

Travaux dirigés en matière de :
«Echantillonnage et Estimation»
Groupes : «A » et « C »

Professeur : Monsieur El GHINI AHMED

Assuré par : YAKHLEF Abdelali

La Moyenne d'un échantillon

Exercice 1 (Extrait de l'examen Final 2012-2013) (Calcul des Probabilités)

Supposons que les notes d'une promotion de 50 étudiants en économétrie ont une moyenne de 11 avec un écart-type de 3 .

- 1) Trouver la probabilité qu'un échantillon aléatoire ait une note de moins de 14 .
- 2) Calculer la probabilité que la moyenne soit supérieur à 10 .

La Moyenne d'un échantillon

Exercice 2

(Intervalle de confiance)

Supposons que l'on prenne un échantillon aléatoire de 100 comptes-clients, d'une chaîne de magasins et que l'on trouve que le solde moyen débiteur est de 74\$.

- 1) Si l'on sait que l'écart-type pour tous les comptes est de 0.86\$, trouver l'intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne de la population, Commenter le résultat.
- 2) Calculer la longueur de l'intervalle I.
- 3) Déterminer la marge d'erreur de l'intervalle de confiance I.

La Moyenne d'un échantillon

Exercice 3 (Extrait de l'examen Final 2012-2013) (Test d'hypothèse)

Suite à une circulaire interdisant de fumer dans les endroits publics, une grande entreprise cherche à savoir si ce dispositif a contribué à la réduction du tabagisme de ses salariés fumeurs avant l'application de cette circulaire, elle sait que chaque salarié fumeur consomme en moyenne 10 cigarettes par jour après l'application de la circulaire, on a demandé à un échantillon aléatoire de 100 salariés de noter le nombre moyen de cigarette fumées par jour, on trouve une moyenne $\bar{x} = 7$, avec un écart-type $s = 16$.

- 1) Formuler les Hypothèses testées H_0 et H_1 pour évaluer l'impact de ce dispositif sur le tabagisme.
- 2) On considère un risque de première espèce de 2%, réaliser le test, quelle est votre conclusion ?
- 3) Même question avec un risque de 15%.
- 4) Déterminer le degré de signification du test, comment peut-on l'interpréter ?
- 5) Construire un intervalle de confiance à 98% autour de la moyenne de l'échantillon.
- 6) Y a-t-il un lien entre l'intervalle de confiance et le test d'hypothèse ?
- 7) Sachant que la fréquence observée de fumeurs dans l'échantillon précédent est de 60%
 - (a) Construire un intervalle de confiance au niveau 90% pour le pourcentage de fumeurs au sein de l'entreprise.
 - (b) Quelle est la marge d'erreur de cet intervalle de confiance ?

La Fréquence d'un échantillon

Exercice 1

(Calcul des Probabilités)

Trouver la probabilité que parmi les 200 prochains enfants à naître dans un Hôpital :

- 1) Il y a moins de 40 % de garçons .
- 2) Il y a plus de 54% de garçons .
- 3) Il y a entre 43 % et 55% de filles .

La Fréquence d'un échantillon

Exercice 2 (Extrait de l'examen Final 2013-2014) (Intervalle de confiance)

Dans le cadre d'une étude sur « l'adéquation entre Formation - Emploi », on a interrogé 500 Chefs d'entreprises de différents secteurs, 145 entre eux déclarent être satisfaits de l'adéquation entre les formations universitaires et le marché du travail .

- 1) Identifier la Population
- 2) Donner une estimation ponctuelle de la proportion de chefs d'entreprises qui sont satisfaits de l'adéquation entre la formation universitaire et l'emploi, puis une estimation de cette proportion par un intervalle de confiance à 90 % .
- 3) Déterminer la marge d'erreur de l'intervalle de confiance précédent .
- 4) **Combien de chefs d'entreprise qui vont déclarer qu'ils sont satisfaits de l'adéquation entre les formations et l'emploi , avec une précision de 1 % au niveau de confiance de 90 % .**

La Fréquence d'un échantillon

Exercice 3

(Test D'hypothèse)

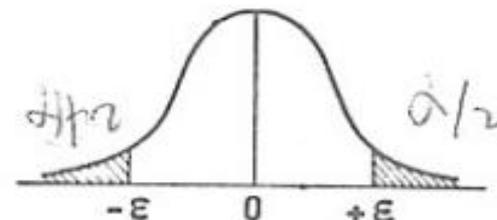
Une Minorité forme 20 % de la population d'un pays , on se demande si cette minorité est représenté fidèlement (C'est-à-dire ni sous représentée , ni surreprésentée) dans une grande administration . On prélève un échantillon aléatoire simple de 200 employés de cette administration , et on constate qu'il comprend 30 personne appartenant à la minorité .

- 1) Définissez les hypothèses H_0 et H_1 .
- 2) Pour quelles valeurs de la proportion observée dans l'échantillon ne refuserait-on pas l'hypothèse H_0 au profit de l'hypothèse alternative H_1 , (avec un risque α de 10 %)
- 3) Déterminer le degré de signification du test .

Table de la loi Normale N(0,1)

Table de l'écart-réduit (loi normale) (*)

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε , c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.



| α | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,00 | ∞ | 2,576 | 2,326 | 2,170 | 2,054 | 1,960 | 1,881 | 1,812 | 1,751 | 1,695 |
| 0,10 | 1,645 | 1,598 | 1,555 | 1,514 | 1,476 | 1,440 | 1,405 | 1,372 | 1,341 | 1,311 |
| 0,20 | 1,282 | 1,254 | 1,227 | 1,200 | 1,175 | 1,150 | 1,126 | 1,103 | 1,080 | 1,058 |
| 0,30 | 1,036 | 1,015 | 0,994 | 0,974 | 0,954 | 0,935 | 0,915 | 0,896 | 0,878 | 0,860 |
| 0,40 | 0,842 | 0,824 | 0,806 | 0,789 | 0,772 | 0,755 | 0,739 | 0,722 | 0,706 | 0,690 |
| 0,50 | 0,674 | 0,659 | 0,643 | 0,628 | 0,613 | 0,598 | 0,583 | 0,568 | 0,553 | 0,539 |
| 0,60 | 0,524 | 0,510 | 0,496 | 0,482 | 0,468 | 0,454 | 0,440 | 0,426 | 0,412 | 0,399 |
| 0,70 | 0,385 | 0,372 | 0,358 | 0,345 | 0,332 | 0,319 | 0,305 | 0,292 | 0,279 | 0,266 |
| 0,80 | 0,253 | 0,240 | 0,228 | 0,215 | 0,202 | 0,189 | 0,176 | 0,164 | 0,151 | 0,138 |
| 0,90 | 0,126 | 0,113 | 0,100 | 0,088 | 0,075 | 0,063 | 0,050 | 0,038 | 0,025 | 0,013 |

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Exemple : Pour $\varepsilon = 1,960$ la probabilité est $\alpha = 0,00 + 0,05 = 0,05$.

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 |
| 3,1 | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 |
| 3,2 | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 |
| 3,3 | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 |
| 3,4 | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 |
| 3,5 | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 |
| 3,6 | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 |
| 3,7 | 0,99989 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 |
| 3,8 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 |
| 3,9 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 |
| 4,0 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 |

EXERCICE 1, calcul des probabilités

Moyenne

1/ La probabilité qu'un échantillon aléatoire simple de 50 étudiants ait une note moyenne de 14.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{c-à-dire: } \bar{X} \sim N\left(E(\bar{X}) = 11; V(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P(\bar{X} < 14) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{14 - 11}{\frac{3}{\sqrt{50}}}\right)$$

alors: $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$
cette réduite.

$$= P(Z < 7,07)$$

$$= \Phi(7,07) = 1 = 100\%$$

ALI YAKHLEF

Puisque 7,07 n'est pas lu dans la Table donc $\Phi(7,07) = 1$

2/ La probabilité que la moyenne soit supérieure à 10.

$$P(\bar{X} > 10) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{10 - 11}{\frac{3}{\sqrt{50}}}\right)$$

$$= P(Z > -2,36)$$

$$= P(Z < 2,36) = \Phi(2,36)$$

$$= 0,9909 = 99,09\%$$

Moyenne

EXERCICE 2, INTERVALLE de confiance

2

1/ on a $n = 100 \geq 30$, $\sigma = s = 0,86 \$$, $1 - \alpha = 95\%$
et $\bar{x} = 74 \$$ alors $\alpha = 5\%$.

l'intervalle de confiance pour la moyenne de la population est:

$$I = \left[\bar{X} - \epsilon_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + \epsilon_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$n \geq 30$

avec ϵ_{α} d'après la Table de la loi normale:

$$\epsilon_{\alpha} = \begin{matrix} 0,05 \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ 1,96 \end{matrix} = 1,96$$

ALI YAKHLEF

donc
$$I = \left[74 - 1,96 \cdot \frac{0,86}{\sqrt{100}} ; 74 + 1,96 \cdot \frac{0,86}{\sqrt{100}} \right]$$

$$= [73,8374 ; 74,1626]$$

commentaire standard

en se basant sur notre échantillon de 100 (Taille n) compte, on déduit que la moyenne de la population se trouve dans l'intervalle I avec un niveau de confiance de $(1 - \alpha) = 95\%$.

2/ a. La marge d'erreur: (Precision) $[a, b]$

$$\beta = \frac{b - a}{2} = \epsilon_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{74,1626 - 73,8374}{2} = 0,1625$$

b. La largeur:

$$L(\alpha, n) = b - a = 2 \epsilon_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,325$$

Exercice 3 Tests d'hypothèses

Moyenne

1/ La Formulation des hypothèses:

$H_0: \mu = 10$: Le dispositif n'a pas contribué à la réduction du Tabagisme.
 $H_1: \mu < 10$: Le dispositif a contribué à la réduction des salaires fumeurs au sein de l'États.
(La moyenne des cigarettes consommées = 10)

3

2/ La réalisation du Test:

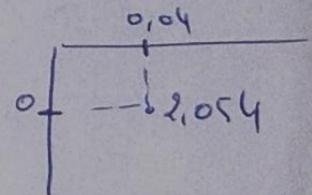
RH0 si et seulement si :

$$\bar{X}_n < \mu_0 - z_{2\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$n > 30$
Poi normale

$$z_{2\alpha} = z_{2 \cdot 0,02} = z_{0,04}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } w^* &= \mu_0 - z_{2\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \\ &= 10 - 2,054 \frac{16}{\sqrt{100}} \\ &= 6,7136 \end{aligned}$$



et on a $\bar{X} = 7$.

Ali YAKHLEF

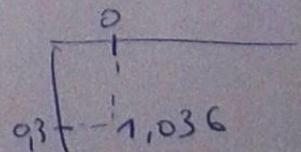
on a $\bar{X} > w^*$ alors on va accepter H_0 .

conclusion:

Cela signifie que le dispositif n'a pas contribué à la réduction du Tabagisme avec un risque de 1^{ère} espèce de 2%.

3/ même question avec un risque de 15%.

$$\alpha = 15\% \Rightarrow 2\alpha = 30\% \quad z_{0,3} = 1,036$$



$$w^* = 10 - 1,036 \cdot \frac{16}{10} = 8,3424$$

$$\bar{X} = 7$$

on a $7 < 8,3424$
donc on rejette H_0

Cela signifie que le dispositif contribue à la réduction du Tabagisme avec un risque d'erreur de 15%.

4/ Le degré de signification: α^*

4

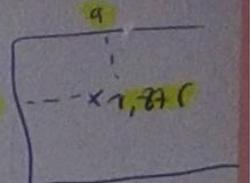
$$\text{on a } \bar{X} = \mu_0 - \sum_{2\alpha^*} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$-\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right) = \sum_{2\alpha^*} \text{ donc } \sum_{2\alpha} = 1,871$$

$$2\alpha^* = a + b$$

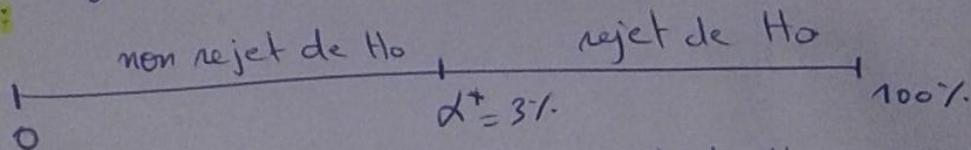
$$= 6\%$$

$$\text{alors } \alpha^* = 3\%$$



donc le degré de signification = 3%.

interprétation:



* donc de 0 à 3 il y a 3% de non rejet de H_0 . mais après α^* c'est la zone de rejet de H_0 .

$\Rightarrow \alpha^*$ est le lien entre le R H_0 et le non rejet de H_0 , c'est la valeur entière.

5/ l'intervalle de confiance:

on $n = 100 > 30$

$$I = \left[\bar{X} - \sum_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + \sum_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left[7 - 2,326 \cdot \frac{16}{\sqrt{100}} ; \bar{X} + 2,326 \cdot \frac{16}{\sqrt{100}} \right]$$

$$= [3,2784 ; 10,7216]$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} &= \sum_{2\%} \\ &= \sum_{0,02} \\ &= 2,326 \end{aligned}$$

commentaire standard. voir le cours.

Ali YAKHLEF

6/ on déduit donc que la moyenne des cigarettes fumées se trouve dans l'intervalle avec un risque d'erreur de 2%, et $\bar{x} = 7 \in$ à cette intervalle donc on accorde avec notre règle de décision qu'on a le non-rejet de H_0 .

7/ a - fréquence observée : $P \text{ ou } p = 0,6$.

conditions, on a:

$$\begin{cases} n = 100 \geq 30 \\ n \cdot p = 100 \cdot 0,6 > 5 \\ n \cdot (1-p) > 5 \end{cases}$$

5

$$I = \left[p - z_{\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + z_{\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$$= [0,5794 ; 0,6805]$$

$$\alpha = 10\%$$

b - La marge d'erreur.

Ali YAKHLEF

$$\beta = \frac{b-a}{2} = z_{\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Proportion (Echant. Plan)

* EXERCICE 1 (calcul des probabilités)

$$F_m \sim N \left(E(F) = P = 0,5, v(x) = \sqrt{\frac{P \cdot q}{200}} = \sqrt{\frac{0,5(0,5)}{200}} \right)$$

$$a. P(F_g) < 0,4 = P \left(\frac{F_g - P}{\sqrt{\frac{P \cdot q}{n}}} < \frac{0,4 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,25}{200}}} \right)$$

$$= P(Z < -2,85) \Rightarrow P(Z > 2,85) = 1 - P(Z < 2,85)$$

$$\Rightarrow = 1 - \Phi_{2,85}$$

$$= 1 - 0,9978$$

$$= 0,0022.$$

ALI YAKHLEF

$$b. P(0,43 < F_g < 0,55) = P \left(\frac{0,43 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,25}{200}}} < \frac{F_g - P}{\sqrt{\frac{P \cdot q}{n}}} < \frac{0,55 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,25}{200}}} \right)$$

$$= P(-1,9798 < Z < 1,4142)$$

$$= P(Z < 1,4142) - P(Z < -1,9798)$$

$$= P(Z < 1,4142) - [1 - P(Z < 1,9798)]$$

$$= 0,9207 - (1 - 0,9756) = 0,8963$$

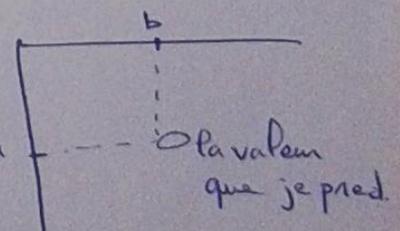
$$c. P(F_g > 0,54) = P \left(\frac{F_g - P}{\sqrt{\frac{P \cdot q}{n}}} > \frac{0,54 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,25}{200}}} \right)$$

$$\Rightarrow P(Z > 1,14) \Rightarrow 1 - P(Z < 1,14)$$

$$= 1 - \Phi_{1,14}$$

$$= 1 - 0,8729$$

$$= 0,1271.$$



EXERCICE 2 (intervalle de confiance)

Proportion

1/ * la population: les chefs d'entreprises
* la variable:

* le paramètre d'intérêt à estimer:

* Estimation ponctuelle:

$$2/ E(F_n) = P = \frac{145}{500} = 0,29 = 29\%$$

* estimation par intervalle de confiance:

$$\text{On a } n = 500 \gg 30, \quad n \cdot p = 500 \cdot 0,29 = 145 > 5$$

$$n \cdot (1-p) = 500(1-0,29) = 355 > 5$$

donc l'intervalle de confiance de cette proportion est:

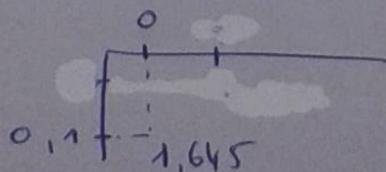
$$I = \left[p - \sum_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \quad p + \sum_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Proportion de l'échantillon

avec

$\sum_{\alpha} \Rightarrow$ niveau de confiance: $1 - \alpha = 90\% \Rightarrow \alpha = 10\%$

ALI YAKHLEF



$$\sum_{\alpha} = 1,645$$

$$I = \left[0,29 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,29(1-0,29)}{500}}; \quad 0,29 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,29(1-0,29)}{500}} \right]$$
$$= \left[0,2566; \quad 0,3233 \right]$$

on se basant sur notre échantillon, on déduit que la proportion de chefs d'entreprise qui sont satisfaits de l'adéquation entre les formations universitaires et l'emploi se trouve dans I avec un niveau de confiance de $1 - \alpha$.

Exercice 3 - Tests d'hypothèses.

Proportion

8

1/ La définition des hypothèses:

$$\begin{cases} H_0: P = P_0 = 0,2 : \text{La minorité est fidèlement représentée.} \\ H_1: P \neq P_0 \neq 0,2 : \text{La minorité n'est pas fidèlement représentée.} \end{cases}$$

2/ La règle de décision (risque de 10%)

rejeter H_0 au profit de H_1 si et seulement si:

$$|F_m - P_0| > z_{\alpha} \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

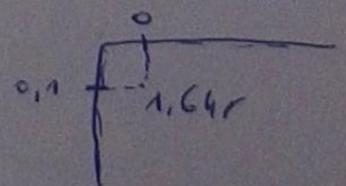
avec $F_m = \frac{30}{200} = 0,15$

$$|F_m - P_0| = |0,15 - 0,2| = 0,05$$

$$\text{et } z_{\alpha}^* = z_{\alpha/2} = 1,645 \sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{200}} = 0,046$$

avec $z_{\alpha} = z_{0,1} = 1,645$

on a $F_m > z_{\alpha}^*$ alors on rejete H_0 , c-à-dire la minorité n'est pas fidèlement représentée.



ALI YAKHLEF

3/ Le degré de signification α^* :

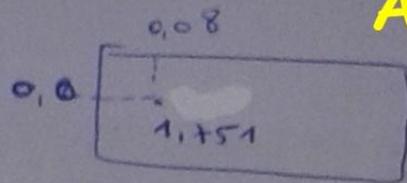
Proportion

$$\text{on a } |F_m - P_0| = \sum \alpha^* \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

$$\sum \alpha^* = \frac{|F_m - P_0|}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0,05}{0,028} = 1,7677$$

9

ALI YAKHLEF



donc $\alpha^* = 0,08 = 8\%$

3/ La marge d'erreur : (rayon) (Precision) (cette)

Proportion

$$me = \frac{b-a}{2} = \sum \alpha \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,0333$$

Sur plus

$$\text{ona } m = \sum \alpha \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\left(\frac{m}{\sum \alpha}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)^2 \Rightarrow \frac{m^2}{\sum \alpha^2} = \frac{p(1-p)}{n} \Rightarrow \frac{\sum \alpha^2}{m^2} = \frac{n}{p(1-p)}$$

$$\Rightarrow m = \frac{\sum \alpha^2 \cdot p(1-p)}{m^2}$$

m en β .

Ali YAKHLEF

$$= \frac{(1,645)^2}{(0,01)^2} \cdot 0,29(1-0,29)$$

$$= 171$$

EXERCICE - Questions de cours -

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon aléatoire simple relatif à la variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres m et $\sigma^2 > 0$.

(a) Donner un estimateur sans biais et efficace de m et un estimateur sans biais et asymptotiquement efficace de σ^2 .

(b) Déterminer la loi de la statistique $T_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2$.

a) l'estimateur sans biais et efficace de m :

$$1/ \quad E(\bar{X}) = m, \quad m \rightarrow \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

✓ \bar{X} est un estimateur sans biais et efficace de m .

Ali Yakhlef

2/ sans biais et asymptotiquement efficace de σ^2 .

$$E(S_n^2) = \underbrace{S_n^2}_{\text{variance corrigée}} \Rightarrow, \quad \sigma^2 \rightarrow S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

✓ S_n^2 est un estimateur sans biais et efficace de σ^2 .

b) La loi de la statistique, $T_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2$

$$\text{On sait que: } Z_i = \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)$$

Z_i constitue une suite de variable aléatoire indépendamment distribués (i.i.d)

$$\text{alors } \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2$$

alors T_n suit la loi de Khi-deux.