

Clacul des Probabilités

1. Experiences aléatoire et événements

Définition d'une expérience:

Un expérience est une action qui se réalise avec l'intention de recueillir certaines observations sur les resultats.

1.1 Expérience aléatoire

Définition

On dit qu' une expérience est aléatoire si les résultats obtenus sont imprédictibles. Ça veut dire que même si on répète l'expérience sous les mêmes conditions le resultat peut changer(il sagit d' un phénomène aléatoire)

Calcul des Probabilités

Exemples:

- le prix d' une action sur un marche financier
- le taux d' intérêt dans le secteurs bancaire
- Résultat du lancement d' un dé ou d' une pièce de monnaie
- Taux d' interêt dans les secteurs bancaires.
-etc

Calcul des Probabilités

- **Définition d' un événement**

Un événement est une réalisation d' un résultat possibles.

Exemples:

- Amener face en lançant une piece de monnaie
- Obtenir 5 en lançant un dé

- **Définition d' un Univers (Espace d'échantillonnage)**

L' ensemble de tous les événements possibles s'appelle Univers (ou espace d' échantillonnage):

Notation Conventionnelle: Ω

Calcul des Probabilités

- **Eventualité**

Un élément de l'univers Ω s'appelle une eventualité

- **Événement élémentaire**

Un événement avec une seule eventualité s'appelle événement élémentaires.

Remarque:

Un événement est une partie de l'Univers Ω :

$$\text{événement} \subseteq \Omega$$

Calcul des Probabilité

- **Exemple**

On considère l'expérience aléatoire "lancement d'un dé". Il vient que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- L'événement que mène un nombre (numéro) pair est $A = \{2, 4, 6\}$
- L'événement "obtenir la face 1" est $E = \{1\}$.
E est un événement élémentaire.
- Les résultats 1, 2, ..., 6 sont des éventualités

Calcul des Probabilités

- **Remarque (importante)**

Un événement “A” quelconque est réalisé si une de ses eventualités est réalisé.

Dans l'exemple anterieur on a

$$A=\{1,3,5\}$$

$$=EUCUD$$

Ou on a

$E=\{1\}$; événement élémentaire que mène “1”

$C=\{3\}$; événement élémentaire que mène “3”

$D=\{5\}$; événement élémentaire que mène “5”

Calcul des Probabilités

Question

*Dans l'expérience du dé quel est
l'événement qui mène un numéro
pair?*

Calcul des Probabilités

Réponse

- L' événement qui mène un nombre (numéro)

Pair est l'événement contraire à $A = \{1, 3, 5\}$. Il est noté par

$$\bar{A} = \{2, 4, 6\}$$

- Les événements élémentaires qui entraînent à cet événement sont

$\{2\}$ ou $\{4\}$ ou $\{6\}$... \iff Similitude ensembliste:

$$\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$$

Calcul des Probabilité

“A et B deux événements possible de Ω ”

Langage Probabiliste

- Événement certain: Ω
- Événement impossible: \emptyset
- Événement contraire: \bar{A}
- Événement A ou B
- Événement A et B
- Événements incompatibles
- L'événement A entraîne B

Langage ensembliste

- Ensemble universel: Ω
- Ensemble vide: \emptyset
- Complémentaire de A
 $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \cap B = \emptyset$
- $A \subset B$

Calcul des Probabilités

Remarque

Qu'ont en réalise un expériment (expérience) chaque événement a un degre de possibilité de réalisation. La mesure de degre de possibilité s'appelle Probabilité de réalisation (chance de réalisation)

Calcul des Probabilités

- Définition axiomatique d' une probabilité

Soit

$$P(\Omega) = \{ \text{événements de l'univers} \}$$
$$= \{ A \subset \Omega \}$$

- La probabilité “ $p(\cdot)$ ” est une fonction défini en $P(\Omega)$ A valeurs dans l' interval $[0,1]$ tel que
- $p(\Omega)=1$
- $p(\emptyset)=0$
- $p(A \cup B)=p(A) + p(B)$ pour toutes événements A et B incompatibles: $A \cap B = \emptyset$

Calcul des Probabilités

Noter bien

- $(\Omega, P(\Omega), p)$ s'appelle espace probabilisé
- $P(A)$ est la probabilité de l'événement A

Formule d'équiprobabilité

Lorsque les événements élémentaires ont la même possibilité (même chance) de réalisation la probabilité d'un événement A est défini par:

$$p(A) = \frac{\text{Nb de cas favorables}}{\text{Nb de cas possibles}}$$

Calcul des Probabilités

Contre exemple

*Si on considère le prix d' une action
cotée en bourse, l'équiprobabilité
n'est pas vérifiée*

Calcul des Probabilités

- Propriétés fondamentales

Soient A et B deux éléments d'un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), p)$ (ca veut dire deux événements quelconques). On a les propriétés suivantes:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$$

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

Calcul des Probabilités

Exemple

- Soit l'expérience "lancer deux fois une pièce de monnaie"
 1. Déterminer l'ensemble univers (espace d'échantillonnage)
 2. Quel est l'événement qui mène face en 2^o lancement (noter A)?
 3. Quel est l'événement qui mène face en 1^o lancement (noter B)
 4. Déterminer l'événement A ou B
 5. Déterminer l'événement A et B
 6. Calculer la probabilité de A et de B
 7. Calculer la probabilité de A ou B
 8. Calculer la probabilité de contraire de A

Calcul des Probabilités

Exercice

- *Une enquête effectuée auprès de 400 placements en portefeuille de devises auprès de la bourse de Casablanca, a montré que 160 investissement en \$; 240 investissement en € et 90 investissement dans les deux devises.*
 1. *Quelle est la probabilité qu' un investisseur investit au moins dans une devise?*
 2. *Quelle est la probabilité qu'il détient un portefeuille uniquement en €?*

Calcul des Probabilités

- Probabilités Conditionnelles

Définition:

Soit $(\Omega; P(\Omega), p)$ une espace probabilisé, et soit $A \in P(\Omega)$ telque $p(A) \neq 0$; et $B \in P(\Omega)$

On appelle probabilité conditionnelle de l'événement B par rapport à A ;

la quantité définie par:

$$p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

On lit " probabilité de B sachant A "

Calcul des Probabilités

Exercice

- Soit $A \in P(\Omega)$, montrer que l'application défini par:

$$p_A : P(\Omega) \rightarrow [0,1]$$
$$B \rightarrow p(B / A)$$

est une probabilité

Formule des probabilités totales

Formule de Bayes

Calcul des Probabilités

- Définition d'une partition

On dit qu'une famille des événements $(B_i)_i$ de Ω est une partition si

- Ils sont incompatibles deux à deux

et on a
$$B_i \cap B_j = \emptyset; i \neq j$$

- $$\bigcup_i B_i = \Omega$$

Calcul des Probabilités

- Formule des Probabilités totales

soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé, et $(B_i)_i$
une partition de Ω

Il vient alors

$$p(A) = \sum_i p(A / B_i) \cdot p(B_i)$$

- Formule de Bayes (comme conséquences)

$$p(B_i / A) = \frac{p(B_i) p(A / B_i)}{\sum_j p(A / B_j) p(B_j)}$$

Formule des Probabilités totales et Formule de Bayes

- Noter bien

Ces deux formules seront utiles dans les circonstances suivantes:

1. L'expérience peut être séparée en deux étapes
 2. il est facile de donner une partition de tout l'espace à travers des événements B_1, B_2, \dots, B_n qui correspondent aux résultats de la 1^{re} étape.
 3. On connaît déjà (ou bien on peut calculer facilement) les probabilités $p(B_1), p(B_2), \dots, p(B_n)$.
 4. On connaît déjà (ou bien on peut calculer facilement) les probabilités $p(A/B_1), p(A/B_2), \dots, p(A/B_n)$ où A est un événement qui correspond à des résultats de la 2^{de} étape.
- Quand ces circonstances se présentent, le théorème des probabilités totales sera utile pour calculer $p(A)$ et le théorème de Bayes sera très convenable pour calculer $p(B_j/A)$, $j=1,2,\dots,n$

Formule des Probabilités totales et Formule de Bayes

- Exemple:

On dispose de 3 pièces de monnaie; la 1^o est parfaitement équilibrée, la 2^o a deux côtés piles et la 3^o est truqué de façon que la probabilité d'obtenir <<pile>> est "1/4".

On tire une pièce au hasard, on la lance

1. Quelle est la probabilité de mener <<pile>>?
2. Si on obtient <<pile>>, quelle est la probabilité d' avoir lancé la 2^o pièce?

Calcul des Probabilités

Événements indépendants

- Définition

On dit que deux événement A, B de $P(\Omega)$ sont indépendants si:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

- Remarque

si $p(B) \neq 0$ et $p(A) \neq 0$

sont indépendants si et seulement si (ssi)

$$p(A/B) = p(A)$$

et

$$p(B/A) = p(B)$$

Calcul des Probabilités

Evénements indépendants

- On dit que la réalisation de l'événement A ne dépend pas de celle de l'événement de B et réciproquement

Incompatibles ``vs'' indépendants

Propriété.1

Deux événements incompatibles ne sont pas indépendants

Calcul des Probabilités

Evénements indépendants

- Exemple

Considerons des familles avec 3 enfants et intéressons-nous au sexe des enfants. On suppose que chacune des possibilités a la même probabilité "1/8".

Soit, A l'événement << famille a des enfants des 2 sexes >>

B l'événement << famille a au plus une fille >>

1. Calculer les probabilités de A et de B
2. Calculer la probabilité de A et B
3. Faisons la même chose avec des familles de 4 enfants(Devoir)

Calcul des Probabilités

Evénement indépendants

- Propriété 2.

A et B sont indépendants ssi

- \bar{A} et B sont indépendants
- A et \bar{B} sont indépendants
- \bar{A} et \bar{B} sont indépendants

Calcul des Probabilités

Événement indépendants

- Lemme

Deux événements disjoints (incompatibles) avec probabilités non nulles tels qu'ils sont différents de l'ensemble Ω , ne sont pas indépendants.

Conception de base d'une variable aléatoire

1. Introduction

En relation avec la conception de probabilité, il ya la conception de variable aléatoire.

Cette variable aléatoire représente les valeurs (résultats) q'on peut observé dans les phénomènes aléatoire, et qui dependent du hazard; sur les quelles on peut établir une mesure de probabilité.

Variables aléatoires discrètes

- Définition:

Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé; une variable aléatoire X est une réalisation d'une épreuve

Exprimée à partir de quantités mesurables d'une façon incertaine.

Autrement dit, X est l'application numérique:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$$

Variables aléatoires discrètes

On dit que la variable X est discrète lorsque ses différentes valeurs possibles sont en nombre fini \mathcal{X}_i (ou infini dénombrable):

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{ x \in \mathbb{R} / \exists \omega \in \Omega, X(\omega) = x \} \\ &= \{ \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_i, \dots \} \end{aligned}$$

Exemple

On jette un dé équilibré à six faces, et on observe les résultats. Si le résultat de l'expérience est i ($i=1,2,3,4,5$), on veut remboursé i DH. Par contre si le résultat de l'expérience est 6, on veut réclamé 9DH. La variable gain (soit brute soit net) est une variable discrète

Variable aléatoire discrète

2. Loi de probabilité

Définition:

On appelle loi (ou distribution) de probabilité d'une variable aléatoire X toute fonction qui fait associer à chacune des valeurs possibles de X la probabilité qui lui correspond.

Si on pose: $p_i = P[X(\omega_i) = x_i]$

alors l'ensemble des couples $(x_i, p_i), i = 1, \dots, n$
constitue la loi de probabilité de X

Variables aléatoire discrète

On écrit

$$p_i = P(X = x_i)$$

. On peut vérifier facilement que

$$\sum p_i = 1$$

La représentation graphique de cette v.a est donné
par le diagramme en bâtons.

Exemple:

Considérer le cas de l'expérience aléatoire

<<le jet simultané de deux dés>>

Variable aléatoire discrète

- Exercice:

Une enquête a montré que 5% des actions au sein de la bourse au Casablanca ont chuté de prix.

Supposons qu' on prélève au hasard du marché deux actions.

On désigne par X la variable aléatoire qui détermine le nombre des actions dont le prix est la baisse.

Représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X sachant que les prix de deux actions quelconques sont indépendants

Variable aléatoire discrète

Caractéristiques des lois de probabilité

3. Fonction de répartition

Définition:

On appelle fonction de répartition de la v.a discrète X , l'application F définie par:

$$F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \mapsto F(x) = p[X \leq x]$$

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

Exemple:

En finance, la fonction de répartition est utilisée pour définir la mesure du risque populaire, appelé "valeur en risque-VaR". Les banques doivent avoir un capital suffisant pour enfreindre les pertes potentielles en portefeuilles pour évaluer la croissance du capital exigé, le VaR(99%) est souvent utilisé. Elle est défini comme le nombre "x" tel que

$$p(X \geq x) = 1 - F(x) = 0.99$$

Où la variable X indique le retour de portefeuille (l'actif) dans une période donnée du temps.

Variable aléatoire discrète

Caractéristiques des lois de probabilité

- Remarque

On a

$$F(x) = p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_i)$$

où

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_i \leq x$$

Si

$$p[X = x_i] = p_i$$

alors

$$F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_i$$

Variable aléatoire discrète

Caractéristiques des lois de probabilité

- Exemple

On considère un jeu simplifié de loto, avec 10 numéros.

Le jeu consiste à choisir 3 numéros parmi 10. Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre des numéros corrects du Ticket.

1. Définir la loi de probabilité de X
2. Quelle est la probabilité de rater le prix du jeu, en supposant que pour gagner on doit avoir les 3 numéros corrects

Variable aléatoire discrète

Caractéristiques des lois de probabilité

- Propriétés

1. F est une fonction positive croissante:

Si $x_i < x_j \Rightarrow F(x_i) \leq F(x_j)$

2. F est une fonction continue à droite

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

4. $F(x_i)$ est définie sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$

Donc F est une fonction en Escalier

Variable aléatoire discrète

Caractéristiques des lois de probabilité

- Propriétés

5.
$$p[x_i < X \leq x_j] = F(x_j) - F(x_i)$$

6.
$$p(X > x) = 1 - p(X \leq x) = 1 - F(x)$$

Exemple:

“On considère l'expérience de lancement de deux dés”

Variable aléatoire discrète

Espérance mathématique

- Définition:

On appelle l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$, la quantité:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^n p[X = x_i] x_i \end{aligned}$$

Variable aléatoire discrète

Espérance mathématique

- Exemple

Une femme d'affaire à deux possibilités d'investissement: projet A et projet B. S'elle investi en A ella une chance de 20% de perdre 10.000\$, une chance de 70% de conserver son argent et 10% de gagner 200.000\$. Pendant que s'elle investi en projet B, elle aura une chance de 15% de perdre 10.000\$, une chance de 25% pour conserver son argent et une chance de 60% de gagner 50.000\$. En quelle projet doit elle investir?

Variable aléatoire discrète

Espérance mathématique

- Propriété

Si X est une variable aléatoire discrète, alors

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Remarque:

L'espérance mathématique est un opérateur linéaire

Variable aléatoire discrète

Variance mathématique

- Définition:

On appelle variance mathématique d'une variable aléatoire discrète de loi de probabilité

(x_i, p_i) , pour $i = 1, 2, \dots, n$, la quantité noté $V(X)$,

Définie par

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X - E(X)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \\ &= \sigma_x^2 \end{aligned}$$

Variable aléatoire discrète

Variance mathématique

- Remarque

La quantité

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

représente l'écart type de la variable aléatoire discrète .

Propriété

On a

1. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Variable aléatoire discrète

Variance mathématique

2. Si X est une variable aléatoire discrète, alors

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a:

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Donc $V(\cdot)$ est un opérateur quadratique.

Exemple du deux dés

Variable aléatoire

Loi de probabilité à deux dimensions

- Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'ensemble des événements $\Omega \times \Omega$. Si à chacune des valeurs possibles du couple (X, Y)

On associe la probabilité de l'événement correspondant on obtient la loi conjointes des variables aléatoires X et Y ; dite loi de la variable aléatoires à deux dimensions (X, Y) .

Variable aléatoire

Loi de probabilité à deux dimensions

Si $p_{ij} = p[X = x_i; Y = y_j]$

alors

$$\sum_{ij} p_{ij} = \sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

La loi de probabilité marginal de X est donné par

$$(x_i, p_{i.})_{i=1, \dots, n} \quad \text{où} \quad p_{i.} = \sum_{j=1}^n p_{ij}$$

De même la loi de probabilité marginal de Y est

$$\text{donné par } (y_j, p_{.j})_{j=1, \dots, n} \quad \text{où} \quad p_{.j} = \sum_{i=1}^n p_{ij}$$