JAIFI FATINE

Université Abdelmalek Essaidi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Filières: Sciences d'Economie et Gestion
Année Académique: 2017-2018

Série 2. Déterminant et rang.

Exercice 1.

On considère la matice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

-2 -2

i) Montrer que la matrice B est inversible?

ii) Si B est inversible déterminer l'inverse de B.

iii) Déterminer l'inverse de B par 2 méthodes différentes de la méthode que vous avez utiliser dans la question ii)? Puis Comparer les résultats des 3 méthodes, après donner une conclusion.

Indication pour la question iii) : Pour calculer l'inverse d'une matrice il y a 3 méthodes : 1) Gauss, 2) Changement avec l'identité, 3) $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(Com(A))^t$.

Exercice 2.

On considère la matice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Calculer $A^3 - A$.

ii) Déduire que A est inversible puis déterminer l'inverse de A.
à partir de 1ère question

Exercice 3.

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & a \end{pmatrix}.$$

i) Calculer le rang de la matrice A par la méthode de Gauss.

ii) Calculer le rang de la matrice B suivant la valeur de a.

(~~Suite de Serie (1)~~)

S(~~exercice (5)~~)

Série 2

Algèbre S2

Déterminant et rang

exercice 1 :

1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det B = \left| 1(-2-2) - 2(-1-2) + 1(-2+4) \right|$$

$$= \left| 1(-4) + 6 + 2 \right|$$

$$= \left| -4 + 6 + 2 \right| = 4$$

On a $\det B = 4 \neq 0$ alors B est inversible

2) $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \cdot$ Comatrice B

(i)

$$\mathrm{Com}(B)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}2&-1\\-2&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-1\\-2&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\-2&-2\end{vmatrix}\\[2ex] -\begin{vmatrix}2&1\\-2&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&1\\-2&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\-2&-2\end{vmatrix}\\[2ex] +\begin{vmatrix}2&1\\2&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2-2 & -(-1+2) & -2+4\\ -(-2+2) & -1+2 & -(-2+4)\\ -2-2 & -(-1-1) & 2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3&2\\0&1&-2\\-4&2&0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}\,B=\begin{pmatrix}-4&0&-4\\3&1&2\\2&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } B^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-4&0&-4\\3&1&2\\2&-2&0\end{pmatrix}$$

ex : 2

1

2

$A=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

A^3-A :

$A^2=A\times$

$A^2=$

$A^2=$

$A^3=A$

$A^3=$

A^3-

2

$A($

$A-$

i) Calculer le rang

ii) Calculer le rang de la matrice

JAIFI FATINE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^3 - A$:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+0+2 & 0-0-4 & 2+0+0 \\ 0-0+1 & 0+1-2 & 0-1+0 \\ 1-0+0 & 0+2-0 & 2-2+0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$$

2

$$A^3 - A = 4I_3$$

$$A(A^2 - I) = 4I$$

$$A \cdot \frac{1}{4} \cdot (A^2 - I) = I$$

et on a : $AA^{-1} = I$

~~ett~~ alors que : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot (A^2 - I)}$

le rang de la matrice ...

JRIFI FATINE

...ité Abdelmalek Essaâdi
...Polydisciplinaire de Tétouan
...Sciences d'Econ...
...Académique: 20...

Exercice 3

1)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\2&1&1&1&1\\1&1&1&2&1\\2&1&1&1&1\\1&1&1&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_2\to L_2-2L_1\\L_3\to L_3-L_1\\L_4\to L_4-2L_1\\L_5\to L_5-L_1\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\0&-1&-3&-1&-1\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$L_4\to L_4-L_2$

$L_5\to L_5-L_3$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\0&-1&-3&-1&-1\\0&0&-1&-1&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\end{matrix}$$

$$rg(A)=4$$

2)

$$B=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&a\end{pmatrix}\begin{matrix}L_2\to L_2-\frac{1}{2}L_1\\\cancel{\frac{1}{2}\times L_1-L_2}\\L_3\to L_3-\frac{1}{3}L_1\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\0&+\frac{1}{12}&+\frac{1}{12}\\0&+\frac{1}{12}&a-\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$L_3\to L_3-L_2$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\0&+\frac{1}{12}&+\frac{1}{12}\\0&0&a-\frac{7}{36}\end{pmatrix}$$

+ Si $a\neq\frac{7}{36}\Rightarrow\boxed{rg(B)=3}$

+ Si 〃 = 〃 → 〃 = 2

de gauss

le rang de A.