FSEJES-Oujda filiére science co et gestion S1-Groupe B

Analyse Mathématique :

1^{er} Chapitre : Complément sur les fonctions numériques

Yassine FNITIZ

Chapitre ① : Complément sur les fonction numérique

I. Généralité :

1. La fonction numérique :

C'est une application f d'une partie I de $\mathbb{R}$ (I ensemble de départ) et à valeurs dan $\mathbb{R}$ (ensemble d'arrivés). On note :

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

- $f(x)$ l'image de x par f
- x la variable de f

2. Domaine de définition de f :

L'ensemble des éléments de I pour lesquels la formule de f a un sens.

$$D_f = \{ x \in I \,/\, f(x) \text{ existe} \}$$

3. Graphe ou Courbe représentatif de f :

une partie de $I \times \mathbb{R}$: $G_f = \{ (x, f(x) \,/\, x \in I \}$ le graphe peut être représenté géographiquement ou géométriquement dans le plan cartésien sous forme d'une courbe.

Exemple :

- $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \; ; \; G_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = ax + b \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

- $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\Rightarrow D_g =]1, +\infty[\; ; \; G_g \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right. \subseteq \boxed{]1, +\infty[\times \mathbb{R}^+}$$

- $h(x) = \sqrt{-1 - x^2} \Rightarrow D_h = \emptyset$

4. Opération sur les fonctions :

Soit $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 fonction :

a) égalité : $f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \; \forall x \in I$

b) Somme : $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \; \forall x \in I$

c) Produit : $(fg)(x) = g(x) f(x) \; \forall x \in I$

d) Produit d'une fonction par un réel :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \; \forall x \in I, \alpha \in \mathbb{R}$$

e) quotient de deux fonctions :

$$\text{si } g \neq 0 \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in I$$

f) Composé de deux fonctions : si f définie $f : I \to \mathbb{R}$ alors la composé de f et g donn par $(g \circ f) = g(f(x))$

II. Limites :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$; où I est un intervale de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point de I ou une extrémité de I.

1 Limites finies en x_0 :

f admet la limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 (f tend vers l quand x tend vers x_0)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \; |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Cela signifie que lorsque x s'approche de x_0, f s'approche de l, on écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

2. limites finies au voisinage de l'infinie :

f admet la limite $l \in \mathbb{R}$ au voisinage de I (ou f tends vers l quand x tends vers $\pm\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists B ; \forall x \in B (x < -B) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Cela signifie que $f(x)$ s'approche de l quand x est suffisement grand ou petit selon le cas et on écrit :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

3. limite infinie en x_0 :

f admet la limite $\pm\infty$ en x_0 :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I ; |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A, (f(x) < -A$$

et on écrit : $\lim\limits_{x_0} f(x) = \pm\infty$

4. limite infinie au voisinage de l'infini

f tends vers $\pm\infty$ quand x tends vers $\pm\infty$

$\forall A>0, \exists B>0, \forall x \in I \quad x>B \ (x<-B) \Rightarrow f(x)>A \ (f(x)<-A)$

On écrit : $\lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

5. limite à droite et à gauche en x_0 :

f admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite à droite en x_0 si :

$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in I \ / \ 0<x-x_0<\alpha$

$\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$ on écrit $\lim_{x_0^+} f(x) = \ell$

Théoréme : f admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite si seulement si limite à droite en x_0 et limite à gauche en x_0 existent et égale à ℓ, alors :

$\lim_{x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x_0^+} f(x) = \lim_{x_0^-} f(x) = \ell$

6. Propriété des limites :

- la limite d'une fonction quand elle existe est unique
- $\lim_{x_0} f(x)$ et si $f(x) \geq 0$ (ou $f(x) \leq 0$) sur un voisinage de x_0 alors $\ell \geq 0$ ($\ell \leq 0$)

7. Opérations sur les limites :

- soit f et g : $I \to \mathbb{R}$ deux fonctions x_0 un point de I ou une extrémité de I alors $\lim_{x_0} (f+g)(x) = \lim_{x_0} f(x) + \lim_{x_0} g(x)$
- $\lim_{x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x_0} f(x) \times \lim_{x_0} g(x)$
- $\lim_{x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x_0} f(x)$
- $\lim_{x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x_0} f(x)}{\lim_{x_0} g(x)}$ ($g \neq 0$ sur I / $\lim_{x_0} g(x) \neq 0$)
- si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{y \to b} g(y) = \ell$ alors $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$
- limite par encadrement : soit h une fonction tel que $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \ \forall x \in I$
- limite par majoration ou par minoration :

$f(x) \leq g(x) \ \forall x \in I$:

- Si on a $\lim_{x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x_0} g(x) = +\infty$
- Si on a $\lim_{x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x_0} f(x) = -\infty$

Remarque : les mêmes propriétées sont valables à gauche ou à droite de x_0 ou à ∞

8. Branche infinie :

- $\lim_{x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ la courbe représentatif de f admet la droite d'equation $x = x_0$ comme asymptôte verticale.
- $\lim_{\pm\infty} f(x) = y_0 \Rightarrow$ la courbe représentatif de f admet la droite d'equation $y = y_0$ comme asymptôte horizontale
- $\lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on calcule $\frac{f(x)}{x}$:
  - $\lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow f$ admet une branche parabolique asymptotique (ox)
  - $\lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \Rightarrow f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique (oy)
    - $\rightarrow \lim_{\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty \Rightarrow f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$
    - $\rightarrow \lim_{\pm\infty} f(x) - ax = b \Rightarrow f$ admet une asymptote oblique de direction $y = ax + b$

III. Continuité :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$

1. Continuité en un point :

f est continue en x_0 si :

$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in I \ |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

2. Continuité à gauche et à droite :

f est continue à droite (à gauche) en x_0 si :

$\lim_{x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim_{x_0^-} f(x) = f(x_0)\right)$

Théorème : f est continue en x_0 sss f est continue à droite et à gauche en x_0 : $\lim_{x_0^+} f(x) = \lim_{x_0^-} f(x) = f(x_0)$

3. Continuité sur un intervalle :

f est continue sur un intervalle I si elle l'est en tout point de I.

Remarque :

la somme, le produit, le quotient et la composé de fonctions continues sont continues (en un point ou un intervalle)

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction sur $[a,b]$ alors pour tout x_1, x_2 de $[a,b]$ et pour toute valeur λ comprise $f(x_1)$ et $f(x_2)$ il existe enmoins un point $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \lambda$

Corrolaire :

- Si $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ il existe en moins $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = 0$
- l'image par une fonction continue f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ reste un intervalle de $\mathbb{R}$

Exemple :

Verifiant que l'equation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ admet une solution sur $]0,1[$

$\Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - 1$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier sur $[0,1]$) et on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$

donc : $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$

et puisque $f(0)$ et $f(1) \neq 0$

d'après TVI $\exists x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x) = 0$

Théorème des bornes :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ alors f atteint ses bornes sur $[a,b]$

$\exists\, c, c' \in [a,b]$ tel que

$\min_{x \in [a,b]} f(x) = f(c)$ et $\max_{x \in [a,b]} f(x) = f(c')$

$c = \arg\min_{x \in [a,b]} f(x)$ et $c' = \arg\max_{x \in [a,b]} f(x)$

$\alpha = \min_{[a,b]} f(x)$ (respectement $\beta = \max_{[a,b]} f(x)$)

$\Rightarrow \alpha \leq f(x)$ $(\beta \geq f(x))$ $\forall x \in [a,b]$

Théorème du point fixe :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ alors il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$

IV. Dérivabilité :

Soit un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$

$f : I \to \mathbb{R}$

1) Dérivabilité en un point :

f est dérivable en x_0 sss $\lim_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe

Cette limite est la dérivée de f en x_0 on note :

$f'(x) = \lim_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

la droite T est la droite tangente à la courbe de f passante par le point $(x_0, f(x_0))$

$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

2) Dérivabilité en un intervalle :

f est dérivable sur un intervalle I, on note :

$$f' : \begin{array}{l} D_f \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{array}$$

Remarque :

Si f est dérivable alors elle est continue

Exemple :

- $f(x) = c$; $f'(x_0) = \lim_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$

- $f(x)=\frac{1}{x}$; $f'(x_0)=\lim_{x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x_0}\frac{-1}{xx_0}=\frac{-1}{x_0^2}$
- $f(x)=\sqrt{x}$; $f'(x_0)=\lim_{x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Notation Différentielle de la dérivée :

Si on pose : $x = x_0+h = \Delta x$ $(h \in \mathbb{R})$

$$y' = f'(x_0) = \lim_{x_0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x_0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

3) opérations sur les dérivées :

- $f+g$ est dérivable en x_0 : $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$
- $f \cdot g$ " " " " : $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$
- αf " " " : $(\alpha f')(x_0) = \alpha f'(x_0)$
- Si $g(x_0) \neq 0$ et g est définie sur un voisinage de x_0

$\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

- Si $h : f(I) \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(x_0)$ alors

$h \circ f$ est dérivable en x_0 $(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0))f'(x_0)$

4) Dérivés de quelques fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
αx^n $(\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R})$	$\alpha n x^{n-1}$
e^n	e^n
$\ln x$	$1/x$
$e^{u(x)}$	$u'(x)\,e^{u(x)}$
$a^{u(x)}$	$u'(x)\ln a\; a^{u(x)}$
a^x $(a \in \mathbb{R}^+-\{1\})$	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln \lvert u(x) \rvert$	$\alpha\,(u'(x))\cdot(u(x))^{\alpha-1}$

5) Dérivées successive des fonctions de Classe C^n :

- Fonction de Classe C^1 : si f est dérivable sur I et si f' est continue sur $I \Rightarrow f$ est de Classe C^1.
- Dérivée d'ordre 2 : si f est de Classe C^1 sur I et f' est dérivable, f est dite 2 fois dérivable, sa dérivée notée $f'' = f^{(2)} = (f')'$ et la dérivée seconde ou la dérivée d'ordre 2 de f.

Si f'' est continue $\Rightarrow f$ est de Classe C^2.

- Dérivée d'ordre n : si $f, f', f^{(2)} \ldots f^{(n-1)}$ sont Dérivable et continue, la dérivée $n^{ème}$ est notée $f^{(n)}$ et f est dite n fois dérivable.

quand f est de Classe C^n. $f^{(n)}$ est Continue alors f est de classe C^n

Exemple :

$*$ $f(x) = x^4$ $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 4x^3$; $f^{(2)}(x) = 12x^2$

$f^{(3)}(x) = 24x$; $f^{(4)}(x) = 24$

$f^{(n)} = 0$ $(n \geq 5)$

$*$ $g(x) = x^p$ $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots(P-n+1)\,x^{P-n}$ $(n \leq P)$

$f^{(n)}(x) = 0$ $n \geq P+1$

IV. Application de la dérivation à l'étude des fonctions

1) Calcul des limites (Regle de l'Hospital)

Théorème : Soit I un interval de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I (fini ou pas) si f et g sont 2 fonctions dérivables sur un voisinage sur x_0

$\lim_{x_0} f(x) = \lim_{x_0} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$

Si en plus $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ alors :

$$\lim_{x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ (fini ou non)} = \lim_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Remarque : la règle de l'hospital est un moyen qui permet le calcul des limites de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

Exemple :

$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F.I et d'après l'hospital

$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} = 0$

2) Sens de variation Convexité / Concavité :

a) Fonctions monotones :

- f est $\nearrow$ si : $\forall x,y \in I$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f est $\searrow$ si : $\forall x,y \in I$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- f est monotone s'elle est croissante ou décroissante
- la strict monotonie se définie avec les inégalités strict

Théorème : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

1) f est $\nearrow \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$
2) f est $\searrow \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$
3) f est constante $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ $\forall x \in I$

b) Convexité, concavité :

• **proposition ① :**

Soit f une fonction dérivable sur J :

1) f est concave sur $J \Leftrightarrow f'$ est $\searrow$ sur J
2) f est strictement concave sur $J \Leftrightarrow f'$ est strictement $\searrow$
3) f est convexe sur $J \Leftrightarrow f' \nearrow$ sur J
4) f est strictement convexe sur $J \Leftrightarrow f'$ est strictement $\nearrow$

• **Proposition ② :**

Soit f 2 fois dérivable sur J :

f est concave $\Leftrightarrow \forall x \in J$ $f''(x) \leq 0$

f est convexe $\Leftrightarrow \forall x \in J$ $f''(x) \geq 0$

3) extrémums (points critiques) :

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction :

- quand f admet un minimum (respectivement un maximum) local ou relatif en x_0 s'il existe un voisinage de x_0 tel que $\forall x \in V_\varepsilon(x_0) \cap I$ $f(x_0) \leq f(x)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$)
- f admet un minimum (respectivement un maximum) Global ou absolu en $x_0 \in I$ si $\forall x \in I$ $f(x_0) \leq f(x)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$)
- un extrémum (local ou global) est soit un minimum soit un maximum (local ou Global)

Théorème : (Conditions nécessaire ou de 1er ordre)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I (intervalle ouvert) et admet un extrémum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

Remarque :

1) un extremum global est un extremum local de (la réciproque n'est pas vrai)
2) Si $f'(x_0) \neq 0$ alors x_0 n'est pas un extremum local de f

théorème ② : (Conditions suffisante ou du 2ème ordre)

soit f une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur I tel que $f'(x_0) = 0$ alors :

- si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local
- si $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local

4) Elasticité d'une fonction :

Définition : Soit f une fonction dérivable sur I l'élasticité de f notée $E_{f/x}$ en un point $x \in I$

tel que $f(x_0) \neq 0$

$$E_{f/x} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{\frac{df(x)}{f(x)}}{\frac{dx}{x}}$$

Remarque :

l'Elasticité mesure l'intensité (un taux ou un pourcentage) d'accroissement de la fonction f par rapport à sa croissement de la variable x

plus explicitement :

- Si $|E_{f/x}| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{df(x)}{f(x)}\right| > \left|\frac{dx}{x}\right|$ une variation de la variable x entrenera une variation plus importante de $f(x)$
- Si $|E_{f/x}| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{df(x)}{f(x)}\right| < \left|\frac{dx}{x}\right|$ une variation de la variable x entrenera une variation faible de $f(x)$.
- Si $|E_{f/x}| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{df(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{dx}{x}\right|$ une variation de la variable x entrenera une variation de même intensité de $f(x)$

l'elasticité peut être négatif ou positif

Exemple :

$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow E_{f/x} = f'(x) \frac{x}{f(x)} = \alpha x^{\alpha-1} \frac{x}{x^\alpha} = \alpha$

l'elasticité de la fonction puisance egale à son exposé.

en économie l'elastiaté de la fonction quantité par rapport au Prix s'écrit :

$$E_{q/p} = q'(P) \cdot \frac{P}{q(P)} = \frac{\frac{dq(P)}{q(P)}}{\frac{dP}{P}}$$

Exemple :

si on suppose que la demande d'un produit exprimé linéairement en fonction de son prix :

$$q = 5P + 2$$

son élasticité en un point $P_0 = 2$ s'écrit :

$$E_{q/P_0} = P_0 \frac{q'(P_0)}{q(P_0)} = \frac{2 \times 5}{5 \times 2 + 2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Cela signifie qu'une augmentation de 1 % des prix entrenera une augmentation de la Quantité à produire de 0,84 (84 %)