit au hasard un de ces voyageurs. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque voyageur le prix de son billet (en DH).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On choisit au hasard trois de ces voyageurs :

a. Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.

b. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.

c. *Quelle est la probabilité pour que cette destination soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination ?*

Solution :

1. X est la variable aléatoire représentant le prix du billet, avec :

$X = \{50 \ ; \ 60 \ ; \ 75\}$.

a. La loi de probabilité de X est donnée comme suit :

$X = x_i$	50	60	75	Somme
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{16}{16} = 1$

b. Calcul de $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} (X_i)(p_i)$$
$$= \left(50 \times \frac{7}{16}\right) + \left(60 \times \frac{5}{16}\right) + \left(75 \times \frac{4}{16}\right) = \frac{950}{16} = 59,375.$$

2. Si on choisit au hasard 3 de ces voyageurs :

a. La probabilité que les 3 voyageurs aient des destinations différentes est donnée comme suit :

$$\frac{C_7^1 C_5^1 C_4^1}{C_{16}^3} = \frac{7 \times 5 \times 4}{560} = \frac{14}{56} = \frac{7}{28}.$$

b. La probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait u billet pour la gare B est déterminée à partir de l probabilité de l'événement contraire défini comme étant *« aucun des 3 voyageurs ne choisit la destination B »*.

Pour cela, on choisit alors 3 voyageurs parmi les 9 qui n'ont pas la destination B. Cette probabilité est égale à :

$$\frac{C_9^3}{C_{16}^3} = \frac{84}{560} = \frac{21}{140}.$$

Donc la probabilité demandée est égale à :

$$1 - \frac{21}{140} = \frac{119}{140}.$$

c. La probabilité pour que cette destination soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination est déterminée par la définition des les évènements suivants :

M : les 3 voyageurs ont la même destination ;

B : les 3 voyageurs ont pris la destination B.

La probabilité recherchée est formulée par la probabilité conditionnelle suivante : $p\left(B/M\right) = \dfrac{p(B\cap M)}{p(M)}$.

Exercice 6

Soit X le nombre de clients qui se présente à la caisse d'un magasin au cours d'une période de 5 minutes. La loi de probabilité de X est donnée comme suit :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	0,368	0,367	0,184	0,061	0,015	0,003	0,0019	0,0001

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. Supposons qu'il y a une amende de 2 DH lorsque dans une période de 5 mn, un client se présente à la caisse alors que 3 clients s'y trouvent déjà. De même, il y a une prime de 3 DH lorsque le nombre de clients est inférieur à deux. Considérons le rapport (prime/amende) comme une variable aléatoire ; en donner sa loi de probabilité.

SAID LAGRANE

Solution :

1. Calcul de $E(X)$ et $V(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=0}^{7}(X_i)(p_i)$$
$$=(0\times 0,368)+(1\times 0,367)+(2\times 0,184)+(3\times 0,061)$$
$$+(4\times 0,015)+(5\times 0,003)+(6\times 0,0019)+(7\times 0,0001)$$
$$=1,0051.$$

$$E(X^2)=\sum_{i=0}^{7}(X_i^2)(p_i)$$
$$=(0^2\times 0,368)+(1^2\times 0,367)+(2^2\times 0,184)$$
$$+(3^2\times 0,061)+(4^2\times 0,015)+(5^2\times 0,003)$$
$$+(6^2\times 0,0019)+(7^2\times 0,0001)$$
$$=2,0403.$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=2,0403-(1,0051)^2=1,03007.$$

2. Soit la variable aléatoire Y qui désigne le rapport (prime/amende).

- S'il y a 7 clients devant la caisse, alors :

$$Y=(-2\times 4)=-8,\ \text{avec : } p(Y=-8)=0,0001\ ;$$

- S'il y a 6 clients devant la caisse alors :

$$Y=(-2\times 3)=-6,\ \text{avec : } p(Y=-6)=0,0019\ ;$$

- S'il y a 5 clients devant la caisse, alors :

$$Y=(-2\times 2)=-4,\ \text{avec : } p(Y=-4)=0,003\ ;$$

- S'il y a 4 clients devant la caisse, alors :

$$Y = (-2 \times 1) = -2, \text{ avec : } p(Y = -2) = 0{,}015 \ ;$$

- S'il y a 3 ou 2 clients devant la caisse, alors :

$$Y = 0, \text{ avec : } p(Y = 0) = 0{,}184 + 0{,}061 = 0{,}245 \ ;$$

- S'il y a 1 ou 0 client devant la caisse, alors :

$$Y = 3, \text{ avec : } p(Y = 3) = 0{,}367 + 0{,}368 = 0{,}735.$$

En effet, la loi de probabilité de Y est donnée de la façon suivante :

$Y = y_i$	-8	-6	-4	-2	0	3	Somme
$p(Y = y_i)$	0,0001	0,0019	0,003	0,015	0,245	0,735	1

Le tableau suivant donne la survie relative à un groupe de 1000 personnes nées la même année et qui survivent à partir de leur naissance (âge 0).

Age exprimé en année	Nombre de survivants à cet âge
0	1000
10	850
20	800
30	750
40	720
50	680
60	560
70	380
80	150
90	20
100	0

Exercice 7

Calculer à partir de ce tableau :

1. La probabilité pour qu'une personne A décède avant l'âge de 40 ans.
2. La probabilité pour qu'une personne A décède à l'âge de 70 ans.
3. La probabilité pour qu'une personne A décède à un âge entre 30 et 60 ans.
4. La probabilité pour deux personnes A et B d'atteindre toutes les deux l'âge de 70 ans.

5. La probabilité pour deux personnes A et B de décéder toutes les deux avant l'âge de 70 ans.

6. Calculer l'espérance de vie (durée moyenne de survie).

Solution :

Soit la variable aléatoire X qui désigne l'âge de décès.

1. La probabilité pour qu'une personne meurt avant l'âge de 40 ans est donnée comme suit :

$$p(X \prec 40) = 1 - p(X \succ 40) = 1 - 0,72 = 0,28.$$

2. La probabilité pour que la personne décède à l'âge de 70 ans est donnée par : $p(X \succ 70) = 0,38.$

3. La probabilité pour que la personne A décède à un âge entre 30 et 60 ans est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} p(30 \prec X \prec 60) &= p(X \succ 30) - p(X \succ 60) \\ &= 0,75 - 0,56 = 0,19. \end{aligned}$$

4. La probabilité pour que deux personnes A et B puissent atteindre toutes les deux l'âge de 70 ans est donnée comme suit :

Puisque X_A (l'âge de l'individu A) est indépendant de X_B (l'âge de l'individu B) :

$$p\left[\left(X_A \succ 70\right) \cap \left(X_B \succ 70\right)\right] = \left[p\left(X_A \succ 70\right)\right] \times \left[p\left(X_B \succ 70\right)\right]$$

$$= 0{,}38 \times 0{,}38 = 0{,}1444.$$

5. La probabilité pour que deux personnes A et B décèdent toutes les deux avant l'âge de 70 ans est donnée comme suit :

$$p\left[\left(X_A \prec 70\right) \cap \left(X_B \prec 70\right)\right] = \left(1 - 0{,}38\right)^2 = 0{,}3844.$$

6. Pour calculer l'espérance de vie (durée moyenne d'existence), il faut établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Il convient de remarquer qu'on est en présence d'une fonction inverse de répartition appelée couramment fonction de survie donnée comme suit :

X	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
p_i	0,15	0,05	0,05	0,03	0,04	0,12	0,18	0,23	0,13	0,02

Exercice 8

La durée de vie d'un tube électronique est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est donnée par la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{180}\right) e^{-\frac{x}{180}} & pour\ x \geq 0 \\ 0 & pour\ x \prec 0 \end{cases}$$

1. Donner la probabilité pour que le tube dure moins de 90 heures.

2. Donner la probabilité pour que le tube dure plus de 360 heures.

3. Calculer l'espérance de vie du tube.

Solution :

1. En vue de calculer la probabilité pour que le tube dure moins de 90 heures, il faut passer par la fonction de répartition $F(x)$[1]. Ce que nous cherchons en effet, c'est : $p(X \prec 90)$:

$$p(X \prec 90) = \int_0^{90} f(x)\,dx = \int_0^{90} \left(\frac{1}{180} \times e^{-\frac{x}{180}}\right) dx$$

$$= \left[-e^{-\frac{x}{180}}\right]_0^{90} = -\left(e^{-\frac{90}{180}} - e^{\frac{0}{180}}\right) = -\left(e^{-\frac{1}{2}} - 1\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

Donc $p(X \prec 90) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$.

---

[1] Rappel sur les fonctions primitives :

- Si $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, avec c comme constante.
- Si $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln|x| + c$
- Si $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \left(e^x\right) dx = e^x + c$

Intégration par partie :

$$U_{(x)} = f(x) \quad \Rightarrow \quad U'_{(x)} = f'(x)$$

$$V_{(x)} = g(x) \quad \Rightarrow \quad V'_{(x)} = g'(x)$$

Ce qui implique :

$$\int_{-\infty}^{x} \left[U(x) \times V'(x)\right] dx = \left[U_{(x)} \times V_{(x)}\right]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \left[U'(x) \times V(x)\right] dx$$

Deuxiè...

2. En vue de calculer la probabilité pour que le tube dure plus de 360 heures, il faut passer par la fonction de répartition $F(x)$.

Ce que nous cherchons en effet, c'est : $p(X \succ 360)$:

$$p(X \succ 360) = 1 - p(X \prec 360) = 1 - \int_0^{360} f(x)\,dx$$

$$= 1 - \int_0^{360} \left(\frac{1}{180} \times e^{-\frac{x}{180}}\right) dx = 1 - \left[-e^{-\frac{x}{180}}\right]_0^{360} = 1 + \left[e^{-\frac{x}{180}}\right]_0^{360}$$

$$= 1 + \left[\left(e^{-\frac{360}{180}} - e^{-\frac{0}{180}}\right)\right] = 1 + \left[e^{-2} - 1\right] = e^{-2}$$

Donc $p(X \succ 360) = e^{-2}$.

3. On sait que pour une variable aléatoire continue, l'espérance mathématique $E(X)$ est donnée comme suit :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(x) \times f(x)\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x) \left(\frac{1}{180} \times e^{-\frac{x}{180}}\right) dx.$$

Pour calculer cette intégrale, il faut passer par l'intégration par partie en empruntant la procédure suivante :

$$U_{(x)} = x \qquad \Rightarrow \qquad U'_{(x)} = 1$$

$$V_{(x)} = -e^{-\frac{x}{180}} \qquad \Rightarrow \qquad V'_{(x)} = \frac{1}{180} e^{-\frac{x}{180}}$$

Ce qui implique :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U_{(x)}\times V'_{(x)}\right]dx=\left[U_{(x)}\times V_{(x)}\right]-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U'_{(x)}\times V_{(x)}\right]dx$$

$$E(X)=-\left[x\times e^{-\frac{x}{180}}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{x}{180}}\right)dx$$

$$=-\left[x\times e^{-\frac{x}{180}}\right]_0^{+\infty}-180\left[e^{-\frac{x}{180}}\right]_0^{+\infty}$$

$$E(X)=\left[\left((+\infty)\times\left(e^{-\frac{\infty}{180}}\right)\right)-\left((0)\times\left(e^{-\frac{0}{180}}\right)\right)\right]-\left[180\times\left(\left(e^{-\frac{\infty}{180}}\right)-\left(e^{0}\right)\right)\right]$$

$$E(X)=\left[\left((+\infty)\times\left(e^{-\infty}\right)\right)-(0)\right]-\left[180\times\left((0)-(1)\right)\right]$$

$$E(X)=\left[(0)-(0)\right]-\left[180\times(-1)\right]=180.$$

<u>Interprétation :</u>

Ce résultat signifie que la durée de vie moyenne espérée de ce tube est de 180 heures.

SAID LAGRANE