INSA 2007-2008 **Université Paul Sabatier**

ELEMENTS DE CALCUL STOCHASTIQUE.
APPLICATIONS AUX FINANCES

1 Introduction, but du cours, rappels

Les applications en finance sont, pour ce cours, un peu un prétexte à l'introduction des bases du calcul stochastique. De fait, ainsi que l'indique le plan, elles n'occuperont guère plus que le quart du cours.

Ceci étant, la motivation est la suivante : on suppose que les marchés financiers offrent des actifs dont les prix dépendent du temps et du hasard ; on peut donc les modéliser par des processus stochastiques, prix connus en temps continu. On suppose également que l'espace des états possibles de la nature, Ω, est infini, que l'on obtient continuement l'information sur les marchés et que les échanges peuvent s'opérer à tout instant ("continuous trading"). On est ainsi dans une situation où le modèle ad hoc est indexé par le temps $t, t \in [0, T]$ ou $\mathbb{R}^+$, et l'on est amené à introduire un certain nombre d'outils stochastiques, qui peuvent d'ailleurs modéliser des situations extrèmement diverses, autre qu'en finance.

1.1 Le plan

i) Le processus de Wiener ou mouvement brownien est tel que ses petits accroissements modélisent bien le "bruit", l'alea pur, l'erreur de mesure physique... Le chapitre 2 sert à démontrer l'existence d'un tel processus en le construisant explicitement et l'on démontre quelques unes de ses propriétés les plus utiles.
ii) Le calcul de Itô (chapitre 3) permet d'obtenir par intégration des processus stochastiques plus sophistiqués ; la formule de Itô (chapitre 4) permet de "différentier" une fonction d'un processus stochastique ; et enfin, on peut introduire des équations différentielles stochastiques (chapitre 5).
iii) Le chapitre 6 aborde les changements de probabilité et problèmes de martingales. En effet, on se place en théorie financière en général sous l'hypothèse (ou l'on cherche à vérifier cette hypothèse !) qu'il existe un espace de probabilité où les prix sont tous des martingales, ce qui facilite souvent beaucoup les choses au point de vue mathématique, quant au point de vue financier, cette hypothèse permet d'éviter ce que l'on appelle "opportunité d'arbitrage" (soit gagner de l'argent sur le marché financier sans mise initiale). Donc, on introduit
- le théorème de Girsanov pour savoir changer de probabilité, - les problèmes de martingales qui consistent à trouver une probabilité sous laquelle tous les prix sont de smartingales,

- et le théorème de représentation des martingales, c'est à dire que sous des hypothèses convenables, toute variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable est la valeur en T d'une martingale, ce qui permet d'avoir l'existence d'un portefeuille dit de couverture.....
iv) On utilise enfin (chapitre 7) ces outils pour modéliser des marchés d'actifs financiers, avec le problème de l'évaluation d'un porte-feuille optimal, du moins pour un petit porteur, et celui de la "couverture" d'une option.

1.2 Définitions utiles et rappels

espace de probabilité,
tribu, σ-algèbre,
tribu des boréliens sur R, R^d.
filtration, espace de probabilité filtré.
variable aléatoire,
processus aléatoire.
notion de trajectoire, continue à droite (càd) avec limite à gauche (làg).
processus adapté à une filtration.

1.3 Notions de convergence

Définition 1.1 *Soit $\mathbb{P}_n$ une suite de probabilités sur un espace métrique (E, d) muni de ses boréliens $\mathcal{B}$, et soit $\mathbb{P}$ mesure sur $\mathcal{B}$. On dit que la suite $\mathbb{P}_n$* **converge faiblement** *vers $\mathbb{P}$ si pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E)$, $\mathbb{P}_n(f) \to \mathbb{P}(f)$.*

Définition 1.2 *Soit X_n une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ à valeurs dans un espace métrique $(E, d, \mathcal{B})$. On dit que la suite X_n* **converge en loi** *vers X si la suite de mesures $\mathbb{P}_n X_n^{-1}$ converge faiblement vers $\mathbb{P}X^{-1}$, c'est à dire si pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E)$, $\mathbb{P}_n(f(X_n)) \to \mathbb{P}(f(X))$.*

- convergence dans L^p,
- convergence presque sûre,
- convergence en probabilité.

Proposition 1.3 *La convergence presque sûre entraine la convergence en probabilité.*

Proposition 1.4 *La convergence dans L^p entraine la convergence en probabilité.*

- théorèmes de Lebesgue : convergence monotone, majorée.
- limite sup et limite inf d'ensembles.

Théorème 1.5 *de Fatou : Pour toute suite d'événements* (A_n)

$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n).$$

Théorème 1.6 *de Borel-Cantelli :*

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

Si les événements A_n *sont indépendants et si* $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty,$ *alors* $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$

Définition 1.7 *Une famille de variables aléatoires* $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ *est* **uniformément intégrable** *si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_\alpha \int_{\{|U_\alpha| \geq n\}} |U_\alpha| d\mathbb{P} = 0.$$

Théorème 1.8 *On a les équivalences*

(i) La famille $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ *est uniformément intégrable*

(ii) $\sup_\alpha E[|U_\alpha|] < \infty$ *et* $\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : A \in \mathcal{A}$ *et* $\mathbb{P}(A) \leq \delta \Rightarrow E[|U_\alpha| 1_A] \leq \varepsilon.$

RAPPEL : une suite qui converge presque sûrement et qui forme une famille uniformément intégrable converge aussi dans L^1.

1.4 Espérance conditionnelle

Définition 1.9 *Soit* X *variable aléatoire de l'espace* $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\mathcal{B}$ *un sous tribu de* $\mathcal{A}$. $E_\mathbb{P}(X/\mathcal{B})$ *est l'unique variable aléatoire de* $L^1(\mathcal{B})$ *telle que*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \int_B X d\mathbb{P} = \int_B E_\mathbb{P}(X/\mathcal{B}) d\mathbb{P}.$$

Corollaire 1.10 *Si* $X \in L^2(\mathcal{A}),\ \|X\|_2^2 = \|E_\mathbb{P}(X/\mathcal{B})\|_2^2 + \|X - E_\mathbb{P}(X/\mathcal{B})\|_2^2.$

1.5 Temps d'arrêt

C'est une notion relative à un espace de probabilité filtré.

Définition 1.11 *Une variable aléatoire* $T : (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B})$ *est un* **temps d'arrêt** *si pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$*, l'événement* $\{\omega / T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Exemples :

- une constante est un temps d'arrêt,
- si O est un ouvert de $\mathcal{A}$ et le processus X continu, alors

$$T_O(\omega) = \inf\{t, X_t(\omega) \in O\}$$

est un temps d'arrêt, appelé le temps d'atteinte.

Définition 1.12 *Soit T un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{F}_t$ L'ensemble $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{A}, A \cap \{\omega/T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ est appelée la* **tribu arrêtée** *en T.*

Définition 1.13 *Le processus $X_{.\wedge T}$ s'appelle le "processus arrêté en T" souvent noté X^T.*

1.6 Martingales

(cf. [23] pages 8 à 12 ; [13] pages 11 à 30.)

Définition 1.14 *Soit un processus X réel adapté. C'est une* **martingale** *(resp sur/sous) si*

(i) $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \forall t \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $\forall s \leq t, E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$. *(resp $\leq, \geq$.)*

Lemme 1.15 *Soit X une martingale et φ une fonction convexe telle que pour tout t $\phi(X_t) \in L^1$, alors $\varphi(X)$ est une sous-martingale ; si φ est concave, alors $\varphi(X)$ est une sur-martingale.*

Preuve en exercice.

Définition 1.16 *On dit que la martingale X est* **fermée** *par $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si $X_t = E[Y/\mathcal{F}_t]$.*

Proposition 1.17 *Toute martingale admet une modification càdlàg (cf [23])*

Théorème 1.18 *de convergence des martingales : Soit X une sur (ou sous)-martingale càd telle que $\sup_t E[|X_t|] < \infty$. Alors $\lim_{t\to\infty} X_t$ existe presque sûrement et appartient à $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*
Si X est fermée par Z, elle l'est aussi par $\lim_{t\to\infty} X_t$ notée X_∞ qui vaut $E[Z/\vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t]$.

Corollaire 1.19 *Une surmartingale minorée converge presque sûrement à l'infini.*

Théorème 1.20 *Soit X une martingale càd uniformément intégrable ; alors la limite Y presque sûre de X_t quand t tend vers l'infini existe et appartient à L^1. De plus $X_t = E[Y/\mathcal{F}_t]$.*

Théorème 1.21 *Soit X une martingale. X est uniformément intégrable si et seulement si*

(i)X_t converge presque sûrement vers Y appartenant à L^1 quand t tend vers l'infini et $\{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}^+}\}$ est une martingale.

ou

(ii) X_t converge vers Y dans L^1 quand t tend vers l'infini.

Théorème 1.22 *de Doob : Soit X une sous-martingale càd de variable terminale X_∞ et deux temps d'arrêt S et $T, S \leq T$. Alors :*

$$X_S \leq E[X_T/\mathcal{F}_S]\mathbb{P} - \text{ presque sûrement.}$$

Preuve : pages 19-20 de [13].

Définition 1.23 *Le processus croissant $\langle M \rangle$ est défini au temps t par :*

$$\langle M \rangle_t = \lim_{|\pi| \to 0} proba \sum_{t_i \in \pi} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$$

où π sont les partitions de $[0, t]$.

On verra dans le chapitre suivant que si M est le mouvement brownien B alors $\langle B \rangle_t = t$.

Remarque 1.24 *Les martingales de carré intégrable admettent un crochet.*

Proposition 1.25 *$\langle M \rangle_t$ est l'unique processus continu croissant adapté tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ est une martingale.*

Cette proposition sert le plus souvent de définition au crochet et alors 1.23 en est une conséquence.

Ce qui suit est pour la culture générale, mais hors programme

Définition 1.26 *Soit X et Y deux processus. On dit que X est une* **modification** *de Y si :*

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = 1.$$

On dit que qu'ils sont **indistinguables** *si presque sûrement leurs trajectoires coïncident :*

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t, \forall t \geq 0\} = 1.$$

Remarque 1.27 *La deuxième notion est plus forte que la première.*

Définition 1.28 *On dit qu'un processus X est "progressivement mesurable" pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ si $\forall t \geq 0, \forall A \in \mathcal{B}(R)$:*

$$\{(s,\omega)/0 \leq s \leq t \ ; \ X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t,$$

c'est à dire que l'application sur $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) : (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable.

Proposition 1.29 *(cf [13], 1.12) Si X est un processus mesurable adapté, il admet une modification progressivement mesurable.*

Preuve : voir Meyer 1966, page 68.

Proposition 1.30 *Soit X un processus $\mathcal{F}$-progressivement mesurable et T un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$. Alors*
(i) l'application $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable
(ii) et le processus $t \mapsto X_{t\wedge T}$ est $\mathcal{F}$-adapté.

Preuve : (i) le fait que X est progressivement mesurable dit que pour tout borélien A,

$$\forall t, \ \{(s,\omega), \ 0 \leq s \leq t, \ X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t.$$

Soit alors A et $\{\omega : X_{T(\omega)}(\omega) \in A\} \cap \{\omega : T(\omega \leq t\} = \{\omega : X_{T(\omega)\wedge t}(\omega) \in A\} \cap \{T \leq t\}$.

Comme T est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, le deuxième événement est bien dans $\mathcal{F}_t$, et par hypothèse de mesurabilité progressive, le premier aussi.

(ii) Cette deuxième assertion montre en plus que X^T est lui aussi $\mathcal{F}$-adapté.

Proposition 1.31 *(cf [13], 1.13) Si X est un processus mesurable adapté et admet des trajectoire càd ou càg, il est progressivement mesurable.*

Preuve : On définit

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_{(k+1)t2^{-n}}(\omega), \ s \in]\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n}], \ X_0^{(n)}(\omega) = X_0(\omega) \ ; \ k = 0, \cdots, 2^n - 1.$$

Il est clair que l'application $(s,\omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable. Par continuité à droite, la suite $X_s^{(n)}(\omega)$ converge vers $X_s(\omega)$ pour tout (s,ω) et donc la limite est aussi $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable.

Définition 1.32 *(page 33 [23].) Soit X un processus càdlàg adapté. On dit que c'est une* **martingale locale** *s'il existe une suite de temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini telle que pour tout n le processus arrêté X^{T_n} soit une martingale.*

La technique qui consiste à arrêter un processus en un temps d'arrêt convenable permettra de récupérer des martingales uniformément intégrables donc facilement utilisables. On obtient des résultats vrais pour tout n puis l'on passe à la limite en utilisant les théorèmes de Lebesgue (convergences majorées ou monotones). C'est pourquoi l'on a introduit ces deux outils : temps d'arrêt et martingales locales. L'ensemble de ces dernières sera noté $\mathcal{M}_{loc}$.

Théorème 1.33 *(cf [23], th. 44, page 33) Soit $M \in \mathcal{M}_{loc}$ et T temps d'arrêt tel que M^T est uniformément intégrable.*

(i) $S \leq T \Rightarrow M^S$ uniformément intégrable.

(ii) $\mathcal{M}_{loc}$ est un espace vectoriel réel.

(iii) si M^S et M^T sont uniformément intégrables, alors $M^{S \wedge T}$ est uniformément intégrable.

Notation :

$$M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \ ; \ M^* = \sup_{0 \leq s} |M_s|.$$

Théorème 1.34 *(cf [23], th. 47, page 35) Si $M \in \mathcal{M}_{loc}$ telle que $E[M_t^*] < \infty \forall t$, alors M est une "vraie" martingale.*
Si de plus $E[M^*] < \infty$, alors M est uniformément intégrable.

Preuve :
(i) $\forall s \leq t, |M_s| \leq M_t^*$ élément de L^1. La suite $T_n \wedge t$ est croissante vers t et

$$E[M_{T_n \wedge t}/\mathcal{F}_s] = M_{T_n \wedge s}.$$

On passe à la limite presque sûre dans cette égalité et le théorème de convergence dominée permet de passer à la limite dans L^1.
(ii) M est donc une martingale et M^* est dans L^1. Le théorème de convergence des martingales montre la convergence presque sûre de M_t vers M_∞. Il reste à montrer l'uniforme intégrabilité (se servir de la définition équivalente de l'uniforme intégrabilité).

2 Introduction du processus de Wiener

([13] pages 21-24 ; [23] pages 17-20.)

Historiquement, il s'agit du mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau, observées par Robert BROWN en 1828. Il en résulte une dispersion des micro-particules dans l'eau, on dit aussi une "diffusion" du pollen dans l'eau. De fait, ce mouvement sert actuellement à beaucoup d'autres modélisations de phénomènes dynamiques :

- particules microscopiques en suspension,

- prix d'actions en bourse,

- erreurs de mesures physiques,

- comportement asymptotique de files d'attente,

- tout comportement dynamique avec part aléatoire (équations différentielles stochastiques).

Définition 2.1 *Un* **mouvement brownien** *ou* **processus de Wiener** *est un processus sur un espace filtré* $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *adapté, continu, à valeurs vectorielles tel que :*

(i) $B_0 = 0$, $\mathbb{P}$*-presque sûrement sur* Ω*,*

(ii) $\forall s \leq t, B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $(t-s)I_d$*.*

En conséquence, si l'on a une suite de réels $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, la suite $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_i$ est un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance diagonale, de diagonale $t_i - t_{i-1}$. On dit que B est un **processus à accroissements indépendants**.

Le premier problème que nous allons résoudre est celui de l'existence d'un tel processus. Il y a plusieurs constructions classiques, on présente ici sans entrer dans les détails une construction par trajectoires.

2.1 Existence fondée sur une construction trajectorielle, lemme de Kolmogorov

(Les détails sont hors programme ; pour ceux qui les veulent pour leur culture générale, cf. [13] 2.2 ; [23] pages 17-20.) Très grossièrement, pour avoir une idée mais sans entrer dans les démonstrations longues, délicates et techniques, on procède de la façon suivante. Soit $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d), B(t,\omega) = \omega(t)$ les applications "coordonnées" que l'on appelle **trajectoires**. On munit Ω de la plus petite tribu $\mathcal{A}$ qui rend mesurable $\{B_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ et de la filtration "naturelle" engendrée par le processus B : $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$. Sur

$(\Omega, \mathcal{A})$ on montre qu'il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}^+, B_1, \cdots, B_n$ boréliens de $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}\{\omega/\omega(t_i) \in B_i \quad \forall i = 1, \cdots, n\} =$$
$$\int_{B_1} \cdots \int_{B_n} p(t_1, 0, x_1)p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)dx_1..dx_n,$$

où $p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$.
Il s'agit alors de montrer :

- ceci définit bien une probabilité sur la tribu $\mathcal{A}$,

- sous cette probabilité, le processus $t \mapsto \omega(t)$ est bien un mouvement brownien au sens de la définition initiale.

La suite est hors programme jusqu'à la fin de ce paragraphe 2.1.

De fait, ceci définit une probabilité sur les boréliens d'un autre espace : $\Omega' = \mathcal{A}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ dont Ω n'est malheureusement pas un borélien. Alors, on choisit plutôt $\Omega = \mathcal{A}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ et on utilise le théorème de Kolmogorov (1933) :

Définition 2.2 *Une famille consistante de distribution de dimension finie $(Q_t, t$ n-uple $\mathbb{R}^+)$ est une famille de mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que*

- si $s = \sigma(t), s$ et $t \in (\mathbb{R}^+)^n$ et σ permutation des n premiers entiers, si $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, alors $Q_t(A_1, \cdots, A_n) = Q_s(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(n)}$

- et si $u = (t_1, \cdots, t_{n-1})$, et $t = (t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n), \forall t_n, Q_t(A_1, \cdots, A_{n-1}, \mathbb{R}) = Q_u(A_1, \cdots, A_{n-1})$.

Théorème 2.3 *(cf [13] page 50 : Kolmogorov, 1933) Soit $(Q_t, t \in (\mathbb{R}^+)^n)$ une famille consistante de distribution de dimension finie.*
Alors, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ telle que pour tout $B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$Q_t(B_1, \cdots, B_n) = \mathbb{P}\{\omega/\omega(t_i) \in B_i, i = 1, \cdots, n\}.$$

On applique ce théorème à la famille de mesures

$$Q_t(A_1, \cdots, A_n) = \int_{\Pi_i A_i} p(t_1, 0, x_1) \cdots, p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)dx.$$

Puis on montre l'existence d'une modification continue du processus des applications coordonnées de Ω (Kolmogorov-Centsov, 1956), pour passer à l'existence d'une modification continue du processus canonique :

Théorème 2.4 *(Kolmogorov-Centsov, 1956,cf [13] page 53, [23] page 171) Si X processus aléatoire réel sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifie :*

$$\exists \alpha, \beta, C > 0 : E|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\beta}, \ 0 \leq s, t \leq T,$$

alors X admet une modification continue $\tilde{X}$ qui est localement $\gamma-$Hölder continue :

$$\exists\gamma\in]0,\frac{\beta}{\alpha}[,\exists h \textit{ variable aléatoire } >0,\exists\delta>0\ :$$
$$\mathbb{P}\{\sup_{0<t-s<h;s,t\in[0,T]}|\tilde{X}_t-\tilde{X}_s|\leq\delta|t-s|^\gamma\}=1.$$

Remarquons que ce théorème est vrai aussi pour les champs indexés par $t\in\mathbb{R}^d$.

2.2 Propriétés des trajectoires du mouvement brownien

2.2.1 Processus gaussien

Définition 2.5 *Un processus X est dit* **gaussien** *si $\forall d,\forall(t_1,\cdots,t_d)$ réels positifs, le vecteur $(X_{t_1},\cdots,X_{t_d})$ suit une loi gaussienne. Si la loi de $(X_{t+t_i};i=1,\cdots,d)$ ne dépend pas de t, on dit que le processus est* **stationnaire**.

On appelle **covariance** *du vecteur X la matrice*

$$\rho(s,t)=E[(X_s-E(X_s))(X_t-E(X_t))^T],\ \ s,t\geq 0$$

où A^T désigne la matrice transposée.

Proposition 2.6 *Le mouvement brownien B est un processus gaussien continu de covariance $\rho(s,t)=s\wedge t$.*

Réciproquement, tout processus gaussien centré continu de covariance $\rho(s,t)=s\wedge t$ est un mouvement brownien.

Le mouvement brownien converge "en moyenne" vers zéro :

$$\frac{B_t}{t}\to 0$$

presque sûrement lorsque t tend vers l'infini.

Preuve en exercice. Le troisième point est en quelque sorte une "loi des grands nombres". *q.e.d.*

On peut obtenir d'autres mouvements browniens par des transformations standard en changeant éventuellement aussi la filtration.

(i) changement d'échelle (scaling) : $(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct},\mathcal{F}_{ct})$.

(ii) inversion du temps : $(Y_t,\mathcal{F}_t^Y)$, avec $Y_t=tB_{\frac{1}{t}}$ si $t\neq 0$, $Y_0=0$ et $\mathcal{F}_t^Y=\sigma\{Y_s,s\leq t\}$.

(iii) retournement du temps : $(Z_t,\mathcal{F}_t^Z)$, avec $Z_t=B_T-B_t$ et $\mathcal{F}_t^Z=\sigma\{Z_s,s\leq t\}$.

(iv) symétrie : $(-B_t, \mathcal{F}_t)$.

Il suffit de vérifier à chaque fois que l'on a un processus continu, adapté, qui vérifie la propriété caractéristique du mouvement brownien ou que c'est un processus gaussien de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$. Le seul un peu difficile est le (ii) (utiliser la caractérisation ci-dessus).

Proposition 2.7 *B est une martingale pour sa filtration propre.*
C'est également un processus de Markov.

Preuve en exercice, simple application de la définition.

2.2.2 Variations des trajectoires

(cf [13] pb 9.8 p. 106 et 125)
Notation : $\pi_n = (t_0 = 0, \cdots, t_n = t)$ est une "partition" de $[0,t]$, on note $\|\pi_n\| = \sup_i\{t_i - t_{i-1}\}$, appelé le "pas" de π_n.

Théorème 2.8 *(cf [23] 28 p. 18)*
Soit π_n une suite de partitions de l'intervalle $[0,t]$ telle que $\pi_n \subset \pi_m$ si $n \leq m$ et le pas de π_n, noté $\|\pi_n\|$, tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On pose

$$\pi_n(B) = \sum_{t_i \in \pi_n} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Alors $\pi_n(B)$ converge vers t dans $L^2(\Omega)$,
et presque sûrement si de plus $\sum_n \| \pi_n \| < \infty$, quand n tend vers l'infini.

Preuve : Soit $z_i = (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)$; $\sum_i z_i = \pi_n(B) - t$. C'est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées puisque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $t_{i+1} - t_i$. On peut aussi calculer l'espérance de z_i^2 :

$$E[z_i^2] = E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)]^2 = E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4 - 2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2(t_{i+1} - t_i) + (t_{i+1} - t_i)^2].$$

Connaissant les moments de la loi gaussienne, on obtient :

$$E[z_i^2] = 2(t_{i+1} - t_i)^2.$$

L'indépendance entre les z_i montre que $E[(\sum_i z_i)^2] = \sum_i E[(z_i)^2]$ ce qui vaut $2\sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 \leq 2\|\pi_n\|.t$, qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Ceci entraine la convergence dans $L^2(\Omega)$ (donc en probabilité) de $\pi_n(B)$ vers t.

Si de plus $\sum_n \| \pi_n \| < \infty$, $\mathbb{P}\{|\pi_n(B) - t| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} 2 \| \pi_n \| t$. Donc la série $\sum_n \mathbb{P}\{|\pi_n(B) - t| > \varepsilon\}$ converge et le lemme de Borel-Cantelli montre que

$$\mathbb{P}[\overline{\lim}_n \{|\pi_n(B) - t| > \varepsilon\}] = 0,$$

soit :

$\mathbb{P}[\cap_n \cup_{m\geq n}\{|\pi_m(B)-t| > \varepsilon\}] = 0, \forall\varepsilon > 0,$ presque sûrement $\cup_n\cap_{m\geq n}\{|\pi_m(B)-t| \leq \varepsilon\} = \Omega,$

ce qui traduit la convergence presque sûre de $\pi_n(B)$ vers t. *q.e.d.*

Théorème 2.9 *(cf [13] 9.18, p.110 : Paley-Wiener-Zygmund, 1933)*

$$\mathbb{P}\{\omega : \exists t_0 \ t \mapsto B_t(\omega) \ \textit{différentiable en } t_0\} = 0.$$

Pour ceux qui en veulent un peu plus, plus précisément, si l'on note $D^+f(t) = \overline{\lim}_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$; $D_+f(t) = \underline{\lim}_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, il existe un événement F de probabilité 1 contenu dans l'ensemble :

$$\{\omega \ : \forall t, \ D^+B_t(\omega) = +\infty \text{ ou } D_+B_t(\omega) = -\infty\}.$$

L'interprétation de ce résultat est que pour presque tout ω, la trajectoire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue mais pas dérivable.

Définition 2.10 *Soit une fonction définie sur un intervalle* $[a, b]$. *On appelle* **variation de f sur l'intervalle** *:*

$$Var_{[a,b]}(f) = \sup_\pi \sum_{t_i\in\pi} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

où π décrit l'ensemble des partitions de $[a, b]$.

Théorème 2.11 *(cf [23] p.19-20 Soit a et b fixés dans $\mathbb{R}^+$:*

$$\mathbb{P}\{\omega : Var_{[a,b]}(B) = +\infty\} = 1.$$

Preuve : Soit a et b fixés dans $\mathbb{R}^+$ et π une partition de $[a, b]$.

(1) $$\sum_{t_i\in\pi} |B(t_{i+1}) - B(t_i)| \geq \frac{\sum_{t_i\in\pi} |B(t_{i+1}) - B(t_i)|^2}{sup_{t_i\in\pi}|B(t_{i+1}) - B(t_i)|}.$$

Le numérateur est la variation quadratique de B dont on sait qu'elle converge vers $b - a$. Ensuite, $s \mapsto B_s(\omega)$ est continue donc uniformément continue sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\forall\varepsilon, \exists\eta, \| \pi \|< \eta \Rightarrow sup_{t_i\in\pi}|B(t_{i+1}) - B(t_i)| < \varepsilon.$$

La fraction (1) converge donc vers l'infini. *q.e.d.*

2.3 Calcul de $2\int_0^t B_s dB_s$ (exercice)

Bien que les trajectoires de B ne soient pas différentiables, on cherche à donner un sens à cette intégrale. On s'attendrait à ce que ce soit B_t^2, il n'en est rien. Pour mettre la différence en évidence, on décompose B_t^2 en somme de différences le long d'une partition de l'intervalle $[0,t]$ noté $t_i = it/n$ que l'on développera ensuite par la formule de Taylor :

$$B_t^2 = \sum_i (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) = \sum_i 2B_{t_i}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] + \sum_i [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]^2.$$

Le premier terme converge "naturellement" vers ce que l'on attend : $2\int_0^t B_s dB_s$ (ceci sera justifié dans le paragraphe 3.1). On croirait que le second converge vers 0, c'est là qu'intervient le paradoxe. Il faut remarquer que par définition du mouvement brownien ce second terme est la somme des carrés de n gaussiennes indépendantes centrés et de variance t/n : il s'agit donc d'une variable aléatoire de loi $t/n\chi_n^2$. Son espérance est t et sa variance est $t^2/nVar\chi_1^2$: donc ce terme converge dans L^2 (donc en probabilité) vers son espérance t. Ainsi, on montrera précisément plus tard

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t.$$

3 Calcul de Ito

Le but essentiel de ce chapitre est de donner un sens à la notion d'intégrale de processus par rapport au mouvement brownien ou, plus généralement, par rapport à une martingale. En se guidant sur le "prétexte" de ce cours, le calcul stochastique appliqué aux finances, on peut motiver ainsi l'intégrale stochastique : étudions un instant un modèle où le prix d'une action serait donné par une martingale M_t à l'instant t. Si l'on possède $X(t)$ de ces actions au même instant et que l'on effectue des transactions aux instants t_k, la richesse se sera finalement accrue de

$$\sum_k X(t_{k-1})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}).$$

Mais si l'on veut effectuer des transactions en temps continu,à tout instant t, il faut pouvoir définir un outil mathématique permettant de passer à la limite dans l'expression ci-dessus avec le problème que, en particulier si $M = B$, la dérivée B' n'existe pas !! cette expression est une somme qui a vocation à converger vers une intégrale de Stieltjes, mais comme la variation $V(B)$ est infinie, cela ne saurait converger dans un sens "déterministe" : l'intégrale stochastique "naïve" est impossible (cf. Protter [23] page 40) comme le montre le résultat suivant.

Théorème 3.1 *Soit $\pi = (t_k)$ une partition de $[0,T]$. Si pour tout fonction continue x $\lim_{|\pi|\to 0} \sum_k x(t_{k-1})(f(t_k) - f(t_{k-1}))$ existe, alors f est à variation finie. (cf. Protter [23], th. 52, page 40)*

Par réciproque, on obtient donc que si $V(f) = +\infty$, alors la limite n'existe pas, ce qui est le cas pour $f : t \mapsto B_t$ le mouvment brownien. Il faut donc trouver d'autres outils. L'idée de Itô a été de restreindre les intégrands aux processus qui ne peuvent pas "voir" les accroissements du futur, c'est à dire les processus adaptés, en sorte que, du moins pour le brownien, $x(t_{k-1})$ et $(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$ soient indépendants ; ainsi, par trajectoire on ne peut rien faire, mais l'on travaille en probabilité, en espérance.

Le plan est le suivant : après avoir introduit le problème et quelques notations (3.1.1), on définit (3.1.2) d'abord l'intégrale sur les processus "simples" d'ensemble noté $\mathcal{S}$, (que l'on va définir) puis dans 3.1.3 on donne les propriétés de cette intégrale sur $\mathcal{S}$ ce qui permet de prolonger par continuité l'opérateur obtenu sur la fermeture de $\mathcal{S}$ pour une topologie bien choisie, en sorte d'avoir une quantité raisonnable d'intégrands.

La section 3.2 est consacrée à la variation quadratique, que l'on peut interpréter comme la variance dans le temps. Cet outil servira, entre autres, à définir l'intégrale d'une intégrale.

3.1 L'intégrale stochastique

3.1.1 Introduction et notations

Soit M une martingale continue de carré intégrable de processus croissant $\langle M \rangle$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ où $\mathcal{F}_t$ est par exemple la filtration naturelle du brownien complétée par les événements négligeables. Pour tout processus mesurable X, tout entier n et tout temps t on définit :

$$I_n(X,t) = \sum_j X(\frac{j-1}{2^n} \wedge t)(M_{\frac{j}{2^n}\wedge t} - M_{\frac{j-1}{2^n}\wedge t}).$$

Ceci n'a pas toujours une limite comme on l'a vu dans le théorème 3.1. On va se restreindre aux processus X mesurables adaptés presque sûrement de carré intégrable par rapport au processus croissant $\langle M \rangle$.

La construction de $I(X,t)$ est due à Itô (1942) dans le cas de M mouvement brownien, et à Kunita et Watanabe (1967) pour les martingales de carré intégrable. Quelques rappels du chapitre 1 qui vont servir à définir la topologie sur l'ensemble des intégrands :

. soit π sont les partitions de $[0,t]$, le processus croissant $\langle M \rangle$ est défini au temps t par :

$$\langle M \rangle_t = \lim_{|\pi|\to 0} proba \sum_{t_i \in \pi} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2.$$

. On a vu dans le chapitre précédent que si $M = B$ alors $\langle B \rangle_t = t$.

. Les martingales de carré intégrable M admettent un crochet $\langle M \rangle$.

. $\langle M \rangle_t$ est l'unique processus continu croissant adapté tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ est une martingale.
Cette dernière propriété sert souvent de définition au crochet : elle est équivalente à la définition.

Notation : on définit une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$ par

$$\mu_M(A) = E[\int_0^\infty 1_A(t,\omega) d\langle M \rangle_t(\omega)].$$

Dans le cas du brownien, $\mu_B(A) = E[\int_0^\infty 1_A(t,\omega)dt]$.
Pour tout X adapté, on note $[X]_T^2 = E[\int_0^T X_t^2 d\langle M \rangle_t]$.
On dit que X et Y sont équivalents si $X = Y \mu_M$ $p.s$ et remarquons que X et Y sont équivalents si et seulement si $[X - Y]_T^2 = 0 \ \forall T \geq 0$.

On introduit l'ensemble des processus suivants :

$$\mathcal{L} = \{ \text{ classes de processus } X \text{ mesurables } \mathcal{F}\text{-adaptés tels que } \sup_T [X]_T < +\infty \}$$

que l'on munit de la métrique :

$$d(X,Y) = \sum_n 2^{-n} 1 \wedge [X-Y]_n. \tag{2}$$

Ce qui suit est hors programme, jusqu'à la fin de 3.1.1. Dans le cas général, on introduit le sous ensemble

$$\mathcal{L}^* = \{X \in \mathcal{L} \text{ progressivement mesurable}\}$$

et on doit se restreindre à ce sous-ensemble. Mais lorsque la martingale M est telle que son processus croissant $\langle M \rangle$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue (c'est à dire il existe une fonction mesurable f telle que $\langle M \rangle_t(\omega) = \int_0^t f(\omega,s)ds$), comme tout élément de $\mathcal{L}$ admet une modification dans $\mathcal{L}^*$ on pourra dans ce cas travailler dans $\mathcal{L}$ ce qui est le cas du mouvement brownien, seul cas que nous traitons en détail, et on ne se servira pas ici de $\mathcal{L}^*$.

Proposition 3.2 *Soit $\mathcal{L}_T$ l'ensemble des processus X mesurables adaptés sur $[0,T]$ tels que :*

$$[X]_T^2 = E[\int_0^T X_s^2 d\langle M \rangle_s] < +\infty.$$

$\mathcal{L}_T^*$, ensemble des éléments de $\mathcal{L}_T$ progressivement mesurables, est fermé dans $\mathcal{L}_T$. En particulier, il est complet pour la norme $[.]_T$.

Soit une suite de $\mathcal{L}_T^*$, (X^n), convergeant vers X : $[X-X^n]_T \to 0$. Il s'agit d'une suite dans un espace L^2 donc complet et $X \in \mathcal{L}_T$ et la convergence L^2 implique l'existence d'une suite extraite convergeant presque sûrement. Soit Y la limite presque sûre sur $\Omega \times [0,T]$, c'est à dire que $A = \{(\omega,t) : \lim_n X_t^n(\omega,t) \text{ existe}\}$ est de probabilité 1 et $Y(\omega,t) = X(\omega,t)$ si $(\omega,t) \in A$, 0 sinon. Le fait que pour tout n, $X^n \in \mathcal{L}_T^*$ montre que $Y \in \mathcal{L}_T^*$ et Y équivaut à X. *q.e.d.*

3.1.2 Intégrale de processus simples

Définition 3.3 *On dit que X est* **simple** *ou* **étagé** *s'il s'écrit :*

$$X_t = \xi_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \mathbf{1}_{]t_i t_{i+1}]}(t)$$

où ξ_i est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$−mesurable bornée et (t_i) une suite de réels positifs tendant vers l'infini, $t_0 = 0$.

On note $\mathcal{S}$ leur ensemble et on admet les inclusions $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$.
Exercice :Calculer $[X]_T^2$ pour $X \in \mathcal{S}$.

Définition 3.4 *Soit $X \in \mathcal{S}$. L'intégrale stochastique de X par rapport à M est*

$$I_t(X) := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i}).$$

Exercice :Calculer $E[(I_t(X))^2]$ pour $X \in \mathcal{S}$. Comparer avec $[X]_T^2$.

Il s'agit maintenant d'étendre cette définition à une classe plus large d'intégrands.

Lemme 3.5 *Pour tout processus* **borné** $X \in \mathcal{L}$ *il existe une suite de processus* $X_n \in \mathcal{S}$ *telle que* $\sup_{T \geq 0} \lim_n E[\int_0^T (X_n - X)^2(t) d\langle M \rangle_t] = 0$.

Preuve (hors programme) : (a) Cas où X est continu : on pose $X_t^n = X_{\frac{j-1}{2^n}}$ sur l'intervalle $]\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$. Par continuité, il est clair que $X_t^n \to X_t$ presque sûrement. De plus X est borné par hypothèse ; le théorème de convergence majorée permet de conclure.

(b) cas où $X \in \mathcal{L}^*$: on pose $X_t^m = m \int_{(t-1/m)^+}^t X_s ds$ qui lui est continu, et reste mesurable adapté borné dans $\mathcal{L}$. On peut montrer que $X \in \mathcal{L}^*$ implique la convergence dans L^2 de la suite X^m. D'après l'étape (a) pour tout m il existe une suite $X^{m,n}$ de processus simples qui convergent vers X^m dans $L^2([0,T] \times \Omega, d\mathbb{P} \times dt)$ c'est à dire :

$$\forall m \; \forall T \; \lim_{n \to \infty} E[\int_0^T (X_t^{m,n} - X_t^m)^2 dt] = 0. \tag{3}$$

Soit $A = \{(t, \omega) \in [0,T] \times \Omega \; : \; \lim_{m \to \infty} X_t^m(\omega) = X_t(\omega)\}^c$ et sa section A_ω pour tout ω. Puisque X est progressivement mesurable, $A_\omega \in \mathcal{B}([0,T])$. Un théorème d'analyse fine (**théorème fondamental de Lebesgue**, cf. par exemple STEIN : "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions") dit que puisque X est intégrable, on a :

$$X_t^m - X_t = m \int_{(t-1/m)^+}^t (X_s - X_t) ds \to 0$$

pour presque tout t et la mesure de Lebesgue de A_ω est nulle. Par ailleurs, X et X^m sont uniformément bornés ; le théorème de convergence majorée dans $[0,T]$ montre que $\forall \omega \int_0^T (X_s - X_x^m)^2 ds \to 0$.

On applique une seconde fois le théorème de convergence majorée mais dans Ω et l'on obtient $E[\int_0^T (X_s - X_x^m)^2 ds] \to 0$ ce qui, avec (3), conclut (b).

(c) Enfin le cas où X est **mesurable adapté borné** : on se ramène au (b) en se rappelant (cf. chapitre 1) que tout processus mesurable adapté possède une modification progressivement mesurable, ce qui permet de conclure.
q.e.d.

Proposition 3.6 *Si le processus croissant $\langle M \rangle_t$ est absolument continu par rapport à dt $\mathbb{P}$-presque sûrement, alors $\mathcal{S}$ est dense dans l'espace métrique $(\mathcal{L}, d)$ où d a été définie en (2).*

Cette proposition assure donc la densité des processus simples dans $\mathcal{L}$ dans le cas où M vérifie l'hypothèse

(H) le processus croissant $\langle M\rangle_t$ est absolument continu par rapport à dt

ce qui est le cas pour le mouvement brownien. Désormais, on ne considère que des martingales vérifiant (H) donc on ne considère que l'espace $\mathcal{L}$ et pas $\mathcal{L}^*$.

Remarque 3.7 *utile : la métrique introduite en (2) donne lieu à la topologie équivalente suivante :* $d(X_n, X) \to 0$ *quand* n *tend vers l'infini si et seulement si*

$$\forall T > 0, E[\int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2 d\langle M\rangle_t] \to 0.$$

3.1.3 Propriétés élémentaires et prolongement de l'intégrale stochastique

On rappelle que pour un processus simple X l'intégrale stochastique

$$I_t(X) := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}).$$

On note $I_t(X)$ ou bien $\int_0^t X_s dM_s$ ou bien $(X.M)_t$ pour bien préciser que l'intégrateur est M. Cette intégrale stochastique élémentaire a les propriétés suivantes à montrer en exercice :

Exercice 3 feuille 3. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des processus simples sur lequel est défini l'intégrale stochastique par rapport à M :

$$I_t(X) = \sum_j \xi_j(M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j\wedge t}).$$

Montrer que I_t vérifie les propriétés suivantes :

(i) I_t est une application linéaire sur $\mathcal{S}$.

(ii) $I_t(X)$ est de carré intégrable.

(iii) $I_t(X)$ est d'espérance nulle.

(iv) $I_t(X)$ est une martingale continue.

(v) $E[I_t(X)]^2 = E[\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s]$, c'est à dire $[X]_t^2$.

(vi) $E[(I_t(X) - I_s(X))^2/\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_s] = E[(I_t(X))^2 - (I_s(X))^2/\mathcal{F}_s]$.

(vii) $\langle I_.(X)\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$.

Ces propriétés permettent d'étendre le champ des intégrands au delà des processus simples grâce aux résultats de densité du paragraphe précédent. De plus, on montrera que l'opérateur obtenu vérifie encore toutes les propriétés de (i) à (vii).

Proposition 3.8 *Soit $X \in \mathcal{L}$ et une suite de processus simples X^n convergeant vers X pour la distance d. Alors, la suite $I_t(X^n)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, et la limite qui ne dépend pas de la suite choisie est notée $I_t(X)$ ou $\int_0^t X_s dM_s$ ou $(X.M)_t$, intégrale stochastique de X par rapport à la martingale M.*

Preuve :

Définition 3.9 *Ceci définit l'intégrale stochastique $I_t(X)$.*

On montre maintenant les propriétés par passage à la limite, car I_t est une isométrie entre $(\mathcal{L}, d)$ et $L^2(\Omega)$ et les processus simples sont denses dans $(\mathcal{L}, d)$:

Proposition 3.10 *Soit $X \in \mathcal{L}$ Alors : (i) I_t est une application linéaire sur $\mathcal{L}$.*

(ii) $I_t(X)$ est de carré intégrable.

(iii) $I_t(X)$ est d'espérance nulle.

(iv) $I_t(X)$ est une martingale continue.

(v) $E[I_t(X)]^2 = E[\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s]$.

(vi) $E[(I_t(X) - I_s(X))^2/\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_s]$.

(vi') $E[(I_t(X))^2/\mathcal{F}_s] = I_s^2(X) + E[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_s]$.

(vii) $\langle I_.(X)\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$.

3.2 Variation quadratique

(cf. [13], pages 141-145 ; [23], pages 58-60.)

On considère des martingales M et N vérifiant (H). De même que l'on définit $\langle M\rangle_t$ comme limite en probabilité des sommes des écarts quadratiques de M, on définit la covariation quadratique de deux martingales continues de carré intégrable M et N : si π sont les partitions de $[0, t]$ on définit

$$\langle M, N\rangle_t := \lim_{|\pi|\to 0} \text{proba} \sum_{t_i\in\pi} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$$

ou, ce qui est équivalent

$$4\langle M, N\rangle_t := \langle M + N\rangle_t - \langle M - N\rangle_t.$$

Il y a donc lieu, pour X et $Y \in \mathcal{L}(M)$, d'étudier le "crochet" $\langle I(X), I(Y)\rangle$. On rappelle d'abord quelques résultats utiles sur les crochets des martingales continues de carré intégrable.

Proposition 3.11 *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable. Alors :*

(i) $|\langle M,N\rangle_t|^2 \leq \langle M\rangle_t \langle N\rangle_t$ *;*

(ii) $M_tN_t - \langle M,N\rangle_t$ *est une martingale.*

Corollaire 3.12 $\forall s, \forall t,\ s \leq t,\ E[(M_t - M_s)(N_t - N_s)/\mathcal{F}_s] = E[(\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s/\mathcal{F}_s]$.

Preuve (exercice) : le (i) se montre simplement comme toute inégalité de Cauchy. Le (ii) se déduit de ce que, puisque $M+N$ est une martingale de carré intégrable, la différence $(M+N)^2 - \langle M+N\rangle_t$ est une martingale.

q.e.d.

Proposition 3.13 *Soit T un temps d'arrêt et M et N deux martingales continues de carré intégrable. Alors :* $\langle M^T, N\rangle = \langle M, N^T\rangle = \langle M,N\rangle^T$.

Preuve : cf. Protter [23] th. 25, page 61, à admettre. *q.e.d.*

Théorème 3.14 *(inégalité de Kunita-Watanabe, cf. [13] prop. 2.14 page 142.) Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable, $X \in \mathcal{L}(M)$ et $Y \in \mathcal{L}(N)$. Alors presque sûrement :*

$$(\int_0^t |X_sY_s| d\langle M,N\rangle_s)^2 \leq \int_0^t |X_s|^2 d\langle M\rangle_s \int_0^t |Y_s|^2 d\langle N\rangle_s. \tag{4}$$

Proposition 3.15 *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable , $X \in \mathcal{L}(M)$ et $Y \in \mathcal{L}(N)$. Alors :*

$$\langle X.M, Y.N\rangle_t = \int_0^t X_uY_u d\langle M,N\rangle_u,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\ p.s. \tag{5}$$

et

$$E[\int_s^t X_u dM_u \int_s^t Y_u dN_u/\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_uY_u d\langle M,N\rangle_u/\mathcal{F}_s],\ \forall s \leq t,\ \mathbb{P}\ p.s. \tag{6}$$

Le cas $M = N$ est simplement la propriété (vii) de l'intégrale stochastique appliquée à $I_t(X+Y)$. Par ailleurs, il est facile de voir que (5) et (6) sont équivalentes.

Proposition 3.16 *L'intégrale stochastique est associative dans le sens suivant : si* $H \in \mathcal{L}(M)$ *et* $G \in \mathcal{L}(H.M)$*, alors* $GH \in \mathcal{L}(M)$ *et l'on a :*

$$G.(H.M) = GH.M$$

Preuve en exercice : voir [23] th. 19 page 55 ou [13] corollaire 2.20, page 145. *q.e.d.*

4 Formule de Itô

(cf [13], pages 149-156 et [23], pages 70-83.)

C'est un outil qui permet du calcul intégrodifférentiel, que l'on appelle communément “calcul de Itô”. C'est du calcul sur les trajectoires des processus, donc la connaissance de ce qui se passe pour une réalisation ω de l'aléa.

On rappelle d'abord ce qu'est l'intégrale par rapport à des processus à variation finie.

Définition 4.1 *Soit A un processus continu. On dit qu'il est* **à variation finie** *si, pour tout t, étant données les partitions π de $[0,t]$ on a :*

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{t_i\in\pi} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| < \infty \ \mathbb{P} \ p.s.$$

De tels processus, à ω fixé, donnent lieu à des intégrales de Stieltjes. Par exemple si A est un processus croissant, pour toute partition π de $[0,t]$, $V_\pi(A) = A_t - A_0$.

Théorème 4.2 *(cf. Protter [23], th. 31 page 71) Soit A un processus continu à variation finie, et f de classe C^1. Alors, $f(A_.)$ est un processus continu à variation finie et :*

$$f(A_t) = f(A_0) + \int_0^t f'(A_s)dA_s.$$

Il s'agit simplement de la formule de Taylor à l'ordre 1.

Ces processus avec les martingales locales continues engendrent un ensemble assez vaste d'intégrateurs que l'on va maintenant considérer.

Définition 4.3 *On appelle* **semi-martingale continue** *un processus X sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ défini $\mathbb{P}$ p.s. par :*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \ \forall t \geq 0,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, M est une martingale locale continue et $A = A^+ - A^-$ avec A^+ et A^- processus continus croissants à variation finie adaptés.

Remarque 4.4 *Un processus continu à variation finie admet une variation quadratique nulle : $\langle A\rangle_t = 0$ pour tout t.*

Preuve en exercice en le montrant d'abord pour A croissant, puis le déduire pour $A = A^+ - A^-$.

Cette définition est particulièrement importante. En effet, Delbaen et Schashermayer ont montré [5] que sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) les prix sont nécessairement des semi-martingales. Cette hypothèse AOA interdit d'obtenir une richesse positive avec une probabilité strictement positive en partant d'une richesse initiale nulle.

Définition 4.5 *si X est la semi-martingale réelle continue $X_0 + M + A$, on note $\langle X \rangle$ la limite en probabilité de la somme des carrés des accroissements (exactement comme pour les martingales) ; on montre que ceci en fait est $\langle M \rangle$. De même pour deux semi-martingales continues X et Y, on note $\langle X, Y \rangle$ le crochet de leurs parties martingales.*

4.1 Règle de Itô, ou formule de changement de variable

Théorème 4.6 *(dû à Itô, 1944 et à Kunita-Watanabé, 1967) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et X une semi-martingale continue. Alors, $\mathbb{P}$ p.s. et pour tout t positif :*

$$df(X_s) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}f"(X_s)d\langle X \rangle_s,$$

c'est à dire :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"(X_s)d\langle M \rangle_s$$

où la première intégrale est une intégrale stochastique et les deux autres des intégrales de Stieltjes.

Remarquons que cette formule a été vue dans le chapitre 2 paragraphe 2.3 pour la fonction $f : x \mapsto x^2$ et $X = B$, soit $B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t$.

Notation différentielle : on dit parfois que la différentielle stochastique de $f(X_t)$ est :

$$df(X_s) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}f"(X_s)d\langle X \rangle_s,$$

d'où la possibilité d'un calcul différentiel stochastique. On peut mémoriser cette formule en se disant qu'il s'agit d'une espèce de formule de Taylor à l'ordre 2.
Preuve: elle se fait en quatre étapes :

on "localise" pour se ramener au cas borné,

on effectue un développement de Taylor de la fonction f à l'ordre 2,

on étudie le terme qui donne lieu à l'intégrale stochastique,

et enfin celui en variation quadratique.

1. Soit le temps d'arrêt

$$\begin{aligned} T_n &= 0 \text{ si } |X_0| \geq n, \\ &\quad \inf\{t \geq 0; |M_t| \geq n \text{ ou } |A_t| \geq n \text{ ou } \langle M \rangle_t \geq n\} \\ &\quad \text{et l'infini sinon.} \end{aligned}$$

Cette suite de temps d'arrêt est évidemment croissante vers l'infini presque sûrement. Comme la propriété à démontrer est trajectorielle, il suffit de la montrer pour le processus arrêté en T_n (puis faire tendre n vers l'infini). On peut donc supposer les processus $M, A, \langle M\rangle$ et la variable aléatoire X_0 bornés. Le processus X est aussi lui-même borné et l'on peut considérer f à support compact : $f, f', f"$ sont bornées.

2. Pour atteindre cette formule, et en particulier le terme intégrale stochastique, comme on l'a fait dans le chapitre précédent pour l'étude de B_t^2, on découpe l'intervalle $[0, t]$ en une partition $\pi = (t_i, i = 1, ..., n)$ et l'on étudie les accroissements de $f(X_t)$ sur cette partition :

$$(7) \qquad f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=0}^{n-1}(f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})) =$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} f'(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(X_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2,$$

où $\eta_i \in [X_{t_i}, X_{t_{i+1}}]$.
Il est clair que le deuxième terme converge vers l'intégrale de Stieltjes de $f'(X_s)$ par rapport à A. Il n'y a là rien de stochastique.

3. Pour traiter le premier terme, considérons le processus simple associé à la partition π :

$$Y_s^\pi = f'(X_{t_i}) \text{ si } s \in]t_i, t_{i+1}].$$

Alors, on a bien que $f'(X_{t_i})$ est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable (donc $Y^\pi \in \mathcal{S}$) et ce premier terme est égal par définition à $\int_0^t Y_s^\pi dM_s$. Or,

$$\int_0^t |Y_s^\pi - f'(X_s)|^2 d\langle M\rangle_s = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(X_{t_i}) - f'(X_s)|^2 d\langle M\rangle_s.$$

L'application $s \mapsto f'(X_s)$ étant continue, l'intégrand ci-dessus converge presque sûrement vers zéro. Le fait que f' est bornée et le théorème de convergence dominée (théorème de Lebesgue) permet de montrer que Y_s^π converge vers $f'(X_s)$ dans l'espace au sens L^2 avec la métrique d introduite dans le chapitre 3 : par définition de l'intégrale stochastique, le premier terme converge dans L^2 vers l'intégrale stochastique

$$\int_0^t f'(X_s)dM_s.$$

4. **Terme en variation quadratique** : on le décompose en trois termes :

$$(8) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$$
$$+2\sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2$$

Ce dernier terme est majoré par $\|f"\| \sup_i |\Delta_i A| \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i A|$ dont le premier facteur et le troisième sont bornés par hypothèse ; et $\sup_i |\Delta_i A|$ tend vers zéro presque sûrement puisque A est continu.

On majore le second terme par $\|f"\| \sup_i |\Delta_i M| \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i A|$ et qui converge de la même façon presque sûrement vers zéro puisque M est continue et $\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i A| \leq V_t(A) < \infty$.

Le premier terme de (8) diffère "peu" de

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2.$$

En effet :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(f"(\eta_i) - f"(X_{t_i}))(\Delta_i M)^2 \leq \sup_i |f"(\eta_i) - f"(X_{t_i})| \sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i M)^2$$

dont le premier facteur tend presque sûrement vers zéro par continuité de $f"$ et le second tend vers $\langle M\rangle_t$, par définition, en probabilité donc une suite extraite converge presque sûrement. Le produit tend alors vers zéro dans L^2 par le théorème de convergence dominée. On a donc à étudier

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$$

que l'on compare à $\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})$ dont la limite dans L^2 est $\int_0^t f"(X_s) d\langle M\rangle_s$ puisque

- par continuité le processus simple égal à $f"(X_{t_i})$ sur $]t_i, t_{i+1}]$ converge presque sûrement vers $f"(X_s)$;

- et le théorème de Lebesgue de convergence dominée permet de conclure.

Soit donc la différence :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})]$$

dont on étudie la limite dans L^2 ; dans l'espérance du carré soit les termes rectangles :

$$i < k \;:\; E[f"(X_{t_i}) f"(X_{t_k})(\Delta_i M^2 - \langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})(\Delta_k M^2 - \langle M\rangle_{t_k}^{t_{k+1}})]$$

Par espérance conditionnelle en $\mathcal{F}_{t_i}$ on déduit que ces termes sont nuls puisque $M^2 - \langle M\rangle$ est une martingale. Restent les termes carrés :

$$\begin{aligned}
\sum_i E[(f"(X_{t_i}))^2(\Delta_i M^2 - \langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})^2] &\leq 2\|f"\|_\infty^2 \sum_i [E(\Delta_i M^4) + E((\langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})^2)] \\
&\leq 2\|f"\|_\infty^2 E[(\sup_i \Delta_i M^2 \sum_i \Delta_i M^2) + \sup_i(\langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})\langle M\rangle_t]
\end{aligned}$$

Dans la majoration, $\sup_i \Delta_i M^2$ et $\sup_i(\langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})$ sont bornés et convergent presque sûrement vers zéro par continuité ; $\sum_i \Delta_i M^2$ converge vers $\langle M\rangle_t$ en probabilité par définition ; on a donc globalement par le théorème de convergence dominée la convergence vers zéro dans L^1 au moins pour une suite extraite.

En conclusion, la suite des sommes (7) converge en probabilité vers le résultat annoncé dans le théorème ; on conclut avec la convergence presque sûre d'une suite extraite.

4.2 Prolongement et applications

On peut généraliser assez largement ce résultat à des fonctions de semi-martingales vectorielles qui dépendent également du temps.

Proposition 4.7 *Soit M un vecteur de dimension d de martingales locales continues, A un vecteur de dimension d de processus continus adaptés à variation finie et X_0 un $d-$vecteur aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable ; soit $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. On pose $X_t = X_0 + M_t + A_t$. Alors, $\mathbb{P}$ presque sûrement :*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \partial_t f(s, X_s)ds + \int_0^t \partial_i f(s, X_s)dM_s^i + \int_0^t \partial_i f(s, X_s)dA_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{ij} \partial_{ij}^2 f(s, X_s)d\langle M^i, M^j\rangle_s \end{aligned}$$

Preuve : à rédiger à titre d'entrainement. *Voir les exercices 3 et 4 de le feuille 4.*

Lorsque f et ses dérivées sont bornées et que M est une martingale de carré intégrable, le terme intégrale stochastique ci-dessus est une "vraie" martingale, nulle à l'origine et il vient :

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \partial_t f(s, X_s)ds - \int_0^t \partial_i f(s, X_s)dA_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{ij}^2 f(s, X_s)d\langle M^i, M^j\rangle_s \in \mathcal{M}$$

Par exemple, si $A = 0$ et $X = M$ est le mouvement brownien, on obtient :

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \mathcal{L}f(s, X_s)ds \in \mathcal{M}$$

où l'opérateur différentiel $\mathcal{L} = \partial_t + \frac{1}{2}\sum_i \partial_{ii}^2$ et $\mathcal{M}$ désigne l'ensemble des martingales.

Par ailleurs, de la formule de Itô on peut déduire la solution de ce que l'on appelle "l'équation de la chaleur", c'est à dire l'équation aux dérivées partielles :

$$f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d),\ \partial_t f = \sum_i \frac{1}{2}\partial_{ii}^2 f \text{ et } f(0, x) = \varphi(x)$$

où $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ et dont l'unique solution est donnée par

$$f(t,x) = E[\varphi(x + B_t)]$$

Il est facile de voir que cette fonction est effectivement solution en utilisant la formule de Itô ; l'unicité demande un peu plus de travail.
Voir l'exercice 5 de la feuille 4 : on développe par la formule de Itô $\varphi(x + X_t)$, on en prend l'espérance pour avoir $f(t,x)$, que l'on dérive en t et en x.

Le corollaire suivant, très simple à montrer, est particulièrement utile.

Corollaire 4.8 *Soient deux semi-martingales continues réelles X et Y ; alors :*

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle X, Y \rangle_t.$$

Il s'agit de ce que l'on appelle la **formule d'intégration par parties***.*

Preuve : en exercice ; c'est une simple application de la formule de Itô pour la fonction sur $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto xy$.

5 Exponentielles stochastiques, exemples d'équation différentielle stochastique

Il y a d'autres applications de la formule de Itô : une grande utilité du mouvement brownien que l'on peut mettre ici en évidence est qu'il sert à modéliser un bruit additif, une erreur de mesure dans une équation différentielle. Supposant par exemple une dynamique donnée par :

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t),\ t \in [0, T],\ x(0) = x.$$

Mais on n'a pas exactement ceci, à la vitesse s'ajoute un petit bruit, et l'on modélise ainsi la dynamique :

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dB_t,\ t \in [0, T],\ X_0 = x,$$

que l'on appelle une **équation différentielle stochastique, EDS**. *Voir celle-ci exercice 4 feuille 5.*

On ne traite pas la théorie des EDS dans ce cours, mais on en donne un deuxième exemple ci-dessous.

5.1 Exponentielle stochastique

Si l'on considère la fonction de classe C^∞, $f : x \mapsto e^x$, et une semi-martingale continue nulle en 0, X, on peut appliquer la formule de Itô à la semi-martingale $X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t$ et à la fonction exponentielle, c'est à dire qu'on effectue la "différentielle stochastique du processus $Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)$. Il vient :

$$Z_t = 1 + \int_0^t [\exp(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s)(dX_s - \frac{1}{2}d\langle X\rangle_s) + \frac{1}{2}\exp(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s)d\langle X\rangle_s].$$

Soit après simplification (en se rappelant que si deux semimartingales ont même partie martingale elles ont même crochet) :

$$Z_t = 1 + \int_0^t \exp(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s)dX_s,$$

ou bien en notation différentielle : $dZ_s = Z_s dX_s$, $Z_0 = 1$. Il s'agit de l'équation différentielle stochastique linéaire. On a le théorème :

Théorème 5.1 *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. Alors il existe une unique semi-martingale continue solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

(9) $$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dX_s$$

et elle s'explicite en :

$$Z_t(X) = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t).$$

La formule de Itô montre que ce processus est effectivement solution de l'équation demandée. On ne montre pas ici l'unicité.

Définition 5.2 *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. On appelle* **exponentielle stochastique** *de X, notée $\mathcal{E}(X)$, l'unique solution de l'équation différentielle (9).*

Exemple : Soit $X = aB$ ou a est un réel et B le mouvement brownien ; alors $\mathcal{E}_t(aB) = \exp(aB_t - \frac{1}{2}a^2 t)$ parfois appelé le "mouvement brownien géométrique".

On donne quelques résultats sur ces exponentielles stochastiques.

Théorème 5.3 *(cf [23], th. 37) Soit X et Y deux semi-martingales continues, $X_0 = Y_0 = 0$. Alors*

$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle).$$

Preuve en exercice : on pose $U_t = \mathcal{E}_t(X)$ et $V_t = \mathcal{E}_t(Y)$ et l'on applique la formule d'intégration par parties (4.8):

$$U_t V_t - 1 = \int_0^t U_s dV_s + V_s dU_s + d\langle U, V\rangle_s$$

En posant $W = UV$ et en utilisant la définition différentielle de l'exponentielle stochastique on obtient le résultat.

q.e.d.

Corollaire 5.4 *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. Alors l'inverse $\mathcal{E}_t^{-1}(X) = \mathcal{E}_t(-X + \langle X\rangle)$*

Preuve en exercice, cf. exercice 3 feuille 5.

On peut considérer des équations différentielles stochastiques linéaires un peu plus générales.

Théorème 5.5 *(cf [23], th. 52, page 266.) Soit Z et H deux semi-martingales continues réelles, $Z_0 = 0$. Alors l'unique solution de l'équation différentielle stochastique :*

$$X_t = H_t + \int_0^t X_s dZ_s$$

$$\textit{est : } \mathcal{E}_H(Z)_t = \mathcal{E}_t(Z)(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(Z)(dH_s - d\langle H, Z\rangle)_s).$$

La preuve est encore un exercice qui peut utiliser la formule de Itô...

L'exemple cité au début de ce chapitre est important car il est utilisé en finance (par exemple pour modéliser la dynamique des taux) c'est l'équation d'**Ornstein-Uhlenbeck** (cf [13], page 358 et les exercices 4 et 5 de la feuille 5) :

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dB_t,\ t \in [0,T],\ X_0 = x$$

avec a et b des processus $\mathcal{F}-$adaptés, a presque sûrement intégrable en temps et $b \in L^2(\Omega \times [0,T], d\mathbb{P} \otimes dt)$. Lorsque ces processus sont des constantes (α et σ), on obtient la solution :

$$X_t = e^{-\alpha t}(x + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB_s).$$

On peut également montrer dans ce dernier cas :

$$\begin{aligned} m(t) &= E(X_t) = m(0)e^{-\alpha t} \\ V(t) &= Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} + (V(0) - \frac{\sigma^2}{2\alpha})e^{-2\alpha t} \\ \rho(s,t) &= cov(X_s, X_t) = [V(0) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{2\alpha(t\wedge s)} - 1)]e^{-\alpha(t+s)} \end{aligned}$$

5.2 Lien avec les EDP

(cf [13] 5.7 pages 363 et sq.)
Dans cette section (a priori hors programme sauf la définition 5.6 et la proposition 5.7), on utilise une solution de l'EDS étudiée avec condition initiale $X_t = x$:

(10) $$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u)du + \sigma(u, X_u)dW_u$$

avec les hypothèses suivantes :
(i) les coefficients sont continus, de croissance au plus linéaire en espace,
(ii) tels qu'il existe une solution à l'équation, unique en loi, c'est à dire **solution faible** : il existe une probabilité $\mathbb{P}_x$ sur l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F})$ sous laquelle

. X est $\mathcal{F}-$adaptée continue, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

. si $S_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$, X^{S_n} vérifie les conditions d'existence des solutions fortes (c'est à dire solutions trajectorielles).

La limite croissante des temps S_n s'appelle le temps d'explosion. On a $\mathbb{P}_x$-presque sûrement pour tout n

$$X_{t\wedge S_n} = x + \int_t^{t\wedge S_n} b(u, X_u)du + \int_t^{t\wedge S_n} \sigma(u, X_u)dW_u$$

5.2.1 Problème de Dirichlet

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition 5.6 *Un opérateur différentiel* $\mathcal{A} = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\partial^2_{ij}$ *d'ordre* 2 *est dit* **elliptique** *en* x *si*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d_*, \ \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j > 0.$$

Si $\mathcal{A}$ *est elliptique en tout point de* D, *on dit qu'il est elliptique dans* D.
S'il existe $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall x \in D, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta\|\xi\|^2,$$

on dit qu'il est uniformément elliptique.

Le **problème de Dirichlet** *est celui de trouver une fonction* u *de classe* C^2 *sur* D *ouvert borné, de valeur* f *sur* ∂D, *et vérifiant dans* D :

$$\mathcal{A}u - ku = -g$$

avec $\mathcal{A}$ *elliptique,* $k \in \mathcal{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^+)$, $g \in \mathcal{C}(\bar{D}, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(\partial D, \mathbb{R})$.

Proposition 5.7 *(Proposition 7.2, page 364 [13])*
Soit u *solution du problème de Dirichlet* $(\mathcal{A}, D)$ *et* X *solution de (10) avec l'opérateur* $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} \sigma^i_l \sigma^j_l(x)\partial^2_{ij} + \nabla.b(x)$; T_D *le temps de sortie de* D *par* X. *Si*

$$E_x(T_D) < \infty \tag{11}$$

pour tout $x \in D$, *alors pour tout* $x \in \bar{D}$,

$$u(x) = E_x[f(X_{T_D})\exp(-\int_0^{T_D} k(X_s)ds) + \int_0^{T_D} g(X_t)\exp(-\int_0^t k(X_s)ds)dt).$$

Preuve en exercice (problème 7.3 de [13], corrigé page 393).
Remarquons d'abord que la continuité de X fait que $X_{T_D} \in \partial D$.
Indication : montrer que

$$M : t \mapsto u(X_{t\wedge T_D}) \exp(-\int_0^{t\wedge T_D} k(X_s)ds) + \int_0^{t\wedge T_D} g(X_s) \exp(-\int_0^s k(X_u)du)ds, t \geq 0$$

est une martingale uniformément intégrable pour $\mathbb{P}_x$: on calcule $E_x(M_0) = E_x(M_\infty)$; sur $\{t < T_D\}$, on fait la différentielle de Itô de M et on utilise que sur $D, \mathcal{A}u - ku + g = 0$.
$M_0 = u(x)$ car $X_0 = x$ sous $\mathbb{P}_x$,

$$dM_t = \exp(-\int_0^{t\wedge T_D} k(X_s)ds)[\mathcal{A}u(X_{t\wedge T_D})dt + \nabla u(X_{t\wedge T_D})\sigma(t, X_{t\wedge T_D})dW_t + g(X_{t\wedge T_D}) - (k.u)(X_{t\wedge T_D})dt,$$

les fonction ∇u et σ sont continues donc bornées sur le compact $\bar{D}$, donc le deuxième terme ci-dessus est une martingale, de plus les autres termes se simplifient puisque $\mathcal{A}u - ku + g = 0$ et pour tout $t, E_x[M_t] = u(x)$.

Cette martingale est uniformément intégrable car bornée dans L^2, on peut faire tendre t vers l'infini et appliquer le théorème d'arrêt puisque $E_x[T_D] < \infty$. *q.e.d.*

Remarque 5.8 *(Friedman, 1975)*
Une condition suffisante pour avoir l'hypothèse (11) est $\exists l, \exists \alpha \ : \ a_{l,l}(x) \geq \alpha > 0$. *Cette condition est plus forte que l'ellipticité, mais moins forte que l'uniforme ellipticité dans* D.

on pose :

$$b^* = \max\{|b_l(x)|, x \in \bar{D}\}, q = \min\{x_l, x \in \bar{D}\},$$

on choisit $\nu > 4b^*/\alpha, h(x) = -\mu \exp(\nu x_l), x \in D$, μ à choisir plus tard. Alors h est de classe C^∞, et $-\mathcal{A}h(x)$ se calcule et se minore :

$$-\mathcal{A}h(x) = (\frac{1}{2}\nu^2 a_{ll} + \nu b_l(x))\mu e^{\nu x_l} \geq (\frac{8(b^*)^2}{\alpha} - \frac{4b^*}{\alpha}b^*)\mu e^{\nu x_l} \geq \frac{4(b^*)^2}{\alpha}\mu e^{\nu q} \geq 1.$$

On choisit alors μ assez grand pour que $-\mathcal{A}h(x) \geq 1$; $x \in D$, h et ses dérivées sont bornées dans D, et on peut appliquer Itô à h

$$h(X_t^{T_D}) = h(x) + \int_0^{t\wedge T_D} \mathcal{A}h(X_s)ds + \int_0^{t\wedge T_D} \nabla h(X_s)\sigma(X_s)dW_s.$$

On en tire

$$t \wedge T_D \leq h(x) - h(X_t^{T_D}) = -\int_0^{t\wedge T_D} \mathcal{A}h(X_s)ds$$

à une martingale uniformément intégrable près. Donc $E_x[t \wedge T_D] \leq 2\|h\|_\infty$ et l'on fait tendre t vers l'infini.

5.3 Modèle de Black et Scholes

Ce modèle est typiquement celui d'une exponentielle stochastique à coefficients constants. On suppose que l'actif risqué est solution de l'EDS

$$dS_t = S_t b dt + S_t \sigma dW_t, S_o = s,$$

le coefficient b s'appelle la "tendance" (trend) et σ la "volatilité". D'après ce qui précède, cette EDS admet la solution unique explicite :

$$S_t = s \exp[\sigma W_t + (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t].$$

Remarquons que $\log S_t$ suit une loi gaussienne, donc est à support dans $\mathbb{R}$ tout entier, et donc son exponentielle, S_t, est à support dans $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ tout entier.

Définition 5.9 *On appelle* **probabilité neutre au risque** *toute probabilité Q équivalente à $\mathbb{P}$ telle que tous les prix sont des $(\mathcal{F}, Q)-$martingales.*
Un marché est **viable** *si l'hypothèse AOA est vérifiée. Une condition suffisante est l'existence d'au moins une probabilité neutre au risque.*
Un marché est **complet** *dès que pour tout $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ il existe θ stochastiquement intégrable par rapport au vecteur des prix tel que $X = E(X) + \int_0^T \theta_t dS_t$.*

On verra dans le dernier chapitre que le marché du modèle de Black et Scholes est viable et complet avec l'unique probabilité neutre au risque

$$Q = L_T \mathbb{P}, dL_t = -L_t \sigma^{-1}(b - r)dW_t, t \in [0, T], L_0 = 1.$$

Définition 5.10 *On appelle option d'achat ("call") le contrat suivant : l'acheteur paye en 0 une somme q qui lui donne la possibilité d'acheter au temps 1 l'action au prix K sans en avoir l'obligation. Si à l'échéance $T, S_T > K$, il exerce son droit et gagne $S_T - K - q$. Sinon, et s'il n'exerce pas son droit, il aura perdu q. Globalement, il gagne $(S_T - K)^+ - q$.*

On appelle option de vente ("put") le contrat suivant : l'acheteur paye en 0 une somme q qui lui donne la possibilité de vendre au temps 1 l'action au prix K sans en avoir l'obligation. Si en $T, S_T < K$, il exerce son droit et gagne $K - S_T - q$. Sinon, et s'il n'exerce pas son droit, il aura perdu q. Globalement, il gagne $(K - S_T)^+ - q$.

Le problème est alors de trouver un prix "équitable" (*fair price*), q, entre l'acheteur et le vendeur de ce contrat. C'est l'objet de la **formule de Black et Scholes**
Pour ce faire, on fait l'hypothèse que le portefeuille de couverture de cet objectif, θ, est tel qu'il existe une fonction C de classe $(1, 2)$ telle que la valeur est :

$$V_t(\theta) = C(t, S_t). \tag{12}$$

Par ailleurs, θ est le couple (a,d) et on a

$$V_t(\theta) = a_t S_t^0 + d_t S_t \tag{13}$$

qui, sous l'hypothèse que le portefeuille θ est autofinançant, s'identifie à

$$V_t(\theta) = \langle \theta_0, p_0\rangle + \int_0^t a_s dS_s^0 + \int_0^t d_s dS_s. \tag{14}$$

Avec cette politique θ, le vendeur de l'option pourra "couvrir" l'option vendue le prix initial $q = V_0$.

On a deux manières de calculer la différentielle de cette valeur que l'on identifie ; à partir de (12) et de la formule de Itô :

$$dV_t(\theta) = \partial_t C(t,S_t)dt + \partial_x C(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} C(t,S_t) S_t^2 \sigma^2 dt,$$

et à partir de (14) :

$$dV_t(\theta) = r a_t S_t^0 dt + d_t S_t (b dt + \sigma dW_t).$$

L'identification donne deux équations (coefficient de dt, coefficient de dW_t, en sus de (13) qui n'est autre que $C(t,S_t)$) :

$$\begin{aligned} &\partial_t C(t,S_t) + bS_t\partial_x C(t,S_t) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} C(t,S_t) S_t^2\sigma^2 = r a_t S_t^0 + d_t S_t b \\ &\partial_x C(t,S_t) S_t \sigma = d_t S_t \sigma. \end{aligned} \tag{15}$$

On obtient ainsi le portefeuille :

$$d_t = \partial_x C(t,S_t)\ ;\ a_t = \frac{C(t,S_t) - S_t \partial_x C(t,S_t)}{S_t^0}. \tag{16}$$

Pour connaitre explicitement de portefeuille de couverture, reste à trouver la fonction C solution de l'EDP, obtenue en utilisant la première équation de (15) *En effet, on peut remplacer S_t par $x > 0$ car c'est une var lognormale donc à support dans tout* $\mathbb{R}_*^+$:

$$\partial_t C(t,x) + r x \partial_x C(t,x) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} C(t,x) x^2\sigma^2 = rC(t,x),$$

$$C(T,x) = (x-K)^+, x > 0,\ t \in [0,T].$$

Il s'agit d'un problème de Dirichlet avec $D =]0,T[\times \mathbb{R}_*^+$ et l'opérateur $\frac{1}{2}x^2\sigma^2\partial^2_{x^2} + \partial_t + rx\partial_x$, $g = 0$, $k(x) = r$, $f(x) = (x-K)^+$. On pose donc

$$dY_s = Y_s(r ds + \sigma dW_s), Y_t = x.$$

Alors $Y_s = x\exp[\sigma(W_s - W_t) + (s-t)(-\frac{1}{2}\sigma^2 + r)]$ et

$$C(t,x) = E[e^{-r(T-t)}(Y_T - K)^+ / Y_t = x]$$

est la solution attendue, le portefeuille étant donné par les équations (16).

La célèbre formule de Black-Scholes permet un calcul explicite de cette fonction, en posant Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard :

$$C(t,x) = x\Phi\left(\frac{\log(x/K) + (T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\log(x/K) + (T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{17}$$

Le prix initial q de l'option est alors donné par $C(0,x)$.

De fait, on résout plutôt avec le changement de (variable,fonction) :

$$x = e^y, y \in \mathbb{R}\ ;\ D(t,y) = C(t,e^y)$$

qui permet de se ramener au problème de Dirichlet plus simple

$$\partial_t D(t,y) + r\partial_y D(t,y) + \frac{1}{2}\partial^2_{y^2} D(t,y)\sigma^2 = rD(t,y), y \in \mathbb{R},$$

$$D(T,y) = (e^y - K)^+, y \in \mathbb{R},$$

associé à l'équation différentielle stochastique :

$$dX_s = rds + \sigma dW_s, s \in [t,T], X_t = y.$$

C'est exactement ce que l'on a vu dans la proposition 5.7, avec $g = 0$, $f(x) = (e^x - k)^+$, $k(x) = r$. *Donc,*

$$D(t,y) = E[e^{-r(T-t)}(e^{X_T} - K)^+/X_t = y],$$

d'où la formule explicite car la loi de X_T *est une gaussienne et on retrouve (17) : le prix au temps* t *est* $C(t,S_t) = E_Q e[^{-r(T-t)}(e^{X_T} - K)^+/\mathcal{F}_t]$ *dont le calcul est simple : la loi de* X_T *sachant* $\mathcal{F}_t$ *est une gaussienne de moyenne* $S_t + r(T-t)$ *et de variance* $\sigma^2(T-t)$.

6 Changement de probabilité et problème de martingales

La motivation de ce chapitre est la suivante : les martingales, et les martingales locales, sont des outils puissants, et cela vaut donc la peine de modéliser la réalité en sorte que les processus en jeu soient des martingales, au moins locales. Ainsi, pour l'application du calcul stochastique aux finances, les données sont celles d'un jeu de processus qui modélisent l'évolution dans le temps des prix des actions en cours sur le marché financier, et l'on peut légitimement se poser la question : est ce qu'il existe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ sur lequel les prix sont des martingales ? Précisément, existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ qui donne cette propriété ? D'où les deux problèmes abordés dans ce chapitre :

- comment passer d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ de façon simple, y a-t-il une densité $\frac{d\mathbb{P}}{dQ}$? comment se transforme alors le mouvement brownien ? et c'est le théorème de Girsanov, section 6.1,

- étant donnée une famille de processus adaptés sur l'espace probabilisable filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t))$, existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ telle que tous ces processus soient des martingales sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, et c'est ce que l'on appelle un problème de martingales, que l'on verra dans le chapitre 7,

- enfin on se pose le problème de la "représentation" des objectifs par rapport aux prix des actifs, c'est à dire trouver le portefeuille qui permet de réaliser un objectif au temps terminal, cf. section 6.3.

On se place donc a priori sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement brownien B, $B_0 = 0$ de dimension d. La filtration est celle engendrée par le mouvement brownien et l'on note $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ les martingales relatives à $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

On ajoute la notion de **martingales locales**, d'ensemble noté $\mathcal{M}_{loc}, (\mathbb{P})$ c'est à dire un processus M adapté tel qu'il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) croissant vers l'infini tel que pour tout n le processus arrêté en T_n M^{T_n} est une vraie martingale.

6.1 Théorème de Girsanov

([13] 3.5, p 190-196 ; [23] 3.6, p 108-114) Soit X un processus mesurable adapté dans $\mathcal{P}(B)$ c'est à dire que pour tout T :

$$\mathcal{P}(B) := \{X \text{ processus mesurable adapté } : \forall T, \int_0^T \| X_s \|^2 \, ds < +\infty \ \mathbb{P}\ p.s.\}$$

Cet ensemble est plus large que $\mathcal{L}(B) = L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, d\mathbb{P} \otimes dt)$.
De façon générale on définit pour une martingale M l'ensemble $\mathcal{P}(M)$ qui contient $\mathcal{L}(M) = L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, d\mathbb{P} \otimes d\langle M \rangle)$:

$$\mathcal{P}(M) := \{X \textit{ processus mesurable adapté } : \forall T, \int_0^T \| X_s \|^2 \, d\langle Y \rangle_s < +\infty \ \mathbb{P}\ p.s.\}$$

Pour de tels processus X, $X.M$ est seulement une martingale "locale".

On peut donc définir la martingale locale $X.B$ et son exponentielle de Doléans (exponentielle stochastique) dès que pour tout t $\int_0^t \| X_s \|^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ $p.s.$:

$$\mathcal{E}_t(X.B) = \exp[\int_0^t (X_s^i dB_s^i - \frac{1}{2} \| X_s \|^2 ds)],$$

solution de l'EDS

(18) $$dZ_t = Z_t \sum_i X_t^i dB_t^i \ ; \ Z_0 = 1,$$

qui est aussi une martingale locale puisque $\int_0^t Z_s^2 \| X_s \|^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ $p.s.$ par continuité de l'intégrand sur $[0,t]$.

Sous certaines conditions, $\mathcal{E}_.(X.B)$ est une "vraie" martingale, alors pour tout t, $E[Z_t] = 1$, ce qui permet d'effectuer le changement de probabilité sur la tribu $\mathcal{F}_t$:

$$Q = Z_t.\mathbb{P} \text{ c'est à dire si } A \in \mathcal{F}_t,\ Q(A) = E_{\mathbb{P}}[1_A Z_t].$$

Comme $Z_t > 0$, les deux probabilités sont équivalentes et $\mathbb{P}(A) = E_Q[Z_t^{-1}\mathbf{1}_A]$.

Théorème 6.1 *(Girsanov, 1960 ; Cameron-Martin, 1944) Si le processus $Z = \mathcal{E}(X.B)$ solution de (18) appartient à $\mathcal{M}(\mathbb{P})$, et si Q est la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par $Z_T.\mathbb{P}$ alors :*

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t X_s ds,\ t \leq T$$

est un mouvement brownien sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, Q)$.

La preuve nécessite un lemme préparatoire. Ci-dessous E_Q note l'espérance sous Q et $E_{\mathbb{P}}$ note l'espérance sous $\mathbb{P}$.

Lemme 6.2 *Soit $T \geq 0$, Z élément de $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ et $Q = Z_T\mathbb{P}$. Soit $0 \leq s \leq t \leq T$ et une variable Y aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable dans $L^1(Q)$, alors*

$$E_Q(Y/\mathcal{F}_s) = \frac{E_{\mathbb{P}}(YZ_t/\mathcal{F}_s)}{Z_s}.$$

Remarquons qu'il s'agit en quelque sorte d'une formule de Bayes.
Preuve (exercice 1 feuille 6) : Soit $A \in \mathcal{F}_s$, il vient :

$$E_Q(1_A \frac{E(YZ_t/\mathcal{F}_s)}{Z_s}) = E(1_A E(YZ_t/\mathcal{F}_s))$$

car sur $\mathcal{F}_s$, $Q = Z_s\mathbb{P}$. Puis : $E[1_A E(YZ_t/\mathcal{F}_s)] = E(1_A Y Z_t)$
par définition de l'espérance conditionnelle et enfin par définition de Q, et puisque $1_A Y$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable

$$E(1_A Y Z_t) = E_Q(1_A Y)$$

et ceci pour tout A de $\mathcal{F}_s$, ce qui permet d'identifier $\frac{E_{\mathbb{P}}(YZ_t/\mathcal{F}_s)}{Z_s}$ comme l'espérance conditionnelle attendue. *q.e.d.*

Proposition 6.3 *Sous les hypothèses du théorème de Girsanov, pour toute* $\mathbb{P}$*-martingale locale continue* M*, le processus* N *ci-dessous est une* $Q-$*martingale locale :*

$$N = M - \int_0 X_s^i d\langle M, B^i\rangle_s.$$

Preuve : exercice 2 feuille 6.

q.e.d.

On obtient en corollaire que $\tilde{B}$ est une Q-martingale de crochet t. Pour montrer que c'est un Q-mouvement brownien, il suffit de montrer soit qu'il s'agit d'un processus à accroissements indépendants de loi gaussienne, soit que c'est un processus gaussien.

On peut regarder maintenant les choses dans un ordre "inverse", c'est à dire chercher, lorsqu'il y a des probabilités équivalentes, le lien entre les martingales sous l'une et l'autre probabilités et par rapport à la même filtration.

Proposition 6.4 *Soit* $\mathbb{P}$ *et* Q *deux probabilités équivalentes sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et la martingale continue uniformément intégrable* $Z_t = E[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$*. Alors*
$M \in \mathcal{M}_{loc}^c(Q) \Leftrightarrow MZ \in \mathcal{M}_{loc}^c(\mathbb{P})$.

Preuve : Soit une suite (T_n) de temps d'arrêt localisante pour M : si l'on applique le lemme 6.2, il vient pour tout $s \leq t$:

$$E_Q[M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s] = \frac{E_{\mathbb{P}}[Z_t M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s]}{Z_s} \tag{19}$$

Alors le fait que $M^{T_n} \in \mathcal{M}(Q)$ implique que $(MZ)^{T_n} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.
Réciproquement, il suffit de prendre une suite de temps d'arrêt localisante pour ZM et d'appliquer à nouveau (19). *q.e.d.*

Théorème 6.5 *de Girsanov-Meyer : Soit $\mathbb{P}$ et Q deux probabilités équivalentes, $Z_t = E[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$ et X une semi-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de décomposition $X = M + A$. Alors, X est aussi une semi-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ de décomposition $X = N + C$, où*

$$N = M - \int_0^t Z_s^{-1} d\langle Z, M\rangle_s \ ; \ C = A + \int_0^t Z_s^{-1} d\langle Z, M\rangle_s.$$

Preuve : (i) C est un processus à variation finie comme somme de deux processus à variation finie.

(ii) On applique la proposition 6.4 à N et pour ce faire, on calcule le produit NZ par Itô sous $\mathbb{P}$.

$$d(NZ)_t = N_t dZ_t + Z_t dM_t - Z_t Z_t^{-1} d\langle Z, M\rangle_t + d\langle Z, N\rangle_t$$

Or, N est une $\mathbb{P}$-semi-martingale de partie martingale M : son crochet avec Z coïncide avec celui de M avec Z ce qui permet la simplification et montre que NZ est une $\mathbb{P}$-martingale donc N une Q-martingale. *q.e.d.*

6.2 Condition de Novikov

(cf [13] pages 198-201.)
Tout le paragraphe précédent est fondé sur l'hypothèse que le processus $\mathcal{E}(X.B)$ est une vraie martingale. On doit donc donner des conditions sur X pour que cette hypothèse soit réalisée. De façon générale, $\mathcal{E}(X.B)$ est au moins une martingale locale avec pour suite localisante par exemple :

$$T_n = \inf\{t \geq 0, \ \int_0^t \| \mathcal{E}_s(X.B) X_s \|^2 \, ds > n\}$$

Lemme 6.6 *$\mathcal{E}(X.B)$ est une surmartingale et c'est une martingale si et seulement si pour tout $t \geq 0$ on a $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$.*

Preuve : Il existe une suite croissante de temps d'arrêt T_n telle que pour tout n, $\mathcal{E}(X.B)^{T_n} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ donc pour tout $s \leq t$ on a

$$E[\mathcal{E}_{T_n \wedge t}(X.B)/\mathcal{F}_s] = \mathcal{E}_{T_n \wedge s}(X.B)$$

par le lemme de Fatou on déduit de cette égalité en passant à la limite que de fait $\mathcal{E}(X.B)$ est une surmartingale. (toute martingale locale positive est une surmartingale.) Comme $E[\mathcal{E}_0(X.B)] = 1$, il suffit que pour tout $t \geq 0$ on ait $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$ pour que $\mathcal{E}(X.B)$ soit une martingale. *q.e.d.*

Proposition 6.7 *Soit M une martingale locale continue pour $\mathbb{P}$ et $Z = \mathcal{E}(M)$ telle que $E[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_t] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Alors pour tout $t \geq 0, E[Z_t] = 1$.*

Corollaire 6.8 *(Novikov, 1971) : Soit X un processus mesurable adapté tel que :*

$$E[\exp \frac{1}{2} \int_0^t \| X_s \|^2 ds] < \infty \textit{ pour tout } t \geq 0$$

alors $\mathcal{E}(X.B) \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.

Pour terminer ce paragraphe, voici un exemple de processus $X \in \mathcal{P}(B)$ ne vérifiant pas la condition de Novikov, tel que $\mathcal{E}(X.B) \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ mais n'est pas une "vraie" martingale : c'est l'exercice 3 de la feuille 6.

Soit le temps d'arrêt $T = \inf\{1 \geq t \geq 0, t + B_t^2 = 1\}$ et

$$X_t = -\frac{2}{(1-t)^2} B_t 1_{\{t \leq T\}} \ ; \ 0 \leq t < 1, \ X_1 = 0.$$

(i) Montrer que $T < 1$ presque sûrement et donc que $\int_0^1 X_t^2 dt < \infty$ presque sûrement.

(ii) Appliquer la formule de Itô au processus $t \to \frac{B_t^2}{(1-t)^2}$; $0 \leq t < 1$ pour montrer que :

$$\int_0^1 X_t dB_t - \frac{1}{2} \int_0^1 X_t^2 dt = -1 - 2 \int_0^T [\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t)^3}] B_t^2 dt < -1.$$

(iii) La martingale locale $\mathcal{E}(X.B)$ n'est pas une martingale (pas jusqu'au temps 1 en tout cas !) : on déduit de (ii) que son espérance est majorée par $\exp(-1) < 1$ ce qui contredit le lemme 6.6.

Cependant on peut montrer que pour tout $n \geq 1$ et $\sigma_n = 1-(1/\sqrt{n})$, le processus $\mathcal{E}(X.B)^{\sigma_n}$ est une martingale.

6.3 Théorème de représentation des martingales

(cf Protter [23], pages 147-157.)

L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'une classe assez large de martingales peut s'écrire (se "représenter" par) $X.B$: il existe $X \in \mathcal{P}(B)$ tel que $M_t = M_0 + \int_0^t X_s dB_S$.

C'est cet outil qui permettra de résoudre le problème de la "couverture" d'une option.

NOTATIONS :

$\mathcal{M}^{2,c}$ est l'ensemble des martingales continues de carré intégrable ;

$\mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ est l'ensemble des martingales locales continues de carré intégrable.

6.3.1 Définitions

A sauter en première lecture.

On étudie les martingales de $\mathcal{M}^{2,c}$ qui de plus sont nulles à l'origine et vérifie $\langle M\rangle_\infty \in L^1$. Car alors $\sup_t E[M_t^2] = \sup_t E[\langle M\rangle_t] = E[\langle M\rangle_\infty] < \infty$. Ces martingales sont uniformément intégrables, il existe M_∞ telle que pour tout $t \leq 0$, $M_t = E[M_\infty/\mathcal{F}_t]$. On note $\mathcal{H}_0^2$ leur ensemble.

$$\mathcal{H}_0^2 = \{M \in \mathcal{M}^{2,c}, M_0 = 0, \langle M\rangle_\infty \in L^1\}.$$

Définition 6.9 *Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{H}_0^2$ est appelé* **sous-espace stable** *si pour tout $M \in F$ et pour tout temps d'arrêt T alors $M^T \in F$.*

Définition 6.10 *Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$. On note $S(\mathcal{A})$ le plus petit sous espace vectoriel fermé stable contenant $\mathcal{A}$.*

Définition 6.11 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2$. On dit que $\mathcal{A}$ a la* **propriété de représentation prévisible** *si :*

$$\mathcal{I} = \{X = \sum_{i=1}^n H^i M^i,\ M^i \in \mathcal{A}, H^i \in \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i\rangle)\} = \mathcal{H}_0^2.$$

Définition 6.12 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. On note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{F}_\infty$ absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$, égales à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_0$, et telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(Q)$.*

Lemme 6.13 *$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est convexe.*

Preuve en exercice.

Définition 6.14 *$Q \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dite* **extrémale** *si*

$$Q = aQ_1 + (1-a)Q_2, a \in [0,1], Q_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow a = 0 \text{ ou } 1.$$

Théorème 6.15 *Soit $\mathcal{A} = (M^1, \cdots, M^n) \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ avec $M^i \dagger M^j, i \neq j$. $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ implique que $\mathcal{A}$ a la propriété de représentation prévisible.*

6.3.2 Théorème fondamental

Théorème 6.16 *Soit B un mouvement brownien de dimension d sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. Alors pour tout $M \in \mathcal{M}_{loc}^{c,2}$, il existe un unique vecteur de processus $(H^j \in \mathcal{P}(B^j), j = 1, \cdots, d)$ tel que :*

$$M_t = M_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t H_s^j dB_s^j.$$

Preuve en exercice : c'est une application du théorème 6.15 aux composantes du mouvement brownien dont on montre que $\mathbb{P}$ est l'unique élément de $\mathcal{M}(B)$. Puis on localise la martingale M.

Corollaire 6.17 *Sous les mêmes hypothèses, soit* $Z \in L^1(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$*, alors il existe un unique vecteur* H *tel que* $H^j \in \mathcal{P}(B^j), j = 1, \cdots, d$*, et :* $Z = E[Z] + \sum_{j=1}^d (H^j.B^j)_\infty$.

Preuve : on applique le théorème à la martingale $M_t = E[Z/\mathcal{F}_t]$ et on fait tendre t vers l'infini.

q.e.d.

Remarquer alors que, si $\mathbb{P}$ et Q sont deux probabilités équivalentes, et si on note Z la variable $\mathbb{P}-$intégrable $\frac{dQ}{d\mathbb{P}}$, alors la martingale $Z_t = E_{\mathbb{P}}[Z/\mathcal{F}_t]$ est une martingale exponentielle : il existe un processus ϕ tel que $dZ_t = Z_t \phi_t dB_t$.

6.3.3 Application : recherche d'une probabilité neutre au risque

On suppose que les actifs sous-jacents sont de prix $S^i, i = 1, ...n$, semi-martingales strictement positives de la forme

$$dS_t^i = S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sum_j \sigma_j^i(t) dB_t^j.$$

Soit par ailleurs la probabilité équivalente $Q = \mathcal{E}(\phi.B)\mathbb{P} = Z\mathbb{P}$. Par le théorème de Girsanov, pour tout j :

$$\tilde{B}_t^j = B_t^j - \int_0^t \phi_s^j ds$$

est un Q-mouvement brownien. Donc, de fait, S^i sont aussi des Q-semi-martingales de la forme :

$$dS_t^i = S_t^i (b_t^i + \sum_j \sigma_j^i(t) \phi_t^j) dt + S_t^i \sum_j \sigma_j^i(t) d\tilde{B}_t^j.$$

Le problème est donc ramené à trouver un vecteur ϕ dans $\mathcal{L}(B)$ vérifiant (par exemple) la condition de Novikov tel que pour tout $i = 1, ...n$

$$b_t^i + \sum_j \sigma_j^i(t) \phi_t^j = 0,$$

soit n équations à d inconnues.
Exercice : résoudre lorsque $n = d = 1$, puis $n = d$. Que faire si $n \neq d$?

6.3.4 Application : couverture d'une option

Dans le cas d'un marché complet, grâce au théorème de représentation, on peut assurer ce que l'on appelle la "couverture" d'une option. On rappelle qu'il s'agit d'un actif financier fondé sur une action de prix p, mais c'est un droit que l'on peut exercer à terme de deux façons :

- une option call de valeur terminale $(S_T - K)^+$,

- une option put de valeur terminale $(K - S_T)^+$,

K étant le prix d'exercice de l'option et T le terme (ou : maturité). Concrètement, on achète au temps 0 le droit d'acheter au prix K même si le prix S_T est au dessus (call) ou le droit de vendre au prix K même si le prix S_T est en dessous (put). Mais pour trouver le "juste prix" de ce contrat, il faut que le vendeur de l'option puisse honorer le contrat, donc placer la somme obtenue en vendant le contrat en sorte de pouvoir (au moins en moyenne) au temps T payer l'acheteur.

Définition 6.18 *On appelle "juste prix" de l'objectif H (fair price, en anglais) le plus petit $x \geq 0$ tel qu'il existe une stratégie π admissible et autofinançante réalisant la richesse X^π avec le prix actualisé $e^{-rT} X_T^\pi = H, X_0^\pi = x$.*

Par exemple pour l'option "call", l'objectif est $c_T = (S_T - K)^+$, et le vendeur du contrat cherche à le "couvrir". C'est là que servent les théorèmes de "représentation" des martingales..... Si r est le taux courant d'actualisation (par exemple taux de caisse d'épargne), $e^{-rT} X_T$ est l'objectif actualisé. Supposons que l'on se place dans le cadre de 6.3.3 avec $n = d$, σ inversible et le marché admet une probabilité neutre au risque sur $\mathcal{F}_T$: $Q = \mathcal{E}_T(\phi.B)\mathbb{P}$. D'après le théorème fondamental il existe un vecteur θ tel que

$$e^{-rT} X_T = E_Q[e^{-rT} X_T] + \int_0^T \sum_j \theta_t^j d\tilde{B}_t^j. \tag{20}$$

Or, avec la définition du Q-mouvement brownien $\tilde{B}$ vu ci-dessus :

$$dS_t^i = S_t^i \sum_j \sigma_j^i(t) d\tilde{B}_t^j$$

soit pour tout j

$$d\tilde{B}_t^j = (S_t^i)^{-1}(\sigma^{-1})_i^j(t)dS_t^i$$

que l'on remplace dans (20):

$$e^{-rT}X_T = E_Q[e^{-rT}X_T] + \int_0^T \sum_{i,j} \theta_t^j (S_t^i)^{-1}(\sigma^{-1})_i^j(t)dS_t^i$$

ce qui permet d'identifier le portefeuille de couverture

$$\pi_t^i = (S_t^i)^{-1} \sum_j \theta_t^j (\sigma^{-1})_i^j(t)$$

et le juste prix est alors :

$$q = E_Q[e^{-rT}X_T].$$

7 Modèle financier en temps continu avec des prix continus.

On peut voir, entre autres, [6] chap 12.1 à 12.5 ou [13] section 5.8, pages 371 et sq. On suppose ici l'hypothèse AOA, donc les processus de prix sont des semi-martingales.

7.1 Constitution du modèle

On se place en horizon fini : $t \in [0, T]$, le marché noté S comporte $N + 1$ actifs financiers dont les prix sont des semi-martingales continues dont on peut vendre et acheter des quantités réelles, mais il n'y a pas de coûts d'échange ou de transaction. Ces processus de prix sont supposés continus, construits sur un espace de Wiener, espace de probabilité filtré : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ sur lequel est défini un mouvement brownien de dimension d noté B. De plus, on suppose que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_T = \mathcal{A}$.

Hypothèse sur le marché S : Le premier actif est à taux sans risque, type caisse d'épargne (bond, en anglais) :

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt, \ r > 0, \ S_0^0 = 1.$$

C'est à dire que $S_t^0 = e^{rt}$.
Puis N actifs risqués sur le marché sont supposés des semi-martingales strictement positives vérifiant $\forall n = 1, ..., N$, il existe une semi-martingale x^n telle que :

$$S_t^n = \mathcal{E}_t(x^n), \ t \in [0, T].$$

Concrètement,

$$dx_t^n = \sigma_j^n(t) dB_t^j + b^n(t) dt, n = 1, \cdots, N; dx_t^0 = rdt.$$

Hors programme : Il existe un bien de consommation périssable. et il y a I agents économiques ayant accès à l'information $\mathcal{F}_t$ au temps t. Pour tout $i = 1, \cdots, I$, le $i-$ème agent dispose de ressources $e_0^i \in \mathbb{R}^+$ au début et $e_T^i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ à la fin, et de même consomme $c_0^i \in \mathbb{R}$ au début et $c_T^i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ à la fin. Il n'y a ni ressource ni consommation intermédiaire.

On note X une partie de $\mathbb{R} \times \mathcal{A}(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ l'ensemble des objectifs à atteindre, muni d'une relation de préférence complète, continue, croissante et convexe (que l'on construira plus tard et qui diffère d'une relation d'ordre : il manque l'antisymétrie et la transitivité).

Définition 7.1 *Une relation de préférence (notée $\prec$) est dite* **complète** *si pour tout c_1 et c_2 de X, on a ou bien $c_1 \prec c_2$ ou bien $c_2 \prec c_1$*
Elle est dite **continue** *si $\forall c \in X$, $\{c' \in X, \ c' \prec c\}$ et $\{c' \in X, \ c \prec c'\}$ sont des fermés.*
Elle est dite **croissante** *si toutes les coordonnées de c' sont supérieures ou égales à celles de c, alors $c \prec c'$.*
Elle est dite **convexe** *si c' et $c" \prec c$ alors pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha c' + (1 - \alpha) c" \prec c$.*

7.2 Mesure de prix d'équilibre ou probabilité neutre au risque

Définition 7.2 *Etant donné un système de prix* $(S^0, \cdots, S^N)$*, une* **mesure de prix d'équilibre** *ou probabilité neutre au risque sur* $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ *est une probabilité* Q *équivalente à* $\mathbb{P}$ *telle que les prix actualisés* $e^{-rt}S^n$*, notés* $\tilde{S}^n$*, sont des* Q*-martingales locales.*

On note $\mathcal{Q}_S$ l'ensemble de telles probabilités.
Supposant alors que $\mathcal{Q}_S$ **est non vide** on choisit $Q \in \mathcal{Q}_S$; elle n'est pas forcément unique, mais la plupart des résultats sont indépendants de l'élément choisi dans cet ensemble $\mathcal{Q}_S$. Cette hypothèse implique l'absence d'arbitrage (définition 7.7 et théorème 7.9 ci-dessous). Néanmoins, contrairement à ce que l'on lit trop souvent, elle ne lui est pas équivalente. C'est une condition suffisante mais pas nécessaire à l'absence d'arbitrage. Elle est en revanche équivalente à une condition appelée NFLVR (cf. [5]).

Exercice : traduisons dans ce contexte l'hypothèse majeure du modèle, à savoir l'existence d'une mesure Q *de prix d'équilibre, c'est à dire que les prix actualisés* $\tilde{S}^n$ *sont des martingales.*

Ceci se traite bien par la formule de Ito :

$$(21)\ d\tilde{S}^n_t = e^{-rt}dS^n_t - rS^n_t e^{-rt}dt = \tilde{S}^n_t(dx^n_t - rdt) = \tilde{S}^n_t[\sum_j \sigma^n_j(t)dB^j_t + (b^n(t) - r)dt].$$

Il s'agit donc de trouver Q équivalente à $\mathbb{P}$ et un $Q-$ mouvement brownien $\tilde{B}$ tel que $dx^n_t - rdt = \sigma d\tilde{B}$. On utilise ici le théorème de Girsanov en notant $Z_t = E_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{P}}{dQ}/\mathcal{F}_t]$ qui est une martingale pouvant se "représenter"' par rapport au mouvement brownien B de dimension d : il existe un processus vecteur $X \in \mathcal{P}(B)$ tel que $dZ_t = Z_t \sum_{j=1}^d X^j dB^j_t$. Trouver Q neutre au risque revient à trouver X.
Terminer l'exercice en supposant par exemple que la matrice ${}^t\sigma.\sigma$ est de rang d donc inversible et qu'il y a une condition type Novikov sur le vecteur $v_. = ({}^t\sigma_.\sigma_.)^{-1} \times {}^t\sigma_.(b_. - r_.\mathbf{1})$ où $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)$. Plus généralement, discuter l'existence de l'existence de probabilités neutres au risque selon que $d =, <, > N$.

7.3 Stratégies d'échange

Notation : ci-dessous, $\langle x, y\rangle$ *note le produit scalaire entre les deux vecteurs* x *et* y*, à ne pas confondre avec le crochet stochastique entre deux martingales ou semi-martingales !*

Une stratégie est un portefeuille θ, processus $\mathcal{F}$-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^{N+1}$, θ^n représentant la part du portefeuille investie dans le $n$ième actif financier. Les conditions à imposer sont celles qui permettent au processus réel $\int \langle \theta_s, dS_s \rangle$ d'être bien défini : θ doit être intégrable sur $[0,t]$, $\forall t$ par rapport respectivement à la partie martingale et la partie à variation finie de la semi-martingale qu'est le prix actualisé $\tilde{S}^n$. Cette quantité $\int_0^t \langle \theta_s, dS_s \rangle$ représente le gain issu de l'échange entre 0 et t et $\int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{S}_s \rangle$ représente le gain actualisé issu de l'échange entre 0 et t.

Définition 7.3 *Une* **stratégie admissible** *est un processus adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^{N+1}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ *stochastiquement intégrable (cf. la section 3.1) par rapport au vecteur prix* S.

Définition 7.4 *Une stratégie est* **autofinançante** *si, de plus, pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$ *la valeur du portefeuille :*

$$V_t(\theta) = \langle \theta_t, S_t \rangle = \langle \theta_0, S_0 \rangle + \int_0^t \langle \theta_s, dS_s \rangle.$$

Remarque: Ceci s'interprète de la manière suivante : il n'y a pas de ressources externes, seule la variation du portefeuille fait évoluer la richesse.
Ceci est peut-être plus clair en discret :

$$(22) \qquad \begin{array}{rcl} V_{t+1} - V_t & = & \langle \theta_{t+1}, S_{t+1} \rangle - \langle \theta_t, S_t \rangle = \langle \theta_{t+1}, S_{t+1} - S_t \rangle \\ \text{équivaut} & & \langle \theta_{t+1}, S_t \rangle = \langle \theta_t, S_t \rangle. \end{array}$$

Le portefeuille se fait de t à $t+1$ par réorganisation interne entre les différents actifs.

Ce n'est pas obligé, mais ici on a supposé que les prix sont des exponentielles stochastiques, ainsi est-on assuré qu'ils restent positifs.

Théorème 7.5 *Soit* θ *une stratégie admissible. Elle est autofinançante si et seulement si la valeur actualisée du portefeuille* $\tilde{V}_t(\theta) = e^{-rt} V_t(\theta)$ *vérifie :*

$$\tilde{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{S}_s \rangle$$

où le produit scalaire est dans $\mathbb{R}^N$ *au lieu de* $\mathbb{R}^{N+1}$ *puisque* $d\tilde{S}_s^0 = 0$.

Preuve en exercice, à l'aide de la formule de Ito pour le produit $e^{-rt} \times V_t(\theta)$ et (21).

Corollaire 7.6 *Soit Q une mesure de prix d'équilibre. Pour toute stratégie θ autofinançante élément de $\mathcal{P}(\tilde{S})$, la valeur actualisée du portefeuille est une $Q-$martingale locale.*

Preuve en exercice.

Définition 7.7 *On dit que θ est une* **stratégie d'arbitrage** *si elle est admissible, autofinançante et vérifie l'une des trois propriétés :*

$$\langle\theta_0, S_0\rangle \leq 0 \text{ et } \langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0 \text{ presque sûrement et } \neq 0 \text{ avec une probabilité } > 0,$$
$$\langle\theta_0, S_0\rangle < 0 \text{ et } \langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0 \text{ presque sûrement,}$$
$$\langle\theta_0, S_0\rangle = 0 \text{ et } \langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0 \text{ presque sûrement et } \neq 0 \text{ avec une probabilité } > 0. \tag{23}$$

Preuve de l'équivalence des trois définitions en exercice.
Par exemple, $2 \Rightarrow 3$, si $\langle\theta_0, S_0\rangle = a < 0$, on définit une nouvelle stratégie qui va vérifier la dernière propriété :

$$\theta'^n = \theta^n, n = 1, \cdots, N \ ; \ \theta'^0(t) = \theta^0(t) - ae^{-rt}, \forall t \in [0, T].$$

Alors,

$$\langle\theta'_0, S_0\rangle = \theta'^0_0, S^0_0 + \sum_1^N \langle\theta^n_0, S^n_0\rangle = \langle\theta_0, S_0\rangle - a = 0$$

et $\langle\theta'_T, S_T\rangle = \langle\theta_T, S_T\rangle - ae^{-rT}e^{rT} > \langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0$. Donc, $\langle\theta'_T, S_T\rangle$ est positif et non nul.

q.e.d.

Définition 7.8 *Un marché sans stratégie d'arbitrage est dit* **viable** *(cf. la définition de l'hypothèse AOA dans le chapitre 4).*

On va donner des conditions suffisantes pour qu'un marché S soit viable.

Théorème 7.9 *(cf. [6], 12.2 et sq.) Si l'ensemble $\mathcal{Q}_S$ est non vide alors le marché est viable.*

Preuve en exercice avec les étapes suivantes (soit $Q \in \mathcal{Q}_S$) :
1. Si pour toute stratégie autofinançante $\tilde{V}_t(\theta)$ est une $Q-$surmartingale, alors le marché est viable.
Le fait que $\tilde{V}_t(\theta)$ soit une $Q-$surmartingale s'écrit :

$$\forall s \leq t, \ E_Q[\tilde{V}_t(\theta)/\mathcal{F}_s] \leq \tilde{V}_s(\theta).$$

En particulier puisque la tribu initiale $\mathcal{F}_0$ est triviale, pour $s = 0$,

$$E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] \leq \tilde{V}_0(\theta) \text{ c'est à dire } \langle \theta_0, S_0 \rangle.$$

Supposons qu'il existe une stratégie d'arbitrage : $\langle \theta_0, S_0 \rangle = 0, \langle \theta_T, S_T \rangle \geq 0$.
Donc $E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] \leq 0$ et puisque $\tilde{V}_T(\theta) = e^{-rT}\langle \theta_T, S_T \rangle \geq 0$, $\tilde{V}_T(\theta) = 0$ et la stratégie θ ne peut être d'arbitrage.
2. Si toute stratégie autofinançante de $\mathcal{P}(\tilde{S})$ est telle que $\tilde{V}_t(\theta) \geq 0$, alors le marché est viable.
Puisque la stratégie θ est autofinançante,

$$\tilde{V}_t(\theta) = \langle \theta_0, S_0 \rangle + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{S}_s \rangle.$$

Le corollaire 7.6 montre que $\tilde{V}_t(\theta)$ est alors une $Q-$martingale locale. Comme elle est positive, c'est une surmartingale (cf. la preuve du lemme 6.6) et l'on est ramené à (1) pour conclure. *q.e.d.*

En conclusion, pour éviter l'arbitrage, on ajoute dans la définition de l'admissibilité d'une stratégie θ l'obligation de vérifier

$$V_t(\theta) \geq 0, \ dt \otimes d\mathbb{P} \text{ presque sûrement .}$$

Remarque 7.10 *On voit là la suite d'implications : $\mathcal{Q}_S$ est non vide $\Rightarrow$ l'interdiction de tout arbitrage $\Rightarrow$ les prix sont des semi-martingales sans pour autant avoir les réciproques.....*

7.4 Marché complet

On utilise ici les outils introduits dans le paragraphe 6.3. Soit $Q \in \mathcal{Q}_S$.

Définition 7.11 *On dit qu'un objectif $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ (contingent claim) est* **simulable** *ou* **atteignable** *sous la probabilité Q s'il existe une stratégie admissible autofinançante θ et un réel x tels que*

$$X = \langle \theta_T, S_T \rangle = x + \int_0^T \theta_s.dS_s.$$

On dit qu'un marché est **complet** *sous la probabilité Q pour le système de prix S si tout $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ est simulable.*

On cherche dans ce paragraphe à caractériser les marchés complets, ou du moins à mettre en évidence des conditions suffisantes de complétude.

Théorème 7.12 *Un objectif X est simulable si et seulement s'il existe un processus vectoriel $\alpha \in \mathcal{P}(\tilde{S})$ de dimension N tel que :*

$$E_Q[X/\mathcal{F}_t] = e^{-rT}E_Q[X] + \int_0^t \langle \alpha_s, d\tilde{S}_s \rangle.$$

Preuve :

Si X est simulable, cela signifie qu'il existe une stratégie θ admissible et autofinançante et un réel x tels que $X = V_T(\theta) = \langle \theta_T, S_T \rangle = x + \int_0^T \langle \theta_s, dS_s \rangle$.
Puisque θ est admissible elle est par définition stochastiquement intégrable par rapport à S donc $\tilde{S}$; elle est autofinançante c'est à dire (cf. théorème 7.5) que $d\tilde{V}_t(\theta) = \langle \theta_t, d\tilde{S}_t \rangle$.
Or
$X = \langle \theta_T, S_T \rangle$ soit $\tilde{V}_T(\theta) = e^{-rT}X$ et enfin $\tilde{V}(\theta)$ est une martingale :

$$\tilde{V}_t(\theta) = E_Q[\tilde{V}_T(\theta)/\mathcal{F}_t] = E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{S}_s \rangle.$$

Le premier terme est bien $e^{-rT}E_Q[X]$ et on identifie le processus α cherché comme étant la stratégie θ sur les coordonnées de 1 à N.

Réciproquement, si α existe, on définit la stratégie

$$\theta^n = \alpha^n,\ n = 1, \cdots, N\ ;\ \theta^0 = e^{-rT}E_Q[c(T)] + \int_0^T \langle \alpha_s, d\tilde{S}_s \rangle - \sum_1^N \langle \theta_s^n, \tilde{S}_s^n \rangle.$$

On vérifie que cette stratégie permet effectivement à l'objectif X d'être simulable, puis, que cette stratégie proposée θ est effectivement autofinançante. *q.e.d.*

On admet le théorème :

Théorème 7.13 *Soit Q une mesure de prix d'équilibre. Si $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset)$, on a les équivalences :*

(i) Le marché est complet relativement au système de prix $\{S\}$.

(ii) $\mathcal{Q}_S = \{Q\}$

En exercie, preuve de ce théorème dans le cas de N actifs guidés par un $d-$mouvement brownien B

$$dS_t^i = S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sigma_t^{ij} dB_t^j.$$

References

[1] L. BACHELIER: “Théorie de la spéculation” : Annales scientifiques de l’école normale supérieure,17, 21-88, Paris, 1900.

[2] F. BLACK and M. SCHOLES : “The pricing of options and corporate liabilities”, Journal of Political Economy, 3, 637-654,1973.

[3] J.C. COX and S.A. ROSS : “ The valuation of options for alternative stochastics processes”, Journal of Financial Economics, 7, 229-263, 1979.

[4] Rose Ann DANA et Monique JEANBLANC : “Marchés financiers en temps continu, valorisation et équilibre”, Economica, deuxième édition, Paris, 1998.

[5] F. DELBAEN and W. SCHACHERMAYER, “A general version of the fundamental theorem of asset pricing”, Math. Ann. 300, 463-520, 1994

[6] M.U. DOTHAN : “Prices in financial Markets”, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[7] A. FRIEDMAN : Stochastic Differential Equations and Applications, I , Academic Press, New-York ,1975.

[8] J.M. HARRISON and D.M.KREPS : “Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets”, Journal of Economic Theory, 20, 381-408, 1979.

[9] J.M. HARRISON and S. PLISKA : “Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading”,Stochastics Processes and their Applications, 11,215-260, 1981.

[10] C. HUANG, “Information structure and equilibrium asset prices”, Journal of Economic Theory, 35, 33-71, 1985.

[11] K. ITO and H.P. Mc KEAN : “Diffusion Processes and their sample paths”, Springer-Verlag, New York, 1974.

[12] J. JACOD : “Calcul stochastique et problèmes de martingales”, Lecture Notes 714, Springer-Verlag, New York, 1979.

[13] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : “Brownian Motion and Stochastic calculus”, Springer-Verlag, New York, 1988.

[14] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : “Methods of Mathematical Finance”, Springer-Verlag, New York, 1998.

[15] H. KUNITA and S. WATANABE : “On square integrable martingales” Nagoya Mathematics Journal, 30, 209-245, 1967.

[16] D. LAMBERTON et B. LAPEYRE : “Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance”, Ellipses, Paris,1991.

[17] D. LEPINGLE et J. MEMIN : “Sur l’intégrabilité uniforme des martingales exponentielles”, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 42, p175-203, 1978.

[18] R.S. LIPTSER and A.N. SHIRYAEV : “Statistics of Random Processes”, Springer-Verlag, New York, 1977.

[19] H.P. Mc KEAN : “Stochastic Integrals”, Academic Press, New-York, 1969.

[20] M. MUSIELA and M. RUTKOWSKI : “Martingale Methods in Financial Modelling”,Springer-Verlag, New-York, 1997.

[21] J. NEVEU : “Martingales à temps discrets”, Masson, Paris, 1972.

[22] S. R. PLISKA : “Introduction to Mathematical Finance”, Blackwell, Oxford, 1998.

[23] P. PROTTER : “Stochastic Integration and Differential Equations”, Springer-Verlag, New York, 1990.

[24] F. QUITTARD-PINON : “Marchés de capitaux et théorie financière”, Economica, Paris, 1993.