Exercice 1

Un atelier comprend 15 ouvriers, 8 femmes et 7 hommes. On choisit dans cet atelier des groupes de 5 ouvriers.

1. On tire au sort les noms des équipiers ; soit X le nombre d'hommes que comporte une équipe. Calculer les probabilités des différentes valeurs possibles de X_i.

2. Calculer la probabilité pour que l'équipe ainsi constituée comporte au plus 3 hommes, puis la probabilité pour qu'elle comporte au plus 3 femmes.

Solution :

1.

- X : est une variable aléatoire qui désigne le nombre d'hommes que comporte une équipe qui peut prendre les valeurs suivantes : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

- Avant de calculer les probabilités des différentes valeurs de X il faut calculer le nombre de cas possibles comme suit :

Dans cet exercice on n'a ni ordre ni répétition. Donc, il s'agit d'une combinaison sans répétition de 5 ouvriers parmi 15 (8 femmes et 7 hommes). Donc le nombre de cas possible est donné comme suit :

$$\Omega = C_{15}^{5} = \frac{15!}{(15-5)!\times 5!} = \frac{15!}{10!\times 5!} = 3003.$$

Autrement dit, on peut constituer 3003 groupes de 5 ouvriers parmi 15.

- Détermination des différents cas favorables pour les différentes valeurs de X :

-Pour $X=0 \Rightarrow$ 0 Homme et 5 femmes $\Rightarrow C_7^0 \times C_8^5$;

-Pour $X=1 \Rightarrow$ 1 Homme et 4 femmes $\Rightarrow C_7^1 \times C_8^4$;

-Pour $X=2 \Rightarrow$ 2 Hommes et 3 femmes $\Rightarrow C_7^2 \times C_8^3$;

-Pour $X=3 \Rightarrow$ 3 Hommes et 2 femmes $\Rightarrow C_7^3 \times C_8^2$;

-Pour $X=4 \Rightarrow$ 4 Hommes et 1 femme $\Rightarrow C_7^4 \times C_8^1$;

-Pour $X=5 \Rightarrow$ 5 Hommes et 0 femme $\Rightarrow C_7^5 \times C_8^0$.

Après avoir dénombré les différents cas possibles et favorables, on peut passer au calcul des probabilités des différentes valeurs de X dans le tableau ci-après :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	Somme
$p(X = x_i)$	$\frac{C_8^5}{C_{15}^5} = 0,02$	$\frac{C_7^1 C_8^4}{C_{15}^5} = 0,16$	$\frac{C_7^2 C_8^3}{C_{15}^5} = 0,39$	$\frac{C_7^3 C_8^2}{C_{15}^5} = 0,33$	$\frac{C_7^4 C_8^1}{C_{15}^5} = 0,09$	$\frac{C_7^5 C_8^0}{C_{15}^5} = 0,01$	1

2.

- La probabilité pour que l'équipe ainsi constituée comporte au plus 3 hommes, c'est $p(X \leq 3)$, avec :

$$\begin{aligned} p(X \leq 3) &= 1 - p(X \succ 3) \\ &= 1 - \left[\left(p(X=4)\right) + \left(p(X=5)\right)\right] \\ &= 1 - \left[0,09 + 0,01\right] = 0,9. \end{aligned}$$

- La probabilité pour que l'équipe ainsi constituée comporte au plus 3 femmes est équivalente à la probabilité d'avoir au moins deux hommes, c'est $p(X \geq 2)$, avec :

$$\begin{aligned} p(X \geq 2) &= 1 - p(X \prec 2) \\ &= 1 - [p(X=0) + p(X=1)] \\ &= 1 - [0,02 + 0,16] = 0,82. \end{aligned}$$

Exercice 2

Le nombre de pannes journalières d'une machine est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6 et +
$p(X = x_i)$	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,05	0,05

1. Donner la fonction de répartition de X.

2. Quelle est la probabilité que la machine ait plus de 3 pannes ?

3. Calculer $E(X)$ en donnant à 6 $et+$ la valeur moyenne 7,5.

Solution :

1. On sait que la fonction de répartition est donnée par la formule suivante :

$$F(x) = p(X \prec x) \Rightarrow F(x_i) = p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_{i-1})$$

Partons de cette définition, la fonction de répartition est donnée dans le tableau suivant :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6 et +	$+\infty$
$p(X = x_i)$	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,05	0,05	
$F(x_i)$	--	0,3	0,5	0,65	0,8	0,9	0,95	1

Remarque : sur ce tableau on peut très bien lire que :

$$\begin{aligned} F(2) = p(X \prec 2) &= p[(X=0) \cup (X=1)] \\ &= p(X=0) + p(X=1) = 0,5. \end{aligned}$$

2. La probabilité que la machine ait plus de 3 pannes est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} p(X \succ 3) &= 1 - p(X \leq 3) \\ &= 1 - p(X \prec 4) \\ &= 1 - F(4) = 1 - 0,8 = 0,2. \end{aligned}$$

3. Le Calcul de $E(X)$ en donnant à 6 et + la valeur moyenne 7,5 se fait comme suit :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6 et +	Somme
$p(X = x_i)$	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,05	0,05	1
$x_i \times p(x_i)$	0	0,2	0,3	0,45	0,4	0,25	0,375	1,975

Donc : $E(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i)\times(p(x_i))=1{,}975\approx 2.$

Interprétation :

En moyenne, le nombre de pannes espéré de cette machine est approximativement 2 fois par jour.

Exercice 3

On jette deux dés ; soit X_1 le nombre amené par le 1er dé et X_2 le nombre amené par le second dé et soit $Y=X_2-X_1$.

1. Etablir la loi de probabilité de X_1, puis calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. En déduire $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
3. Donner la fonction de répartition de X_1 et tracer son graphe.
4. Donner la loi de probabilité de Y.
5. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ en utilisant la loi de probabilité de Y.
6. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ en utilisant les propriétés de l'espérance mathématique et de la variance.

Solution :

1. On sait que les valeurs possibles de X_1 sont : $1, 2, 3, 4, 5$ *et* 6 avec la probabilité uniforme $\frac{1}{6}$. D'où le tableau des probabilités suivant :

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6	Somme
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}=1$

$$E(X_1)=\sum_{i=1}^{6}(X_{1i})(p_i)$$
$$=\left(1\times\frac{1}{6}\right)+\left(2\times\frac{1}{6}\right)+\left(3\times\frac{1}{6}\right)+\left(4\times\frac{1}{6}\right)$$
$$+\left(5\times\frac{1}{6}\right)+\left(6\times\frac{1}{6}\right)=3,5.$$

$$E(X_1^2)=\sum_{i=1}^{6}(X_{1i}^2)(p_i)$$
$$=\left(1^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(2^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(3^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(4^2\times\frac{1}{6}\right)$$
$$+\left(5^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(6^2\times\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{91}{6}.$$

$$V\left(X_1\right)=E\left(X_1^2\right)-\left(E\left(X_1\right)\right)^2=\left(\frac{91}{6}\right)-\left(\frac{21}{6}\right)^2=\left(\frac{546-441}{36}\right)$$
$$=\frac{35}{12}.$$

2. X_2 a la même loi de probabilité que X_1, d'où $E\left(X_2\right)=3{,}5$ et

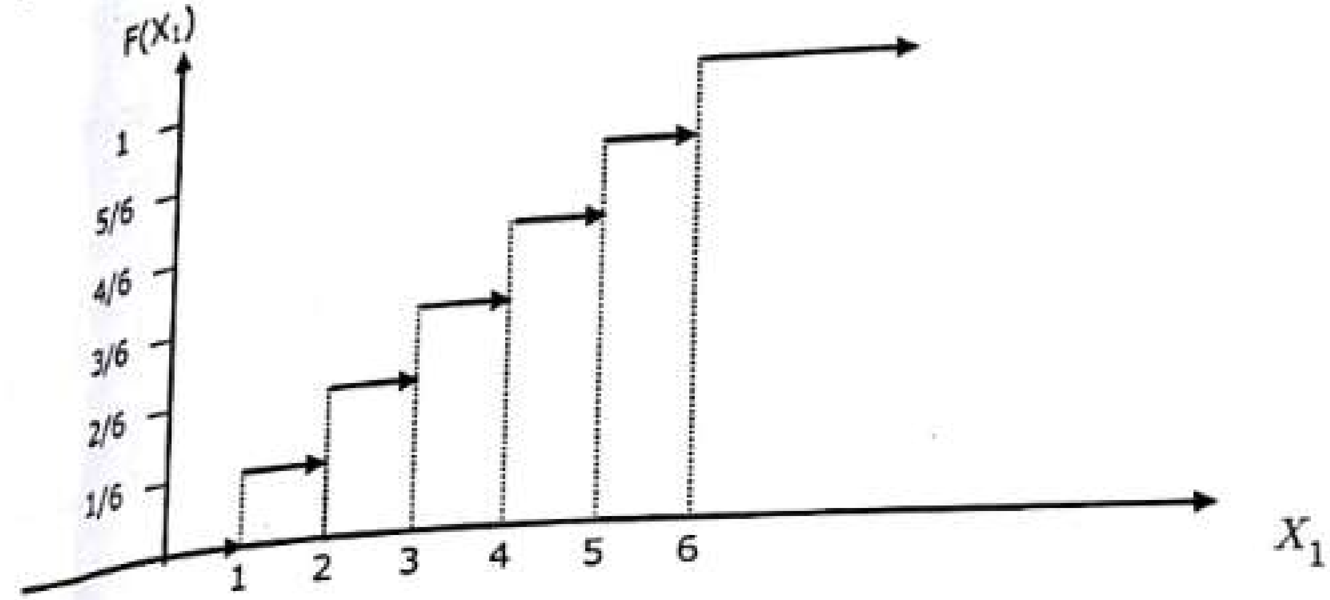
$$V\left(X_2\right)=\frac{35}{12}.$$

3. On sait que la fonction de répartition de X_1 est définie par :

$F\left(x_1\right)=p\left(X_1\prec x_1\right)$, avec :

$$F\left(x_1\right)=p\left(X_1\prec x_1\right)=\begin{cases} p\left(X_1\prec 1\right)=0 & pour\ x_1\leq 1\\ p\left(X_1\prec 2\right)=\frac{1}{6} & pour\ 1\prec x_1\leq 2\\ p\left(X_1\prec 3\right)=\frac{2}{6} & pour\ 2\prec x_1\leq 3\\ p\left(X_1\prec 4\right)=\frac{3}{6} & pour\ 3\prec x_1\leq 4\\ p\left(X_1\prec 5\right)=\frac{4}{6} & pour\ 4\prec x_1\leq 5\\ p\left(X_1\prec 6\right)=\frac{5}{6} & pour\ 5\prec x_1\leq 6\\ p\left(X_1\geq 6\right)=1 & pour\ x_1\succ 5 \end{cases}$$

Le graphe de la fonction de répartition $F(x)$ est donné comme suit :



4. La loi de probabilité de $Y=X_2-X_1$:

Les valeurs possibles sont données dans le tableau ci-dessous où la première ligne nous donne les valeurs possibles de X_1 et la première colonne nous donne les valeurs possibles de X_2.

X_1 / X_2	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

Il faut préciser par ailleurs que le tableau ci-avant nous donne les valeurs possibles de Y ; il y a au total 36 valeurs. Donc chaque possibilité a une probabilité égale à $\frac{1}{36}$.

Après avoir classé les valeurs de Y par ordre croissant, on donne la loi de probabilité de Y dans le tableau ci-après :

Y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p(Y=y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

5.

▪ *Calcul de* $E(Y)$:

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{11}(Y_i)(p_i)=\left(-5\times\frac{1}{36}\right)+\left(-4\times\frac{2}{36}\right)+\left(-3\times\frac{3}{36}\right)$$
$$+\left(-2\times\frac{4}{36}\right)+\left(-1\times\frac{5}{36}\right)+\left(0\times\frac{6}{36}\right)$$
$$+\left(1\times\frac{5}{36}\right)+\left(2\times\frac{4}{36}\right)+\left(3\times\frac{3}{36}\right)$$
$$+\left(4\times\frac{2}{36}\right)+\left(5\times\frac{1}{36}\right)=0$$

Donc $E(Y)=\sum_{i=1}^{11}(Y_i)(p_i)=0.$

▪ *Calcul de* $V(Y)$:

On sait que

$$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\sum_{i=1}^{11}(Y_i^2)(p_i)-(E(Y))^2$$

$$E(Y^2)=\sum_{i=1}^{11}(Y_i^2)(p_i)$$
$$=\left(-5^2\times\frac{1}{36}\right)+\left(-4^2\times\frac{2}{36}\right)+\left(-3^2\times\frac{3}{36}\right)+\left(-2^2\times\frac{4}{36}\right)$$
$$+\left(-1^2\frac{5}{36}\right)+\left(0^2\times\frac{6}{36}\right)+\left(1^2\times\frac{5}{36}\right)+\left(2^2\times\frac{4}{36}\right)+\left(3^2\times\frac{3}{36}\right)$$
$$+\left(4^2\times\frac{2}{36}\right)+\left(5^2\times\frac{1}{36}\right)$$
$$=\frac{35}{6}.$$

Donc $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{35}{6}-(0)^2=\frac{35}{6}.$

6. On sait que l'espérance mathématique E est un opérateur linéaire, d'où :

$$E(Y)=E(X_2-X_1)=E(X_2)-E(X_1)=0$$

Et la variance V est un opérateur quadratique, d'où :

$$V(Y)=V(X_2-X_1)=V(X_2)+V(X_1).$$

Et puisque X_2 est indépendant de X_1, on a donc :

$$V(Y)=V(X_2)+V(X_1)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{70}{12}=\frac{35}{6}.$$

Exercice 4

Dans un groupe, il y a 20 garçons et 10 filles ; on choisit au hasard dans ce groupe un comité de 4 membres et on désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre de filles dans le comité.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Donner la fonction de répartition de X et tracer son graphe.
4. Calculer la probabilité de choisir :
   - 2 filles.
   - Au moins 2 filles.
   - au plus 2 filles.

Solution :

1. La loi de probabilité de X :

Les valeurs possibles de X sont : $0, 1, 2, 3$ et 4. La probabilité associée à chaque valeur X est donnée comme suit :

$$p(X=0)=\frac{C_{10}^{0}C_{20}^{4}}{C_{30}^{4}}=\frac{4845}{27405}=\frac{323}{1827};$$

$$p(X=1)=\frac{C_{10}^{1}C_{20}^{3}}{C_{30}^{4}}=\frac{11400}{27405}=\frac{760}{1827};$$

$$p(X=2)=\frac{C_{10}^{2}C_{20}^{2}}{C_{30}^{4}}=\frac{8550}{27405}=\frac{570}{1827};$$

$$p(X=3)=\frac{C_{10}^{3}C_{20}^{1}}{C_{30}^{4}}=\frac{2400}{27405}=\frac{160}{1827};$$

$$p(X=4)=\frac{C_{10}^{4}C_{20}^{0}}{C_{30}^{4}}=\frac{210}{27405}=\frac{14}{1827}.$$

D'où le tableau des probabilités suivant :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	Somme
$p\left(X = x_i\right)$	$\frac{323}{1827}$	$\frac{760}{1827}$	$\frac{570}{1827}$	$\frac{160}{1827}$	$\frac{14}{1827}$	$\frac{1827}{1827} = 1$

2. Calcul de $E\left(X\right)$ et $V\left(X\right)$:

$$E\left(X\right) = \sum_{i=0}^{4}\left(X_i\right)\left(p_i\right)$$
$$= \left(0 \times \frac{323}{1827}\right) + \left(1 \times \frac{760}{1827}\right) + \left(2 \times \frac{570}{1827}\right)$$
$$+ \left(3 \times \frac{160}{1827}\right) + \left(4 \times \frac{14}{1827}\right) = \frac{2436}{1827} = 1,333.$$

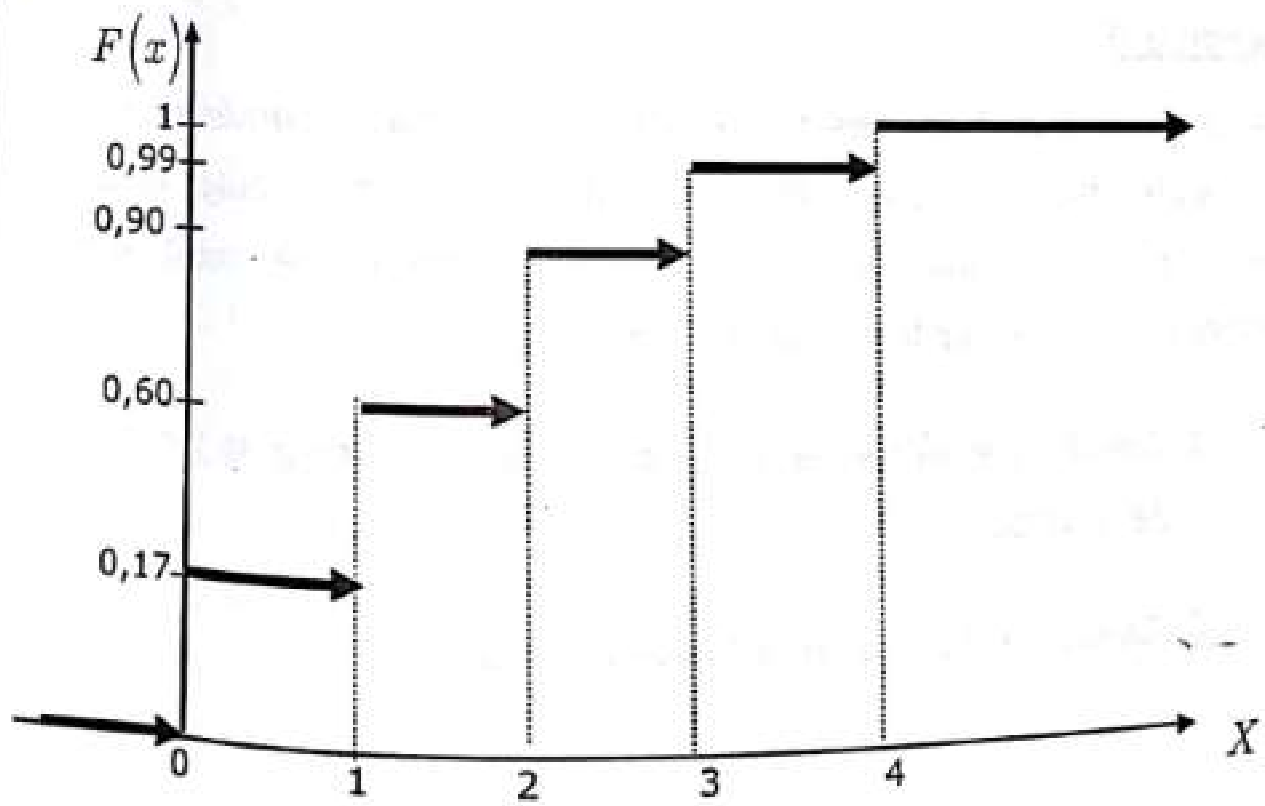
$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=0}^{4}\left(X_i^2\right)\left(p_i\right)$$
$$= \left(0^2 \times \frac{323}{1827}\right) + \left(1^2 \times \frac{760}{1827}\right) + \left(2^2 \times \frac{570}{1827}\right)$$
$$+ \left(3^2 \times \frac{160}{1827}\right) + \left(4^2 \times \frac{14}{1827}\right) = \frac{4704}{1827} = 2,575.$$

$$V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2 = 2,575 - \left(1,333\right)^2 = 0,798.$$

4. On sait que la fonction de répartition de X, est définie par : $F\left(x\right) = p\left(X \prec x\right)$, avec :

$$F\left(x\right) = p\left(X \prec x\right) = \begin{cases} p\left(X \prec 0\right) = 0 & pour\ x \leq 0 \\ p\left(X \prec 1\right) = 0,17 & pour\ 0 \prec x \leq 1 \\ p\left(X \prec 2\right) = 0,60 & pour\ 1 \prec x \leq 2 \\ p\left(X \prec 3\right) = 0,90 & pour\ 2 \prec x \leq 3 \\ p\left(X \prec 4\right) = 0,99 & pour\ 3 \prec x \leq 4 \\ p\left(X \geq 4\right) = 1 & pour\ x \succ 4 \end{cases}$$

Le graphe de la fonction de répartition $F\left(x\right)$ est donné comme suit :



4. D'après la loi de probabilité de X :

a. $p(X=2)=\dfrac{570}{1827}=0,312.$

b. $p(X\geq 2)=p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)$

Au moins

$$=\frac{570+160+14}{1827}=\frac{744}{1827}\approx 0,407.$$

c. $p(X\leq 2)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)$

Au plus

$$=\frac{323+760+570}{1827}=\frac{1653}{1827}\approx 0,90.$$

Exercice 5

Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 boules numérotées 2 et 5 boules numérotées 3. On tire simultanément 2 boules et on considère la variable aléatoire X représentant le total des nombres marqués sur les deux boules.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. Donner la fonction de répartition de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. Quelle est la probabilité pour que le total prenne une valeur :

a. Au moins égale à 6 ?

b. Strictement comprise entre 2 et 6 (2 et 6 non comprises) ?

Solution :

1. L'espace des événements Ω associé à l'expérience qui consiste à choisir 2 boules contient $C_{10}^{2}=45$ événements élémentaires, également probables. On peut alors distinguer les événements suivants :

- $(1\,;\,1)$ de probabilité $\left(\dfrac{1}{45}\right)\times C_3^2=\dfrac{3}{45}$;
- $(1\,;\,2)$ de probabilité $\left(\dfrac{1}{45}\right)\times C_3^1\times C_2^1=\dfrac{6}{45}$;
- $(1\,;\,3)$ de probabilité $\left(\dfrac{1}{45}\right)\times C_3^1\times C_5^1=\dfrac{15}{45}$;
- $(2\,;\,2)$ de probabilité $\left(\dfrac{1}{45}\right)\times C_2^2=\dfrac{1}{45}$;
- $(2\,;\,3)$ de probabilité $\left(\dfrac{1}{45}\right)\times C_2^1\times C_5^1=\dfrac{10}{45}$;
- $(3\,;\,3)$ de probabilité $\left(\dfrac{1}{45}\right)\times C_5^2=\dfrac{10}{45}.$

La loi de probabilité de X est donnée comme suit :

$X = x_i$	2	3	4	5	6	Somme
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{45}{45} = 1$

La fonction de répartition de X, définie par $F(x) = p(X \prec x)$, est donnée comme suit :

$$F(x) = p(X \prec x) = \begin{cases} p(X \prec 2) = 0 & pour\ x \leq 2 \\ p(X \prec 3) = \frac{3}{45} & pour\ 2 \prec x \leq 3 \\ p(X \prec 4) = \frac{9}{45} & pour\ 3 \prec x \leq 4 \\ p(X \prec 5) = \frac{25}{45} & pour\ 4 \prec x \leq 5 \\ p(X \prec 6) = \frac{35}{45} & pour\ 5 \prec x \leq 6 \\ p(X \geq 6) = 1 & pour\ x \succ 6 \end{cases}$$

2. Calcul de $E(X)$ et $V(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=2}^{6} (X_i)(p_i)$$
$$= \left(2 \times \frac{3}{45}\right) + \left(3 \times \frac{6}{45}\right) + \left(4 \times \frac{16}{45}\right) + \left(5 \times \frac{10}{45}\right)$$
$$+ \left(6 \times \frac{10}{45}\right) = \frac{198}{45} = 4,4.$$

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{6} (X_i^2)(p_i)$$
$$= \left(2^2 \times \frac{3}{45}\right) + \left(3^2 \times \frac{6}{45}\right) + \left(4^2 \times \frac{16}{45}\right)$$
$$+ \left(5^2 \times \frac{10}{45}\right) + \left(6^2 \times \frac{10}{45}\right) = \frac{932}{45} = 20,71.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 20,71 - (4,4)^2 = 1,35.$$

3.

a. La probabilité pour que le total prenne une valeur minimale de 6 est donnée comme suit :

$$p(X \geq 6) = p(X = 6) = \frac{10}{45}.$$

b. La probabilité pour que le total prenne une valeur strictement comprise entre 2 et 6 (2 et 6 non comprises) est donnée par :

$$p(2 \prec X \prec 6) = 1 - [p(X = 2) + p(X = 6)]$$
$$= 1 - \left(\frac{3}{45} + \frac{10}{45}\right) = \frac{32}{45}.$$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs entières successives et ayant la loi de probabilité suivante :

$$p(X = k) = \frac{ak}{n} \quad pour\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

1. Déterminer la valeur de la constante a pour qu'il s'agisse bien d'une loi de probabilité.

2. Après calcul, on obtient $E(X) = \frac{(2n+1)}{3}$; calculer $E(X^2)$, en déduire $V(X)$.

Solution :

1. Détermination de la valeur de la constante a :

On sait que la somme des probabilités est égale à 1 ; alors

$$\sum_{k=0}^{n} p(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{ak}{n}\right) = 1 \Rightarrow \frac{a}{n}(0 + 1 + \ldots + n) = 1.$$

Nous sommes en présence d'une suite arithmétique de raison 1 ; nous avons donc :

$$\left(\frac{a}{n}\right) \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 1 \Rightarrow a = \left(\frac{2}{n+1}\right)$$

2. Calcul de $E(X^2)$ et déduction de $V(X)$:

Puisque $E(X) = \frac{2n+1}{3}$, $E(X^2)$ est calculé comme suit :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} (k^2) \times \left(\frac{ak}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \times \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{a}{n}(0^3 + 1^3 + 2^3 \ldots n^3)$$

Puisque $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, on peut déduire :

$$V(X) = \frac{a}{n}(0^3 + 1^3 + 2^3 \ldots n^3) - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 = \left(\frac{n^2 - n - 2}{18}\right).$$

Exercice 7

Un restaurateur propose 7 entrées dont 2 à 8 DH chacune, 4 à 10 DH chacune et une à 12 DH ; 3 plats du jour dont 2 à 20 DH chacun et un à 25 DH et 5 desserts dont 2 à 8 DH chacun et 3 à 6 DH chacun. Un client compose son menu (un menu est composé d'une entrée, d'un plat du jour et d'un dessert).

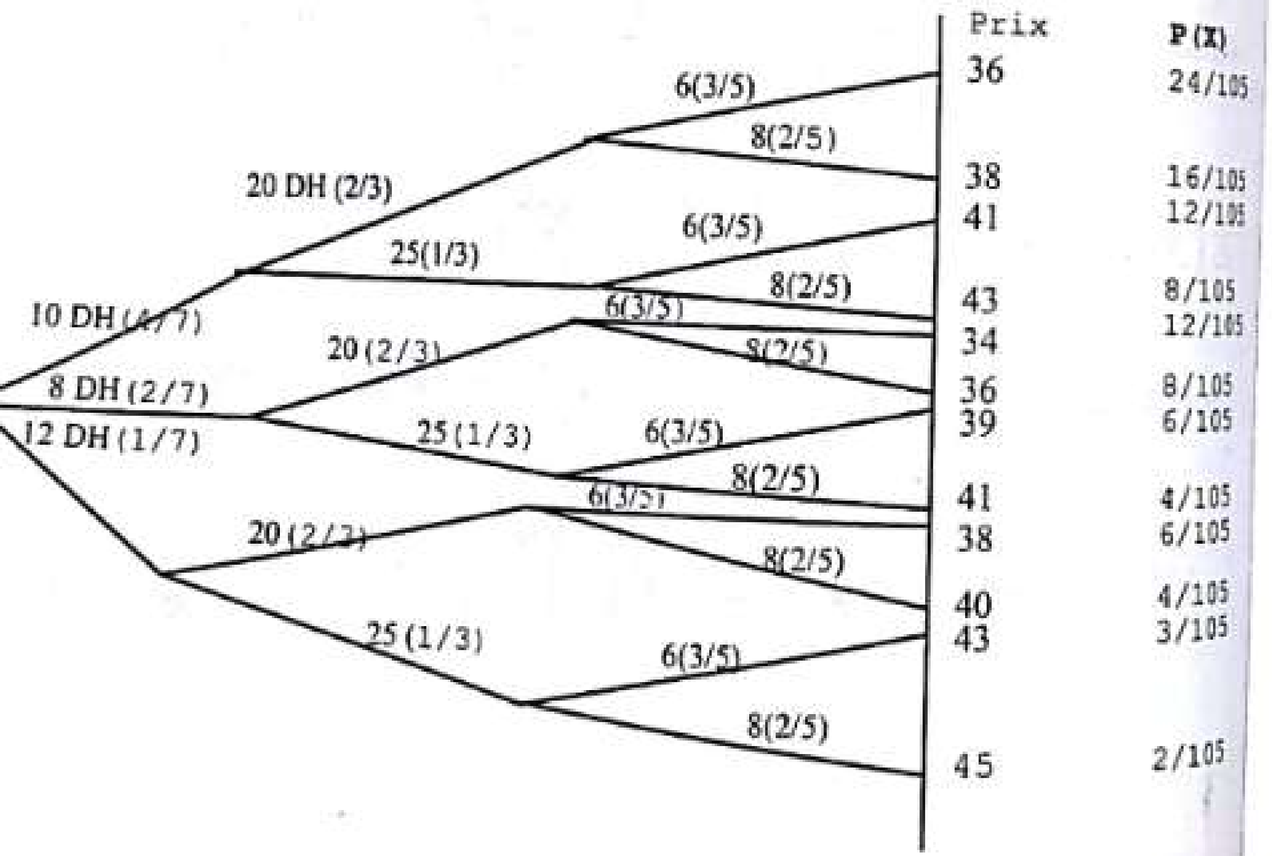
Soit X le prix du menu ainsi composé.

1. Donner la loi de probabilité de X.

2. Calculer $E(X)$ et donner sa signification.

Solution :

1. Pour répondre à cette question, on va utiliser l'arbre des probabilités suivant :



A partir de cet arbre des probabilités, on construit la loi de probabilité de X comme suit :

$X = x_i$	34	36	38	39	40	41	43	45	Somme
$p(X = x_i)$	$\frac{12}{105}$	$\frac{32}{105}$	$\frac{22}{105}$	$\frac{6}{105}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{16}{105}$	$\frac{11}{105}$	$\frac{2}{105}$	1

2. Calcul et signification de $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{8} (X_i)(p_i)$$
$$= \left(34 \times \frac{12}{105}\right) + \left(36 \times \frac{32}{105}\right) + \left(38 \times \frac{22}{105}\right) + \left(39 \times \frac{6}{105}\right)$$
$$+ \left(40 \times \frac{4}{105}\right) + \left(41 \times \frac{16}{105}\right) + \left(43 \times \frac{11}{105}\right) + \left(45 \times \frac{2}{105}\right)$$
$$= \frac{4009}{105} = 38{,}18.$$

$E(X) = 38{,}18$ *signifie que le prix moyen pour un repas est égal à 38,18 DH.*

Exercice 8

Le nombre X d'étudiants se rendant à la bibliothèque au cours d'une période de 5 mn est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée comme suit :

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,3	0,1	0,4	0,2

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. Soit Y une variable aléatoire représentant le nombre d'étudiants se rendant à la bibliothèque au cours d'une période d'une heure. En divisant l'heure en 12 intervalles et en posant $X_i =$ {nombre d'étudiants se rendant à la bibliothèque au cours du $i^{ème}$ intervalle} et en supposant que les X_i sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que X.

   Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Solution :

1. Calcul de $E(X)$ et $V(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} (X_i)(p_i) = (0\times 0,3) + (1\times 0,1) + (2\times 0,4) + (3\times 0,2) = 1,5.$$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} (X_i^2)(p_i) = (0^2\times 0,3) + (1^2\times 0,1) + (2^2\times 0,4) + (3^2\times 0,2) = 3,5.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3,5 - (1,5)^2 = 1,25.$$

2. Calcul de $E(Y)$ et $V(Y)$:

Une heure se subdivise en 12 périodes de 5 minutes. Soit X_i le nombre d'étudiants au cours de la période i. On définit une nouvelle variable aléatoire Y comme suit : $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12}$ et puisque l'espérance mathématique est linéaire, $E(Y)$ et $V(Y)$ sont données comme suit :

- $E(Y) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_{12}) = 12 \times E(X) = 12 \times 1,5 = 18$;

- $V(Y)=V(12\times X)=(12^2)\times V(X)$
$$=12^2\times 1{,}25=180.$$

Exercice 9

Un jeu consiste à jeter un dé, on gagne 20 DH si le dé amène un 2 ; 40 DH si le dé amène un 4 ; on perd 30 DH si le dé amène un 5 et 15 DH si le dé amène un 6 et il n'y a ni perte ni gain pour les autres numéros. Calculer le gain espéré.

Solution :

Soit la variable aléatoire X qui désigne le gain algébrique, avec $X=\{-30\ ;\ -15\ ;\ 0\ ;\ 20\ ;\ 40\}$. Les valeurs négatives signifient des pertes.

La loi de probabilité de X est donnée comme suit :

$X=x_i$	-30	-15	0	20	40	Somme
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}=1$

Le gain espéré est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, avec :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}(X_i)(p_i)$$
$$=\left(-30\times\frac{1}{6}\right)+\left(-15\times\frac{1}{6}\right)+\left(0\times\frac{2}{6}\right)+\left(20\times\frac{1}{6}\right)+\left(40\times\frac{1}{6}\right)$$
$$=2{,}5.$$

Donc le gain espéré est égale à 2,5 DH, c'est-à-dire, si on participe à ce jeu, on gagne en moyenne 2,5 DH.

Exercice 10

Un chef de service commercial estime avoir une probabilité de 0,6 de faire gagner 100000 DH à son entreprise en faisant une opération ; si cette opération est manquée, la perte est de 20000 DH. Quelle est l'espérance du gain ?

Solution :

Soit la variable aléatoire X qui désigne le gain algébrique, avec $X=\{-20000\ ;\ 100000\}$. Les valeurs négatives signifient des pertes.

La loi de probabilité de X est donnée comme suit :

$X=x_i$	-20000	100000	Somme
$p(X=x_i)$	$0{,}4$	$0{,}6$	1

Le gain espéré est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, avec :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{2}(X_i)(p_i)$$
$$=(-20000\times 0{,}4)+(100000\times 0{,}6)=52000.$$

Donc le gain espéré est égale à 52000, c'est-à-dire, si le chef du service commercial fait cette opération, il gagne en moyenne 52000 DH.

Exercice 11

A la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun un billet dont 7 pour la destination de la gare B (prix du billet est de 50 DH), 5 pour la destination de la gare C (prix du billet est de 60 DH), 4 pour la destination de la gare D (prix du billet est de 75 DH).

1. On choisit au hasard un de ces voyageurs. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque voyageur le prix de son billet (en DH).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On choisit au hasard trois de ces voyageurs :

a. Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.

b. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.

c. Quelle est la probabilité pour que cette destination soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination ?

Solution :

1. X est la variable aléatoire représentant le prix du billet, avec :

$$X=\{50 \; ; \; 60 \; ; \; 75\}.$$

a. La loi de probabilité de X est donnée comme suit :

$X=x_i$	50	60	75	Somme
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{16}{16}=1$

b. Calcul de $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}(X_i)(p_i)$$

$$=\left(50\times\frac{7}{16}\right)+\left(60\times\frac{5}{16}\right)+\left(75\times\frac{4}{16}\right)=\frac{950}{16}=59,375.$$

2. Si on choisit au hasard 3 de ces voyageurs :

a. La probabilité que les 3 voyageurs aient des destinations différentes est donnée comme suit :

$$\frac{C_7^1C_5^1C_4^1}{C_{16}^3}=\frac{7\times5\times4}{560}=\frac{14}{56}=\frac{7}{28}.$$

b. La probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B est déterminée à partir de la probabilité de l'événement contraire défini comme étant : *« aucun des 3 voyageurs ne choisit la destination B »*.

Pour cela, on choisit alors 3 voyageurs parmi les 9 qui n'ont pas la destination B. Cette probabilité est égale à :

$$\frac{C_9^3}{C_{16}^3}=\frac{84}{560}=\frac{21}{140}.$$

Donc la probabilité demandée est égale à :

$$1-\frac{21}{140}=\frac{119}{140}.$$

c. La probabilité pour que cette destination soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination est déterminée par la définition des les évènements suivants :

M : les 3 voyageurs ont la même destination ;

B : les 3 voyageurs ont pris la destination B.

La probabilité recherchée est formulée par la probabilité conditionnelle suivante : $p\left(B/M\right)=\dfrac{p(B\cap M)}{p(M)}$.

Or on constate que $\left(B\cap M\right)$ désigne l'événement : *« les 3 voyageurs ont pris la destination B »*. Donc la probabilité recherchée est donnée par :

$$p\left(B/M\right)=\frac{C_7^3}{C_7^3+C_5^3+C_4^3}=\frac{35}{35+10+4}=\frac{35}{49}.$$

Exercice 12

Soient 9 coureurs dont 6 appartiennent à l'équipe A et 3 à l'équipe B. Ils participent à 3 courses successives. On admet que chaque victoire fait gagner à l'équipe victorieuse 60000 DH.

Calculer le gain moyen de l'équipe A.

Solution :

Pour résoudre ce problème, on va utiliser deux méthodes comme suit :

Première méthode :

Soit X le nombre de victoires remportées par l'équipe A, avec $X=\left\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\right\}$. Les 3 courses sont indépendantes, donc la probabilité de chaque valeur est donnée comme suit :

$$p\left(X=0\right)=\left(\frac{3!}{0!3!}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27};$$

$$p(X=1)=\left(\frac{3!}{1!2!}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27};$$

$$p(X=2)=\left(\frac{3!}{2!1!}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{12}{27};$$

$$p(X=3)=\left(\frac{3!}{3!0!}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}.$$

En outre, la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

$X=x_i$	0	1	2	3	Somme
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{27}{27}=1$

De même, $E(X)$ est calculée comme suit :

$$E(X)=\sum_{i=0}^{3}(X_i)(p_i)$$
$$=\left(0\times\frac{1}{27}\right)+\left(1\times\frac{6}{27}\right)+\left(2\times\frac{12}{27}\right)+\left(3\times\frac{8}{27}\right)=\frac{54}{27}=2.$$

Soit G le gain y associé, avec :

$$G=60000X \Rightarrow E(G)=60000E(X)=60000\times 2=120000.$$

Ce qui signifie que le gain moyen de l'équipe A est de 120000 DH.

Deuxième méthode :

Soit la variable aléatoire G qui désigne le gain associé à chaque probabilité, avec : $G=\{0\ ;\ 60000\ ;\ 120000\ ;\ 180000\}$. La probabilité de chaque valeur est donnée comme suit :

$$p(G=0)=p(X=0)=\frac{1}{27};$$

$$p(G=60000)=p(X=1)=\frac{6}{27};$$

$$p(G=120000)=p(X=2)=\frac{12}{27};$$

$$p(G=180000)=p(X=3)=\frac{8}{27}.$$

Donc la loi de probabilité de G est donnée comme suit :

$G=g_i$	0	60000	120000	180000	Somme
$p(G=g_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{27}{27}=1$

n effet, $E(G)$ est calculée de la façon suivante :

$$E(G)=\sum_{i=1}^{4}(G_i)(p_i)$$
$$=\left(0\times\frac{1}{27}\right)+\left(60000\times\frac{6}{27}\right)+\left(120000\times\frac{12}{27}\right)$$
$$+\left(180000\times\frac{8}{27}\right)=\frac{3240000}{27}=120000.$$

Ce qui signifie que le gain moyen de l'équipe A est de 120000 DH.

Exercice 13

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes avec respectivement pour espérance mathématique 8 et 10 et pour variance 9 et 12.

1. Calculer :

$$V(4X_1)\ ;\ V(X_1+2X_2)\ ;\ V(2X_1+3X_2)\ ;\ E(X_1-6)^2.$$

2. $E(X_1+3X_2)$ est-elle une variable aléatoire ?

Solution :

1.

- $V(4X_1)=4^2V(X_1)=16\times9=144$;

- $$V(2X_1+3X_2)=4V(X_1)+9V(X_2)$$
$$=(4\times9)+(9\times12)=144\ ;$$

- $$E(X_1-6)^2=E(X_1^2-12X_1+36)$$
$$=E(X_1^2)-12E(X_1)+36$$

Or $E(X_1^2)=V(X_1)+E(X_1)^2$, donc :

$$E(X_1-6)^2=V(X_1)+E(X_1)^2-12E(X_1)+36$$
$$=9+(8\times8)-(12\times8)+36=13.$$

2. $E(X_1+3X_2)$ n'est pas une variable aléatoire car $E(.)$ est toujours une valeur certaine (constante).

Exercice 14

Une firme de nationalité B fabrique des pièces. Le service marketing estime que la demande (en milliers d'unités) est exprimée à l'image d'une variable aléatoire X, de loi de probabilité suivante :

$X=x_i$	1	2	3	4	5
$p(X=x_i)$	$5a$	$2a$	$3a$	$4a$	a

2. Calculer $E(X)$ et l'écart-type de X.

3. Si l'entreprise dispose d'un stock de 3000 pièces. Quelle est la probabilité qu'il ait rupture de stock ?

Solution :

1. Détermination de la valeur de a :

On sait que la somme des probabilités de X est égale à 1 (*puisqu'on connaît la loi de probabilité de la variable aléatoire* X *donnée dans le tableau ci-dessus*) d'où :

$$15a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{15}.$$

2. $E(X)$ est calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{5}(X_i)(p_i) \\ &= (1\times 5a)+(2\times 2a)+(3\times 3a)+(4\times 4a) \\ &\quad +(5\times a) = 39a \Rightarrow 39\times\frac{1}{15}=\frac{39}{15}=2,6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{5}(X_i^2)(p_i) \\ &= (1^2\times 5a)+(2^2\times 2a)+(3^2\times 3a)+(4^2\times 4a) \\ &\quad +(5^2\times a) = 129a \Rightarrow 129\times\frac{1}{15}=\frac{129}{15}=8,6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-(E(X))^2 = 8,6-(2,6)^2 \\ &= 1,84 \Rightarrow \sigma_{(x)} = 1,35. \end{aligned}$$

3. Si l'entreprise dispose d'un stock de 3000 pièces, la probabilité qu'il ait rupture de stock est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} p(X \succ 3) &= p(X=4)+p(X=5) \\ &= 4a + a = 5a = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 15

Soit X le nombre de clients qui se présente à la caisse d'un magasin au cours d'une période de 5 minutes. La loi de probabilité de X est donnée comme suit :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	0,368	0,367	0,184	0,061	0,015	0,003	0,0019	0,0001

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. Supposons qu'il y a une amende de 2 DH lorsque dans une période de 5 mn, un client se présente à la caisse alors que 3 clients s'y trouvent déjà. De même, il y a une prime de 3 DH lorsque le nombre de clients est inférieur à deux. Considérons le rapport (prime/amende) comme une variable aléatoire ; en donner sa loi de probabilité.

Solution :

1. Calcul de $E(X)$ et $V(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=0}^{7}(X_i)(p_i)$$
$$=(0\times 0{,}368)+(1\times 0{,}367)+(2\times 0{,}184)+(3\times 0{,}061)$$
$$+(4\times 0{,}015)+(5\times 0{,}003)+(6\times 0{,}0019)+(7\times 0{,}0001)$$
$$=1{,}0051.$$

$$E(X^2)=\sum_{i=0}^{7}(X_i^2)(p_i)$$
$$=(0^2\times 0{,}368)+(1^2\times 0{,}367)+(2^2\times 0{,}184)$$
$$+(3^2\times 0{,}061)+(4^2\times 0{,}015)+(5^2\times 0{,}003)$$
$$+(6^2\times 0{,}0019)+(7^2\times 0{,}0001)$$
$$=2{,}0403.$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=2{,}0403-(1{,}0051)^2=1{,}03007.$$

2. Soit la variable aléatoire Y qui désigne le rapport (prime/amende).

- S'il y a 7 clients devant la caisse, alors :
  $Y=(-2\times 4)=-8$, avec : $p(Y=-8)=0{,}0001$;
- S'il y a 6 clients devant la caisse alors :
  $Y=(-2\times 3)=-6$, avec : $p(Y=-6)=0{,}0019$;
- S'il y a 5 clients devant la caisse, alors :
  $Y=(-2\times 2)=-4$, avec : $p(Y=-4)=0{,}003$;

- S'il y a 4 clients devant la caisse, alors :
  $Y=(-2\times 1)=-2$, avec : $p(Y=-2)=0{,}015$;
- S'il y a 3 ou 2 clients devant la caisse, alors :
  $Y=0$, avec : $p(Y=0)=0{,}184+0{,}061=0{,}245$;
- S'il y a 1 ou 0 client devant la caisse, alors :
  $Y=3$, avec : $p(Y=3)=0{,}367+0{,}368=0{,}735.$

En effet, la loi de probabilité de Y est donnée de la façon suivante :

$Y=y_i$	-8	-6	-4	-2	0	3	Somme
$p(Y=y_i)$	0,0001	0,0019	0,003	0,015	0,245	0,735	1

Exercice 16

Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule rouge. On tire successivement 4 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de changements de couleurs obtenus au cours des 4 tirages.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution :

1. Soit l'ensemble E = {blanche, rouge et verte}.

$Card(\Omega) = 3^4 = 81$, puisqu'il s'agit d'un arrangement avec répétition avec, $n = 3$ et $p = 4$. L'ensemble des valeurs prises par X sont : $\{0\ ;1\ ;2\ ;3\}$ et $Card(X_i) = C_{n-1}^{i} \times 3 \times 2^{i}$: c'est le nombre de fois que la valeur se répète dans les 81 cas possibles.

Donc la loi de probabilité se calcule directement à partir de la formule suivante :

$$p\left(X = x_i\right) = \frac{C_{n-1}^{x_i} \times 3 \times 2^{x_i}}{3^n} = \frac{C_{n-1}^{x_i} \times 2^{x_i}}{3^{n-1}}.$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée comme suit :

$X = x_i$	0	1	2	3	Somme
$p\left(X = x_i\right)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{27}{27} = 1$

2. Calcul de $E\left(X\right)$ et $V\left(X\right)$:

$$E\left(X\right) = \sum_{i=0}^{3}\left(X_i\right)\left(p_i\right)$$
$$= \left(0 \times \frac{1}{27}\right) + \left(1 \times \frac{6}{27}\right) + \left(2 \times \frac{12}{27}\right) + \left(3 \times \frac{8}{27}\right)$$
$$= \frac{54}{27} = 2.$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=0}^{3}\left(X_i^2\right)\left(p_i\right)$$
$$= \left(0^2 \times \frac{1}{27}\right) + \left(1^2 \times \frac{6}{27}\right) + \left(2^2 \times \frac{12}{27}\right) + \left(3^2 \times \frac{8}{27}\right)$$
$$= \frac{126}{27} = 4,667.$$

$$V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2 = \frac{126}{27} - (2)^2 = \frac{2}{3}.$$

Exercice 17

Le tableau suivant donne la survie relative à un groupe de 1000 personnes nées la même année et qui survivent à partir de leur naissance (âge 0).

Age exprimé en année	Nombre de survivants à cet âge
0	1000
10	850
20	800
30	750
40	720
50	680
60	560
70	380
80	150
90	20
100	0

Calculer à partir de ce tableau :

1. La probabilité pour qu'une personne A décède avant l'âge de 40 ans.
2. La probabilité pour qu'une personne A décède à l'âge de 70 ans.
3. La probabilité pour qu'une personne A décède à un âge entre 30 et 60 ans.
4. La probabilité pour deux personnes A et B d'atteindre toutes les deux l'âge de 70 ans.

5. La probabilité pour deux personnes A et B de décéder toutes les deux avant l'âge de 70 ans.
6. Calculer l'espérance de vie (durée moyenne de survie).

Solution :

Soit la variable aléatoire X qui désigne l'âge de décès.

1. La probabilité pour qu'une personne meurt avant l'âge de 40 ans est donnée comme suit :

$$p(X \prec 40) = 1 - p(X \succ 40) = 1 - 0,72 = 0,28.$$

2. La probabilité pour que la personne décède à l'âge de 70 ans est donnée par : $p(X \succ 70) = 0,38.$

3. La probabilité pour que la personne A décède à un âge entre 30 et 60 ans est donnée comme suit :

$$p(30 \prec X \prec 60) = p(X \succ 30) - p(X \succ 60)$$
$$= 0,75 - 0,56 = 0,19.$$

Exercice 17

Le tableau suivant donne la survie relative à un groupe de 1000 personnes nées la même année et qui survivent à partir de leur naissance (âge 0).

Age exprimé en année	Nombre de survivants à cet âge
0	1000
10	850
20	800
30	750
40	720
50	680
60	560
70	380
80	150
90	20
100	0

Calculer à partir de ce tableau :

1. La probabilité pour qu'une personne A décède avant l'âge de 40 ans.
2. La probabilité pour qu'une personne A décède à l'âge de 70 ans.
3. La probabilité pour qu'une personne A décède à un âge entre 30 et 60 ans.
4. La probabilité pour deux personnes A et B d'atteindre toutes les deux l'âge de 70 ans.

5. La probabilité pour deux personnes A et B de décéder toutes les deux avant l'âge de 70 ans.
6. Calculer l'espérance de vie (durée moyenne de survie).

Solution :

Soit la variable aléatoire X qui désigne l'âge de décès.

1. La probabilité pour qu'une personne meurt avant l'âge de 40 ans est donnée comme suit :

$$p(X \prec 40) = 1 - p(X \succ 40) = 1 - 0,72 = 0,28.$$

2. La probabilité pour que la personne décède à l'âge de 70 ans est donnée par : $p(X \succ 70) = 0,38.$

3. La probabilité pour que la personne A décède à un âge entre 30 et 60 ans est donnée comme suit :

$$p(30 \prec X \prec 60) = p(X \succ 30) - p(X \succ 60)$$
$$= 0,75 - 0,56 = 0,19.$$

Exercice 17

Le tableau suivant donne la survie relative à un groupe de 1000 personnes nées la même année et qui survivent à partir de leur naissance (âge 0).

Age exprimé en année	Nombre de survivants à cet âge
0	1000
10	850
20	800
30	750
40	720
50	680
60	560
70	380
80	150
90	20
100	0

Calculer à partir de ce tableau :

1. La probabilité pour qu'une personne A décède avant l'âge de 40 ans.

2. La probabilité pour qu'une personne A décède à l'âge de 70 ans.

3. La probabilité pour qu'une personne A décède à un âge entre 30 et 60 ans.

4. La probabilité pour deux personnes A et B d'atteindre toutes les deux l'âge de 70 ans.

5. La probabilité pour deux personnes A et B de décéder toutes les deux avant l'âge de 70 ans.

6. Calculer l'espérance de vie (durée moyenne de survie).

Solution :

Soit la variable aléatoire X qui désigne l'âge de décès.

1. La probabilité pour qu'une personne meurt avant l'âge de 40 ans est donnée comme suit :

$$p(X \prec 40) = 1 - p(X \succ 40) = 1 - 0,72 = 0,28.$$

2. La probabilité pour que la personne décède à l'âge de 70 ans est donnée par : $p(X \succ 70) = 0,38.$

3. La probabilité pour que la personne A décède à un âge entre 30 et 60 ans est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} p(30 \prec X \prec 60) &= p(X \succ 30) - p(X \succ 60) \\ &= 0,75 - 0,56 = 0,19. \end{aligned}$$

4. La probabilité pour que deux personnes A et B puissent atteindre toutes les deux l'âge de 70 ans est donnée comme suit :

Puisque X_A (l'âge de l'individu A) est indépendant de X_B (l'âge de l'individu B) :

$$p\left[(X_A \succ 70)\cap(X_B \succ 70)\right] = \left[p(X_A \succ 70)\right]\times\left[p(X_B \succ 70)\right]$$

$$= 0{,}38 \times 0{,}38 = 0{,}1444.$$

5. La probabilité pour que deux personnes A et B décèdent toutes les deux avant l'âge de 70 ans est donnée comme suit :

$$p\left[(X_A \prec 70)\cap(X_B \prec 70)\right] = (1-0{,}38)^2 = 0{,}3844.$$

6. Pour calculer l'espérance de vie (durée moyenne d'existence), il faut établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Il convient de remarquer qu'on est en présence d'une fonction inverse de répartition appelée couramment fonction de survie donnée comme suit :

X	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
p_i	0,15	0,05	0,05	0,03	0,04	0,12	0,18	0,23	0,13	0,02

A partir du tableau ci-dessus on calcule $E(X)$ comme suit :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{i=1}^{10}(X_i)(p_i)\\ &= (5\times0{,}15)+(15\times0{,}05)+(25\times0{,}05)+(35\times0{,}03)\\ &\quad+(45\times0{,}04)+(55\times0{,}12)+(65\times0{,}18)+(75\times0{,}23)\\ &\quad+(85\times0{,}13)+(95\times0{,}02)\\ &= 54{,}1.\end{aligned}$$

Donc l'espérance de vie (durée moyenne d'existence) est de 54,1 années.

Exercice 18

Une loterie distribue 200 lots de 250 DH chacun, 20 lots de 1250 DH chacun et 5 lots de 5000 DH chacun. En supposant que 10000 billets ont été émis et vendus, quel est le prix minimum du billet pour que l'organisation soit financièrement équilibrée ?

Solution :

Soit X une variable aléatoire représentant le gain associé à un billet ; la loi de probabilité de X est donnée comme suit :

$X = x_i$	0	250	1250	5000	Somme
$p(X = x_i)$	0,9775	0,02	0,002	0,0005	1

... Le nombre moyen de tonnes vendues chaque jour est donné par $E(X)$ comme suit :

$$E(X)=\sum_{i=0}^{6}(X_i)(p_i)$$
$$=(0\times 0,02)+(1\times 0,15)+(2\times 0,25)+(3\times 0,3)$$
$$+(4\times 0,15)+(5\times 0,1)+(6\times 0,03)$$
$$=2,83.$$

c. Calcul de la variance et de l'écart-type de X :

$$E(X^2)=\sum_{i=0}^{6}(X_i^2)(p_i)$$
$$=(0^2\times 0,02)+(1^2\times 0,15)+(2^2\times 0,25)+(3^2\times 0,3)$$
$$+(4^2\times 0,15)+(5^2\times 0,1)+(6^2\times 0,03)$$
$$=9,83.$$

D'où $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=9,83-(2,83)^2=1,82.$

Ce qui implique que l'écart-type de X est égale à :

$$\sigma_{(x)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1,82}=1,35.$$

2.

a. Soit X la nouvelle variable aléatoire représentant la demande, c'est-à-dire, les ventes pour le grossiste et soit Y la variable aléatoire représentant la commande, c'est-à-dire, les achats que fait le grossiste et soit G le gain algébrique donné selon les cas suivants :

- Si $X \geq Y$: il ne peut vendre que Y tonnes, d'où $G=5000Y$.
- Si $X \prec Y$: il vend X tonnes à 5000 DHS et perd 2000 DHS sur les $Y-X$ restants, d'où :

$$G=5000X-2000(Y-X)=7000X-2000Y.$$

De ce qui précède, nous avons construit le tableau donnant les valeurs de G pour $Y\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ ,6\}$ comme suit :

X	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,02	0,15	0,25	0,30	0,15	0,10	0,03
G_1	-2000	5000	5000	5000	5000	5000	5000
G_2	-4000	3000	10000	10000	10000	10000	10000
G_3	-6000	1000	8000	15000	15000	15000	15000
G_4	-8000	-1000	6000	13000	20000	20000	20000
G_5	-10000	-3000	4000	11000	18000	25000	25000
G_6	-12000	-5000	2000	9000	16000	23000	30000

Sur le tableau ci-dessus, nous pouvons lire :

- G_1 par exemple représente le gain pour $Y = 1$.
- Pour $Y = 1$ et $X = 0$, nous sommes dans la situation suivante :

$$X \prec Y \Rightarrow G = (7000 \times 0) - (2000 \times 1) = -2000 \ DHS.$$

- Pour $Y = 1$ et $X = 1$, nous sommes dans la situation suivante :

$$X = Y \Rightarrow G = 5000 \times 1 = 5000 \ DHS.$$

- Pour $Y = 1$ et $X = 2$, nous sommes dans la situation suivante :

$$X \geq Y \Rightarrow G = 5000 \times 1 = 5000 \ DHS.$$

- et ainsi de suite pour les autres valeurs de X et de Y comme le montre le tableau ci-dessus.

b. $E(G)$ pour $Y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} E(G_1) &= \sum_{i=0}^{6} (G_{1i})(p_i) \\ &= (-2000 \times 0,02) + (5000 \times 0,15) + (5000 \times 0,25) \\ &\quad + (5000 \times 0,3) + (5000 \times 0,15) + (5000 \times 0,1) \\ &\quad + (5000 \times 0,03) = 4860 \ DHS. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(G_2) &= \sum_{i=0}^{6} (G_{2i})(p_i) \\ &= (-4000 \times 0,02) + (3000 \times 0,15) + (10000 \times 0,25) \\ &\quad + (10000 \times 0,3) + (10000 \times 0,15) + (10000 \times 0,1) \\ &\quad + (10000 \times 0,03) = 8670 \ DHS. \end{aligned}$$

Si nous continuons et optons pour le même procédé, nous aurons donc :

- $E(G_3) = 10730 \ DHS.$
- $E(G_4) = 10690 \ DHS.$
- $E(G_5) = 9600 \ DHS.$
- $E(G_6) = 7810 \ DHS.$

Exercice 20

Deux joueurs *A* et *B* lancent deux pièces de monnaie (une pièce pour chaque joueur). Si les deux pièces tombent sur pile, le joueur *A* gagne g DH ; sinon le joueur *B* gagne 2 DHS. Un jeu est équitable si l'espérance de gain de chaque joueur est nulle.

Combien doit gagner *A* pour que le jeu soit équitable ?

Solution :

Soit la variable aléatoire G qui désigne le gain du joueur A ; G prend la valeur -2 si le joueur B gagne et g si le joueur A gagne.

La loi de probabilité de G est donnée comme suit :

$G=g_i$	-2	g	Somme
$p(G=g_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}=1$

Pour déterminer combien doit gagner le joueur A afin que le jeu soit équitable, il faut déterminer la valeur de g en annulant l'espérance mathématique de G par la formule qui suit :

$$E(G)=\sum_{i=1}^{2}(G_i)(p_i)=0$$
$$=\left(\frac{3}{4}\times-2\right)+\left(\frac{1}{4}\times g\right)=-\frac{6}{4}+\frac{g}{4}=0 \Rightarrow g=6.$$

Il faut donc que A gagne 6 DHS pour que le jeu soit équitable.

Exercice 21

La durée de vie d'un tube électronique est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est donnée par la fonction suivante :

$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{180}\right)e^{-\frac{x}{180}} & pour\ x\geq 0\\ 0 & pour\ x<0\end{cases}$$

1. Donner la probabilité pour que le tube dure moins de 90 heures.
2. Donner la probabilité pour que le tube dure plus de 360 heures.
3. Calculer l'espérance de vie du tube.

Solution :

1. En vue de calculer la probabilité pour que le tube dure moins ... 90 heures, il faut passer par la fonction de répartition $F(x)$[1] ... que nous cherchons en effet, c'est : $p(X \prec 90)$:

$$p(X \prec 90) = \int_0^{90} f(x)dx = \int_0^{90}\left(\frac{1}{180}\times e^{-\frac{x}{180}}\right)dx$$

$$=\left[-e^{-\frac{x}{180}}\right]_0^{90} = -\left(e^{-\frac{90}{180}} - e^{\frac{0}{180}}\right) = -\left(e^{-\frac{1}{2}}-1\right) = 1-e^{-\frac{1}{2}}$$

Donc $p(X \prec 90) = 1-e^{-\frac{1}{2}}$.

---

1 Rappel sur les fonctions primitives :

- Si $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, avec c comme constante.
- Si $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \ln|x| + c$
- Si $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x}\left(e^x\right)dx = e^x + c$

Intégration par partie :

$$U_{(x)} = f(x) \quad \Rightarrow \quad U'_{(x)} = f'(x)$$
$$V_{(x)} = g(x) \quad \Rightarrow \quad V'_{(x)} = g'(x)$$

Ce qui implique :

$$\int_{-\infty}^{x}\left[U(x)\times V'(x)\right]dx = \left[U_{(x)}\times V_{(x)}\right]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x}\left[U'(x)\times V(x)\right]dx$$

2. En vue de calculer la probabilité pour que le tube dure plus de 360 heures, il faut passer par la fonction de répartition $F(x)$.

Ce que nous cherchons en effet, c'est : $p(X \succ 360)$:

$$p(X \succ 360) = 1 - p(X \prec 360) = 1 - \int_0^{360} f(x)dx$$

$$= 1 - \int_0^{360}\left(\frac{1}{180}\times e^{-\frac{x}{180}}\right)dx = 1 - \left[-e^{-\frac{x}{180}}\right]_0^{360} = 1 + \left[e^{-\frac{x}{180}}\right]_0^{360}$$

$$= 1 + \left[\left(e^{-\frac{360}{180}} - e^{-\frac{0}{180}}\right)\right] = 1 + \left[e^{-2} - 1\right] = e^{-2}$$

Donc $p(X \succ 360) = e^{-2}$.

3. On sait que pour une variable aléatoire continue, l'espérance mathématique $E(X)$ est donnée comme suit :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[(x)\times f(x)\right]dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x)\left(\frac{1}{180}\times e^{-\frac{x}{180}}\right)dx.$$

Pour calculer cette intégrale, il faut passer par l'intégration par partie en empruntant la procédure suivante :

$$U_{(x)} = x \quad \Rightarrow \quad U'_{(x)} = 1$$
$$V_{(x)} = -e^{-\frac{x}{180}} \quad \Rightarrow \quad V'_{(x)} = \frac{1}{180}e^{-\frac{x}{180}}$$