Ma

Maths 2013/2014

Pr: IAICH

Par: Omario Zirari

Distrubié Par: Khalid Alfidi

Chapitre II :

I. Rappel :

→ Définition 1.1 injection :

Une app : $f : E \to F$ est dite injective ou est une injection si pour tout y dans l'ensemble d'arrivée F il existe au plus un élement x dans l'ensemble de définition E tel que :
$f(x) = y$ on dit encoure dans ce cas que toute éléments y de F admet au plus un intécédent x.

Remarque :

Définition 1.2 · Surjection :

une app $f : E \to F$ est dite surjective ou est une surjection si tout élement de l'ensemble d'arrivée a au moins un intécédent, c-à-d est image d'au moins un élement de l'ensemble de départ.

Remarque :

De maniere équivalente, f est dite surjective.
Si $\forall y \in F \cdot \ \exists x \in E \ / \ f(x) = y$.

Exp 2.1

f est surjective si son ensemble image est égal a son ensemble d'arrivée :

$$f : E \longrightarrow T$$

Exemple et contre expmple:

La fonction définie par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longrightarrow x^2$

n'est pas surjective car certains réels ne possedent pas d'antécedant : par exemple il n'ya pas de réel x tel que $f(x) = -9$ moins si on change la définition de f en donnent comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^+$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \longrightarrow x^2$$

alors elle devient car chaque réel positif y possede au moins un antécedant.

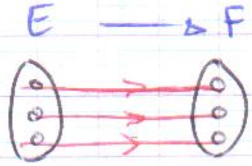
Remarque : une app qui est à la fois surjective et injective elle est bijective.

Définition 1.3 bijection

soit f une application de E dans F est bijective si et seulement si tout element de l'ensemble d'arrivée.

F a exactement un antécedant.

$$f : E \longrightarrow F$$



Définition : une fonction $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une fonction $g : F \to F$ tq $g \circ f$ soit l'application identite sur E est $f \circ g$ soit l'app identite sur F.

Définition:
Soit f une app de $E \to F$
pour tout app g de F dans G.
① si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
② si f et g sont ~ ~ $g \circ f$ est ~
③ si g est injective et $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective.

II - Calcul matriciel:

① Dans tout ce qui suit K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Définition et propriétés:
On appelle matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ la donnée:
a- d'un nombre p de colonnes.
b- d'un nombre n de lignes.
c- d'un ensemble de np coefficient de K rangées dans un tableau de n lignes et p colonnes.

Exp:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{np} \end{pmatrix}$$

$(1,1)$ est appelé matrice. les nombres a_{ij} sont appelés coefficient de la matrice.
. les lignes horizontales sont appelés rangées ou vecteur rangées.
. et les lignes verticales sont appelés des colonnes ou des vecteurs colonnes de la matrice. une matrice a n rangées et p colonnes est appelée matrice de type $(n.p)$ on note alors $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ on dit que la matrice est taille $n \times p$ (lire n croix p).

Exp: $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exp: $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}} = (i + 2j) = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+4 \\ 2+2 & 2+4 \\ 3+2 & 3+4 \end{pmatrix}$

$(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}} = (-i+j) = \begin{pmatrix} -1+1 & -1+2 \\ -2+1 & -2+2 \\ -3+1 & -3+3 \end{pmatrix}$

Notation on note $M_{n.p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n\times p$ à coefficient dans $\mathbb{R}$.

II- Matrices particulières:

1- Matrice nulle:

c'est la matrice non nécessairement carrée dont tous les coefficients sont nuls, on la note $O_{n.p}$ ou O_{np} si elle a n lignes et p colonnes.

Exp: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

2- Matrices lignes:

une matrice $(a_1 \cdots a_n)$ ayant une seule rangée est appelée matrice uniligne.

3- Matrices colonnes:

une matice $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ayant une seule colonne est appelé matrice unicolonne.

4- Matrices carées:

une matrice ayant le m̂ nombre de rangées et de colonnes est appelées matrice carée, et le nombre de rangées est appelée son ordre.

Exp: $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 2}} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre 2

Notation: on note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$

5- Matrices triangulaires inférieures:

Ce sont des matrices carées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale sont nuls.

c-à-d L'indices ij avec $j>i$ sont nuls.

Exp: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

6- Matrices triangulaires supérieures:

Ce sont les matrices carrés dont tous les coefficients strictement au dessous de la diagonale sont nuls.

c-à-d L'indices ij avec $j<i$ sont nuls.

Exp: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

7- Matrices diagonales:

Ce sont des matrices carrés a la fois triangulaires sup et inf le donc ceux de la diagonale.

Exp $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on note :

8- Matrices scalaires:

Ce sont des matrices diagonales dont les coefficients diagonnaux sont égaux:

$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

9- Matrices identité

c'est la matrice scalaire dont tous les coefficients diagonaux valent 1 on note I_n la matrice identité d'ordre n.

Exp

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10- Égalité des matrices :

Deux matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) sont égales si et seulement si elles ont m̂ nombre de rangées le m̂ nombre de colonnes et les éléments correspondants sont égaux : c-à-d : $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

Exp.

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 \\ 3 & 8-9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \\ 1-1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III - Opérations sur les matrices :

1- L'addition :

La somme de deux matrices de type $(n.p)$. (a_{ij}) et (b_{ij}) est la matrice (C_{ij}) de type $(n.p)$ ayant pour éléments $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour $i = 1 \dots n$ et $j = 1 \dots n$

Exp ①: si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exp ②

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} i + \cos\frac{\pi}{3} & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

proposition :

Si A, B et C sont trois matrices de $M_{n.p}(\mathbb{R})$

- L'addition est associative : $(A+B)+C = A+(B+C)$
- La matrice nulle à n lignes et p colonnes est un élément neutre pour l'addition $A + 0 = A$
- tout matrice admet un symetrique : en posant

$$-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{on a} \quad A + (-A) = 0$$

- L'addition est commutative : $A+B = B+A$

Rq : $A - B = A + (-B)$

2- Produit d'une matrice par élément dans $\mathbb{K}$.

soit A une matrice de $M_{np}(K)$ et $N \in K$, on appelle produit (externe) de N par A et on note NA la matrice dont chaque coefficient est obtenu en multipliant le coefficient de m̂ position de A par N :

Théorème :

soit λ, μ des élements de k. A et B deux matrices de $M_{n.p}(k)$, Alors :

① $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

② $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

③ $(\lambda\mu) A = \lambda(\mu A)$

④ $1 \cdot A = A$

Rq :

Le choix dans 2 de $\lambda = \mu = 0$, mq $0.A = 0$

le choix de $\lambda = -\mu = 1$ mq ds ③ $(-1).A = -A$.

3- Multiplication des matrices :

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type $(m.n)$ et $B = (b.l)$ une matrice de type $(r.p)$ alors le produit AB (dans cet ordre) n'est défini que si $n = r$

et la matrice $C = (C_{il})$ de type $(m.p)$ dont les élements : $C_{il} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}\, b_{jl}$

Exp 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} (3\times1)+(0\times0)+(2\times0) & 3 & 2 \\ (1\times1)+(1\times0)+(0\times0) & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exp 2 :

$$A = \begin{pmatrix} i & \cos\frac{\pi}{4} & 1 \\ 1 & 2 & -i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} (i\times1)+(\cos\frac{\pi}{4}\times0)+(1\times0) & (2\times i)+(\cos\frac{\pi}{4}\times1)+(1\times2) & (i\times3)+\cos\frac{\pi}{4}\times0+2\times1 \\ (1\times1)+(2\times0)+ -i\times0 & (2\times1)+(1\times2)+(-i)\times2 & (3\times1)+(2\times0)+(-i)\times2 \\ (0\times1)+(1\times0)+(2\times0) & (0\times2)+(1\times1)+(2\times2) & (0\times3)+(1\times0)+(2\times2) \end{pmatrix}$$

Exp 3 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} (2\times 1) + (1\times 0) + (2\times 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

proposition :

le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes :

① $\lambda(AB) = (\lambda A)B$

② $A(BC) = (AB)C$

③ $(A+B)C = AC + BC$

④ $C(A+B) = CA + CB$

Rq :

1) La multiplication matricielle n'est pas en général commutative, c-à-d $AB \neq BA$

2) La simplification n'est pas vraie en général c-à-d $AB = 0$ ~~n'est~~ n'entraîne pas nécessairement $A = 0$ ou $B = 0$

Exp 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$

Exp 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \neq 0$ $B \neq 0$ $AB = 0$

4- puissances :

si $k \geq 0$ est un entier et si $A \in M_n(k)$ on définit la puissance k^{e} de A de façon suivante :

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ A^{k-1}A = \underbrace{A \times \cdots\cdots A}_{\text{produit de } k \text{ copies de } A} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Exp : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ A^2 et A^3 et A^4

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = (A^2)^2 = A^3 A$$

proposition:

soit A une matrice carrée, soit k et l sont deux entiers:

① $A^k A^l = A^{k+l}$

② $(A^k)^l = A^{kl}$

③ $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k \quad (\lambda \in k)$

Rq:

si $A = \text{Diag}(a_1 \cdots a_n)$ est matrice diagonale, alors A^k est la matrice diagonale obtenue en élément à la puissance k, les coefficient diagonaux de A. c-àd

$$A^k = \text{Diag}(a_1^k \dots a_n^k)$$

~~prop~~ Formule de binôme:

Soit A et B deux matrices carrés telles que $AB = BA$ et $n \geq 0$ n entier.

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k$$

Exp1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (A+I)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k A^{3-k} I^k$

$$(A+I)^3 = C_3^0 A^3 I^0 + C_3^1 A^{3-1} I^1 + C_3^2 A^{3-2} I^2 + C_3^3 A^{3-3} I^3$$

$$= C_3^0 A^3 + C_3^1 A^2 I + C_3^2 A I^2$$

$$= A^3 + 3A^2 + 3AI^2 + I^3$$

$$= A^3 + 3A^2 + 3A + I$$

$$\left(C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\, k!} \right)$$

Exp2:

considerons les matrices $A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Elle ne commuttent pas car $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $BA \neq AB$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5- Inverse d'une matrice carrée :

Définition:

une matrice carrée est dite inversible si elle admet un inverse à droite et à gauche. cet inverse est Alors unique. On note A^{-1} l'inverse de la matrice inversible A si $A \in M_n(K)$ on a :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

proposition: soit A une matrice inversible et $\lambda \in K^*$

① La matrice A^{-1} est inversible d'inverse A.

② La matrice λA est " " $\frac{1}{\lambda} A^{-1}$

$$((\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

exp :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

verifie que $AB = BA = I \Rightarrow B$ est l'inverse de A

Rqs:

① La matrice nulle n'est pas inversible M

② La matrice diagonale $Diag(a_1 \dots a_n)$ est inversible d'inverse $diag(a_1^{-1} \dots a_n^{-1}$ si $a_n \dots a_n$ sont non nul.

Théorème:

Req: $I_n \times I_n^{-1} = \frac{I_n}{I_n} = I_n = I_n^{-1}$

théorème:

Si une matrice carée admet un inverse à gauche alors elle admet un invers à droite. elle est donc inversible.

Exp:

Soient A et $B \in M_n(k)$ telles que $AB = A + B$

Mr que A et B commutent (ie) Mr que $AB = BA$

Ex:

considerons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, cherchons si A admet un inverse supposons que A admet un inverse B: on pose $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c = 1 & (1) \\ a-c = 0 & (2) \\ b+d = 0 & (3) \\ b-d = 1 & (4) \end{cases}$$

on a $(1)+(2) \Rightarrow a+c+a-c = 1$

$\Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2$

on a $(3)+(4) \Rightarrow b+d+b-d = 1$

$\Rightarrow b = 1/2$

$(2)\ a = c = \frac{1}{2}$ et $(3)\ b = -d = -\frac{1}{2}$

donc $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$AB = BA = I_2$

Proposition:

Si A et B sont deux matrices carrées telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $A \times B = 0$, Alors A et B ne sont pas inversible.

Preuve: Supposons par l'absurde que A ou B sont inversible par exemple. A inversible

$$A \times B = 0 \Rightarrow A^{-1} \times (A \times B) = A^{-1} \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow (A^{-1} \times A)B = 0$$

$$I \cdot B = 0 \Rightarrow B = 0$$

Donc A et B ne sont pas inversible.

Exercice : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

① calculer A^2 et A^3

② Mr que pour tout entier ~~n~~ naturel n. A^n s'écrit sous la forme $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ecrire les relations de récurrence vérifies par a_n et b_n, en déduire A^n pour tout n.

③ Soit la matrice $B = A - I_3$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire un autre mode de Calcule de A^n

6. Transposée d'une matrice :

Def :

si les lignes et les colonnes d'une matrice sont échangées. La matrice obtenue est appelée Transposée de la matrice d'origine, la matrice de A est noté ${}^tA$.

Rq : Si $A = (a_{ij})$ Alors ${}^tA = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$

exp :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ Alors } {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ Alors } {}^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Alors } {}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t({}^tC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Proposition :

Soit A et B ~~deux~~ matrice et $\lambda \in K$ Alors.

① ${}^t({}^tA) = A$

② ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$ $\Big\}$ $A \in M_{(n,p)}(K)$

③ ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ $\quad B \in M_{n,p}(K)$

④ ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ $\quad (A \in M_{np}(K)\ B \in M_{pq}(K))$

Proposition :

Si A est une matrice carrée inversible, Alors sa transposée est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$

donc on a ${}^tA \times {}^tA^{-1} = {}^t(A^{-1} \times A) = {}^tI = I$

7 - Matrice Symétrique :

Def :

une matrice $\in M_n(K)$ est dite symétrique si tout les éléments de A sont symétriques par rapport à la diagonale : A sym $\iff a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j = 1 \dots n$

En d'autres termes : A sym $\iff {}^tA = A$

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Def :

une matrice $A = (a_{ij})$ est dite Antisymétrique si ${}^tA = -A$

Exp :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on a } {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = -B$$

$$\Rightarrow {}^tB = -B$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & d \\ -c & -d & 0 \end{pmatrix} \text{ on a } {}^tC = \begin{pmatrix} 0 & -a & -c \\ a & 0 & -d \\ c & d & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & d \\ -c & -d & 0 \end{pmatrix} = -C$$

$$\Rightarrow {}^tC = -C$$

* Trace d'une matrice carrée :

on appelle trace d'une matrice carrée $A \in M_n(K)$ la Σ des élements de la diagonale principal et on la not $t_r(A)$ c'est à dire que $t_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Exp :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & \lambda & -1 \\ 4 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \qquad t_r(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 0 + \lambda - 2\lambda = -\lambda$$

$$B = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = t_r(B) = \pi + \cos\frac{\pi}{4}$$

Propriété :

Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée et t_A sa transposée. Alors $t_r(A) = t_r(t_A)$

Exp :

$B = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ $t_B = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ alors $t_r(B) = \pi + \frac{\cos\pi}{4}$
$= t_r(t_B)$

Req :

→ ① si $n \geq 2$, le produit de deux M. symétriques peut ne pas être symétrique. En effet :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

→ ② Si A et B est sym : A.B sym = AB = BA

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $AB = BA$

→ ③ Cependant soient $A, B \in M_n(K)$ tq A, B commutent.

i.e qui vérifient $AB = BA$

Si A et B sont sym ou Antisym, Alors AB est sym ou Anti. suivant une règle des signes car $t_A = \pm A$ et $t_B = \pm B$ on a

$t(AB) = t_B \cdot t_A = \pm BA = \pm AB$

8 - Matrices élementires :

✓ Opérations élementaires sur une matrice :

Soit A une matrice, on appelle opération élementaire sur A l'une des transformat° suivantes :

① Ajouter à une ligne (resp à une colonne) de A une autre ligne (resp colonne) multipliée par un scalaire $(R_j \leftarrow R_j + kR_i)$

② Multiplier une ligne (resp une colonne) de A par un scalaire non nul $(R_i \leftarrow kR_i)$

③ Permeter les lignes (resp les colonnes) de A
($R_i \leftrightarrow R_j$)

<u>exp:</u> considérons la matrice unité d'ordre 3.

$$E\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I_3$$

① permeter les lignes L_2 et $L_3 \Rightarrow E_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

② remplacer ~~les~~ la ligne L_2 par $-6L_2 \Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-6&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

③ ~ ligne L_3 par $-4L_1+L_3 \Rightarrow E_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\6&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}$

Théorème:

Soit A une matrice carrée Alors A est inversible si et seulement si A est une produit de matrices élementaires.

Exp: Technique de Gauss-Jordan

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$

$$A \times I_3 \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}}^{A} \Bigg/\!\!\Bigg/ \overbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}^{I_3} \xrightarrow[L_3-4L_1]{L_2-2L_1} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix} \Bigg/\!\!\Bigg/ \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3+L_2} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix} \Bigg/\!\!\Bigg/ \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-6&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_2-L_3]{L_2+2L_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix} \Bigg/\!\!\Bigg/ \begin{pmatrix}-11&2&2\\4&0&-1\\-6&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-L_3]{-L_2} \overbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}^{I_3} \Bigg/\!\!\Bigg/ \overbrace{\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}}^{A^{-1}}$$

d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$

Exercice: soit $A = \begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}$

① Mr que $A^2-5A+6I_2 = 0$

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$ trouver le reste de la division euclidienne de x^3 par $(x-2)(x-3)$

③ déduire A^3 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$