Chapitre 1

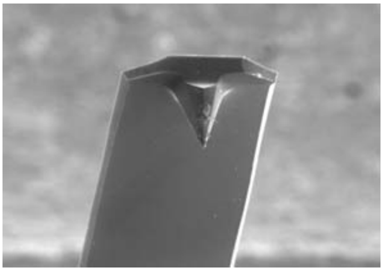
Oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique étudié dans ce chapitre est un oscillateur mécanique constitué d'un ressort et d'une masse. Cet exemple simple permettra d'introduire le concept fondamental d'équation différentielle. Plus généralement, le modèle de l'oscillateur harmonique rend compte de l'évolution d'un système physique au voisinage d'une position d'équilibre stable. Ainsi, nous retrouverons des oscillateurs dans le cadre de l'électricité (voir chapitre 7) ou du monde quantique (voir chapitre 4).

I. Introduction, définitions

I.1. Exemple

La photographie ci-contre montre la pointe de la sonde d'un microscope à force atomique (AFM) montée sur son levier. Cette pointe (d'une dimension de quelques micromètres) est approchée à très faible distance d'un échantillon dont on souhaite analyser la surface. Ce levier constitue un oscillateur mécanique, qui vibre librement à une fréquence de l'ordre de quelques kilohertz. Sous l'action des interactions entre la pointe de la sonde et la surface de l'échantillon, la fréquence de ces oscillations est modifiée. La mesure du décalage en fréquence permet d'analyser la forme de la surface de l'échantillon.



Pointe AFM

Définition 1.1. ***Oscillateur***

Un oscillateur est un système dont l'évolution est périodique. L'oscillateur est dit harmonique si la dépendance temporelle des oscillations est sinusoïdale.

I.2. Caractérisation du mouvement

I.2.1. Vocabulaire

De manière générale, l'oscillateur mécanique harmonique est un dispositif dans lequel une grandeur physique x (la position de la pointe portée par le levier dans l'exemple ci-dessus) oscille au cours du temps, comme c'est le cas sur la figure 1.1.

Sur cette figure, on constate que l'oscillation se fait entre deux valeurs extrêmes $\pm x_{\max}$; lors de la définition de la grandeur x, il a été décidé de prendre comme origine une position telle que la valeur moyenne de $x(t)$ soit nulle (cela revient à dire que x est le déplacement par rapport à la position d'équilibre, voir encadré « Méthode » page 8). La valeur $x_{\max}$ est appelée amplitude de l'oscillation, à ne pas confondre avec l'amplitude crête à crête qui désigne l'écart entre les valeurs extrêmes (soit $2x_{\max}$).

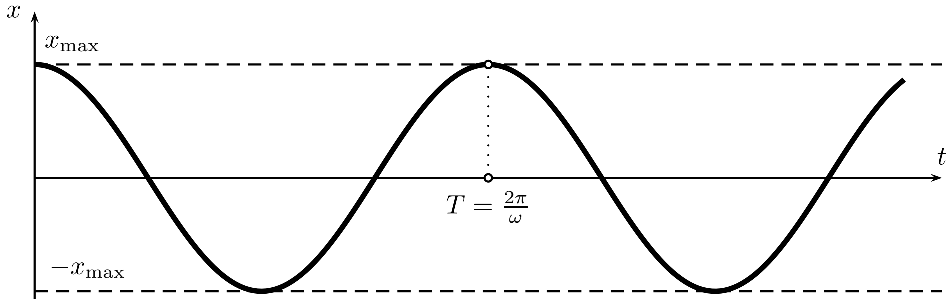


Fig. 1.1. Évolution temporelle d'un oscillateur harmonique.

Définition 1.2. ***Amplitude***
L'amplitude d'une oscillation harmonique est l'écart maximal à la valeur médiane (qui est aussi la valeur moyenne du fait de la symétrie des alternances).

Par ailleurs, les oscillations sont périodiques, de plus petite période T sur la figure 1.1. La fréquence f des oscillations est l'inverse de la période, $f = 1/T$. Enfin, la pulsation est la grandeur définie par $\omega = 2\pi f$. Fréquence et pulsation sont en principe homogènes l'une à l'autre, mais on emploiera systématiquement les unités *hertz* (Hz) pour les fréquences et *radian par seconde* pour les pulsations.

Définition 1.3. ***Fréquence et pulsation***
Pour un signal harmonique de période T, sa fréquence est $f = \frac{1}{T}$, exprimée en hertz (Hz)*, et sa pulsation est $\omega = \frac{2\pi}{T}$, exprimée en radian par seconde* ($\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$).

Les oscillateurs mécaniques à l'échelle macroscopique sont souvent relativement lents, avec des fréquences caractéristiques allant de quelques fractions de hertz (ondes sismiques) à quelques dizaines de hertz (pendules, ressorts, etc.). Au contraire, les oscillateurs microscopiques ou formés de particules élémentaires (oscillations atomiques ou moléculaires) sont souvent très rapides, avec des fréquences jusqu'au domaine optique (10^{14} à 10^{15} Hz) ou plus.

I.2.2. Représentation mathématique

La grandeur $x(t)$ associée aux oscillations libres [1] d'un oscillateur harmonique est, par définition, sinusoïdale. Elle peut donc s'écrire $x(t) = x_{\max}\cos(\omega t)$. D'après les propriétés du cosinus, $x_{\max}$ représente bien l'amplitude de l'oscillation. Par ailleurs, la fonction cosinus étant périodique de période 2π, la fonction $t \mapsto \cos(\omega t)$ est périodique de période $T = 2\pi/\omega$, et ainsi le facteur ω que l'on a introduit dans l'argument du cosinus correspond bien à la définition 1.3 de la pulsation. Enfin, le cosinus étant maximal lorsque son argument est nul, $x(0) = x_{\max}$ comme c'est le cas sur la figure 1.1. Il s'agit cependant là d'un cas particulier, et nous aurions pu choisir une autre origine des temps et écrire de manière plus générale $x(t) = x_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$, où φ est un réel quelconque. L'argument $(\omega t + \varphi)$ du cosinus est la *phase* de la grandeur x et φ est la *phase initiale* ou *phase à l'origine des temps* (voir figure 1.2). Sur cette figure, on a

1. On suppose dans ce chapitre que l'oscillateur évolue librement et n'est donc pas forcé par une excitation extérieure.

ajouté en gris un axe sur lequel la variable est ωt. En considérant cette variable sans dimension, la période du signal est 2π et la phase φ à l'origine apparaît clairement.

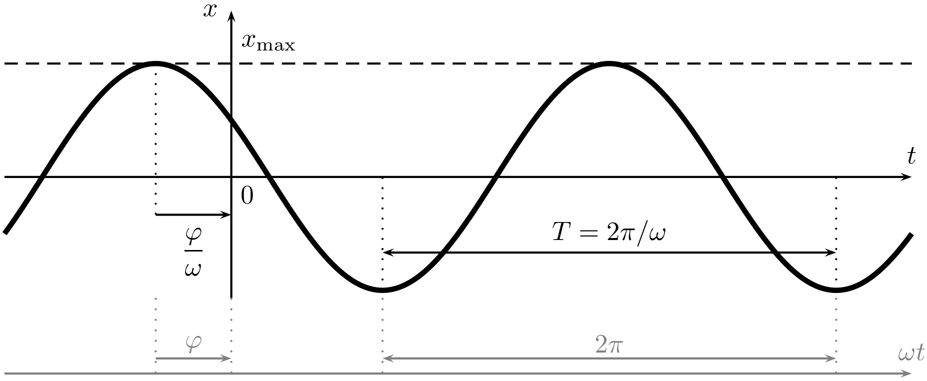


Fig. 1.2. Évolution temporelle d'un oscillateur harmonique, phase à l'origine.

Puisque l'expression de la phase dépend du choix de l'origine des temps, ce sont en fait des différences de phases entre deux signaux qui auront un sens physique (voir section II page 164).

Notons enfin que la dépendance temporelle de x peut aussi se mettre sous la forme d'une somme d'un cosinus et d'un sinus ; en utilisant une formule de trigonométrie, $x(t) = x_{\max} \cos\varphi \cos(\omega t) - x_{\max} \sin\varphi \sin(\omega t)$. Nous verrons à la section II.3 (voir page 10) qu'une telle forme $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ est souvent plus pratique pour exploiter les conditions initiales (voir aussi l'annexe B sur la résolution des équations différentielles).

II. Oscillateur harmonique masse-ressort

Le dispositif étudié est constitué d'un mobile assimilable à une masse ponctuelle m au point M, relié à une extrémité d'un ressort, l'autre extrémité, notée A, étant fixe (voir figure 1.3). Un guide, non représenté, impose au point M de ne se déplacer que selon l'axe x, horizontal, et cela sans frottement (glissière parfaite). Les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ (non représenté) sont les vecteurs de base du repère orthonormé direct (ils sont donc unitaires, d'où le choix de la lettre u).

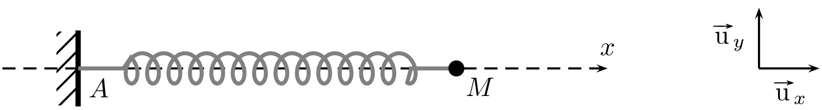


Fig. 1.3. Masse ponctuelle reliée à un ressort dont l'autre extrémité est fixe.

II.1. Loi de Hooke

Pour mettre en équation le problème, il faut modéliser l'action du ressort sur le mobile.

II.1.1. Présentation du ressort

Considérons un ressort initialement à vide (on parle de ressort ni tendu, ni comprimé) et notons ℓ_0 sa longueur à vide. Lorsqu'un opérateur tire sur un ressort de sorte que sa nouvelle longueur ℓ soit supérieure à sa longueur à vide ℓ_0, celui-ci s'oppose à l'action de l'opérateur en exerçant une force qui tend à le ramener dans sa situation initiale. De la même manière, si l'opérateur comprime un ressort ($\ell < \ell_0$), celui-ci exerce une force qui tend de nouveau à le ramener dans sa situation initiale (voir figure 1.4).

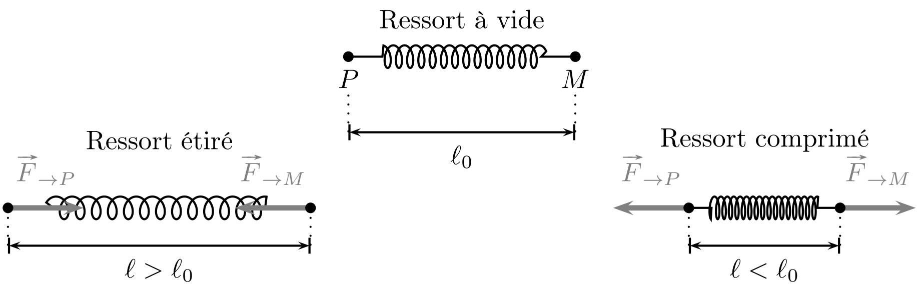


Fig. 1.4. Forces exercées par un ressort élastique sur ses extrémités.

On nomme souvent cette force « *force de rappel* ». En effet, en supposant l'extrémité P fixée [2], que l'on comprime ou que l'on étire le ressort, la force tend toujours à rappeler l'autre extrémité M vers la position correspondant au ressort à vide.

II.1.2. Modélisation linéaire de la force de rappel

Les forces exercées sur l'extrémité d'un ressort ne peuvent pas, au contraire des interactions fondamentales comme les forces de gravitation ou les forces électromagnétiques, faire l'objet d'une détermination exacte. La description donnée ici est donc phénoménologique (elle ne s'appuie pas sur un modèle théorique microscopique de la matière, mais elle est bien compatible avec les observations expérimentales). On distingue trois domaines de fonctionnement du ressort.

► S'il est très comprimé, les spires se touchent et il est impossible de le comprimer plus : sa longueur ne varie pas, même si on tente de le comprimer plus fort.

► S'il n'est ni trop comprimé ni trop tendu, on constate expérimentalement que la force de rappel est (approximativement) proportionnelle à l'allongement du ressort. C'est le domaine élastique de fonctionnement du ressort. Lorsqu'on relâche le ressort, il revient à sa position à vide initiale (fonctionnement réversible). Cette réversibilité du fonctionnement du ressort permet la fabrication d'oscillateurs.

► Si le ressort est trop tendu, la force de rappel devient très importante (elle n'est plus proportionnelle à l'allongement) et le ressort se déforme de façon irréversible : si on le relâche, il ne reprend pas sa forme initiale. On parle de déformation plastique (domaine de plasticité du ressort).

2. Comme c'est le cas sur la figure 1.3 où le point A est fixe.

Seul le domaine élastique est intéressant pour la fabrication d'oscillateurs. La force de rappel obéit (approximativement) à la loi de Hooke.

Loi 1.4. ***Loi de Hooke***

Dans son domaine élastique de fonctionnement, un ressort exerce sur chacune de ses extrémités une force dirigée le long de l'axe du ressort, proportionnelle à l'allongement algébrique de celui-ci, et dirigée dans le sens qui s'oppose à la déformation du ressort.

Pour un ressort d'extrémités P et M, on note :

- ℓ_0 *la longueur à vide ;*
- $\ell = \|\overrightarrow{PM}\|$ *la longueur à l'instant considéré ;*
- k *la constante de raideur du ressort.*

La force exercée sur l'extrémité M (voir figure 1.4) s'écrit

$$\vec{F}_{ressort \to M} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u} \qquad \text{où} \qquad \ell = MP \qquad \text{et} \qquad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\ell}. \tag{1.1}$$

La grandeur $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ s'appelle allongement algébrique du ressort.

Remarques

- L'allongement $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ est une grandeur algébrique (il peut être positif ou négatif). S'il est positif, le ressort est effectivement plus long qu'au repos. S'il est négatif, il est plus court.
- Le vecteur $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\ell} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ est le vecteur unitaire dirigé de P vers M. Exprimée avec ce vecteur, la loi de Hooke traduit le fait que la force de rappel $\vec{F}_{\text{ressort}\to M}$ change de sens quand l'allongement change de signe. La figure 1.4 montre comment le signe de cet allongement commande le sens des forces exercées *par le ressort* sur les objets qui y sont liés.
- La constante k est appelée raideur du ressort. Plus elle est grande, plus la force de rappel croît vite avec l'allongement. Le ressort s'oppose donc fortement à une traction de l'opérateur : il est dit raide. On caractérise parfois le même ressort par sa *souplesse* $s = 1/k$.

La loi de Hooke est linéaire au sens où la force est proportionnelle à l'allongement (*ut tensio sic vis*, comme l'a énoncé Robert Hooke[3] en 1678). La linéarité est une modélisation simple de la réalité, valable uniquement dans le domaine élastique.

Attention **Algébrisation et loi de Hooke**

Les deux forces exercées à ses extrémités par un ressort élastique sont opposées. De plus, l'allongement de ce ressort dépend du déplacement de ses deux extrémités. En conséquence, les erreurs de signe sont fréquentes dans l'expression algébrique ou vectorielle de la force élastique. Ces erreurs conduisent en général à des solutions aberrantes des problèmes mécaniques. On peut les éviter en appliquant à la lettre la relation (1.1).

3. Robert Hooke (1635-1703) est un scientifique anglais dont le champ d'étude recouvre un large domaine. Il a notamment activement participé à la reconstruction de Londres après le grand incendie de 1666.

II.2. Mise en équation de l'oscillateur

II.2.1. Loi de la quantité de mouvement

Afin de mettre en équation le problème, nous allons appliquer la loi de la quantité de mouvement, ou deuxième loi de Newton (ou encore principe fondamental de la dynamique), en procédant par étapes.

► Le référentiel d'étude sera celui lié au laboratoire (le point A de la figure 1.3 page 5 est fixe dans ce référentiel), supposé galiléen.

► Il faut définir le système. On choisit le mobile M dont on souhaite connaître le mouvement.

En notant $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement du système, la loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = \sum \vec{F}\,,$$

où $\sum \vec{F}$ est la somme des forces appliquées au système et $\vec{a}$ l'accélération du mobile. Le système est soumis à :

- ► la force de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{ressort}\to M} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$;
- ► le poids $m\vec{g}$, suivant la verticale (l'axe y sur la figure 1.3) ;
- ► la réaction $\vec{R}$ du guide forçant le mobile à ne se déplacer que suivant x.

Le déplacement du mobile se fait suivant l'axe x, donc $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_x$ parfois noté $\ddot{x}\vec{u}_x$. Son déplacement, guidé, se fait sans frottement, donc la réaction n'a pas de composante suivant $\vec{u}_x$. La projection de la loi de la quantité de mouvement sur l'axe x conduit donc simplement [4] à l'équation

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(\ell - \ell_0)\,.$$

II.2.2. Forme canonique de l'équation du mouvement

Le choix de l'origine n'a pas encore été fait. *A priori*, on pourrait penser à choisir l'origine en A ; ainsi, ℓ s'identifie à x et l'équation devient $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(x - \ell_0)$. Mais un autre choix, plus judicieux, est possible. En effet, si l'on choisit l'origine de manière à ce que ℓ soit égal à $\ell_0 + x$, l'équation s'écrit plus simplement $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$. Cette origine correspond à la position d'équilibre du mobile puisque dans la position $x = 0$, $\vec{F}_{\text{ressort}\to M} = \vec{0}$.

Méthode — **Choix de l'origine du référentiel**

En choisissant une origine coïncidant avec la position d'équilibre du système, l'équation différentielle et par conséquent la solution prennent une forme plus simple.

4. La projection sur les autres composantes conduirait à montrer que $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$; la réaction du guide s'oppose au poids du mobile.

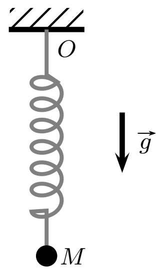
L'intérêt de ce choix sera notamment illustré dans l'exercice corrigé 1.5. Avec ce choix d'origine, l'équation différentielle s'écrit $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$. Posons $\omega_0=\sqrt{k/m}$, l'équation devient

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0\,. \tag{1.2}$$

D'après l'équation précédente, ω_0 a la dimension de l'inverse d'un temps (la dimension d'une pulsation, ce qui est compatible avec le symbole choisi pour cette grandeur). L'équation du mouvement ainsi présentée est appelée forme canonique de l'équation différentielle. L'intérêt d'une telle présentation sera discuté à la section I.1 du chapitre 7, page 151 (voir aussi l'annexe B page 645). Tous les oscillateurs harmoniques sont régis par une équation de cette forme.

Exercice corrigé 1.5.

On considère un mobile M assimilable à une masse ponctuelle m et pendu (verticalement) par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Le champ de pesanteur est $\vec{g}=g\vec{\mathrm{u}}_z$. L'origine du référentiel est tout d'abord prise en O, point d'accroche du ressort au plafond (voir figure). Le mouvement reste vertical.
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position $z(t)$ du ressort, puis proposer un changement de variable afin de la mettre sous forme canonique.



Corrigé

Le système est le mobile de masse m (quantité de mouvement $\vec{p}=m\vec{v}=m\ddot{z}\vec{\mathrm{u}}_z$ puisque le mouvement reste vertical) ; le référentiel d'étude est le référentiel $Oxyz$ lié au laboratoire, supposé galiléen. Le système est soumis à la force de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{ressort}\to M}=-k(\ell-\ell_0)\vec{\mathrm{u}}_z$ et à son poids $m\vec{g}$. Du fait du choix de l'origine, $\ell(t)=z(t)$ d'après l'orientation descendante de l'axe z.
En appliquant la loi de la quantité de mouvement,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\,\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{\mathrm{u}}_z=-k\left[z(t)-\ell_0\right]\,\vec{\mathrm{u}}_z+mg\vec{\mathrm{u}}_z\,,$$

soit $\ddot{z}+\omega_0^2z=\omega_0^2\ell_0+g$ en projection sur l'axe z (où l'on a introduit la pulsation propre $\omega_0=\sqrt{k/m}$).
Pour faire apparaître l'équation canonique, il faut changer l'origine de telle manière que le second membre disparaisse. Afin de traiter le problème de manière systématique, exploitons l'encadré « Méthode » page 8 et cherchons la position z_{eq} d'équilibre du système. Le système est à l'équilibre lorsque $\forall t$, $\ddot{z}(t)=0$, ce qui conduit à $z_{\text{eq}}=\ell_0+g/\omega_0^2=\ell_0+mg/k$. En posant $\xi=z-z_{\text{eq}}$, on obtient alors $\ddot{\xi}+\omega_0^2\xi=0$ qui est la forme canonique de l'équation différentielle régissant un oscillateur harmonique.
Avec un peu d'habitude, la rédaction (rapide) d'un tel exercice ne prend que quelques lignes, en considérant directement l'origine du référentiel au point d'équilibre du mobile et en exploitant le fait qu'alors l'équation ne contient pas de terme constant (pas de second membre en reprenant la formulation de cette correction).

II.3. Résolution de l'équation différentielle

II.3.1. Solution générale

La résolution générale de l'équation différentielle (1.2) est l'objet de l'annexe B (voir page 645). Remarquons simplement ici que les fonctions $t \mapsto \cos(\omega_0 t)$ et $t \mapsto \sin(\omega_0 t)$ sont solutions de l'équation (1.2). En effet, par exemple, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$. La solution générale de cette équation est une combinaison linéaire de ces deux fonctions

$$x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)\,. \tag{1.3}$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes α et β.
La solution (1.3) est une fonction harmonique de pulsation ω_0 appelée *pulsation propre* de l'oscillateur harmonique.

II.3.2. Cas d'un mobile lâché sans vitesse initiale

Pour déterminer complètement la solution, il faut se donner deux conditions initiales ; il y a en effet deux constantes à déterminer dans l'équation (1.3). Nous allons supposer que le mobile est lâché sans vitesse initiale après avoir été écarté de sa position d'équilibre. Notons a sa position initiale, $x(0) = a$. La vitesse initiale nulle s'écrit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$; injectée dans l'équation (1.3), on obtient $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -\omega_0\alpha\cos(0) + \omega_0\beta\sin(0) = 0$, soit $\alpha = 0$. En écrivant ensuite $x(0) = 0$, on obtient $\alpha = a$; le mouvement du mobile a donc pour équation

$$x(t) = a\,\cos(\omega_0 t)\,. \tag{1.4}$$

On remarque que la solution obtenue a la forme de celle discutée à la section I.2.2 (voir page 4) avec $x_{\max} = a$ et $\omega = \omega_0$. L'évolution temporelle est représentée à la figure 1.1 page 4.
L'exercice 1 (voir page 12) étudie le cas d'un mobile lancé avec une vitesse initiale.

II.4. Conservation de l'énergie

II.4.1. Énergie potentielle associée au ressort

Nous allons faire apparaître une équation énergétique en multipliant l'équation du mouvement par $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. De manière plus générale, il s'agit d'effectuer le produit scalaire de la loi de la quantité de mouvement et de la vitesse. L'équation du mouvement devient alors

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v = -kx\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.5}$$

Or, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right)$ et, de la même manière, $x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x^2}{2}\right)$. Ainsi, l'équation (1.5) devient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\,. \tag{1.6}$$

Dans la parenthèse, au membre de gauche, on reconnaît l'énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2$ du mobile. Dans l'équation (1.6), c'est la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique qui apparaît ; ce terme est homogène à une puissance (énergie par unité de temps).

Au membre de droite, on voit aussi apparaître la dérivée temporelle d'une quantité homogène à une énergie. En posant $\mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2$, l'équation (1.6) peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p}\right) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p} = \mathrm{Cte}\,. \tag{1.7}$$

On reconnaît la conservation de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p}$. Le terme $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ s'identifie donc à l'énergie potentielle élastique du ressort. Cette énergie potentielle est définie à une constante près, mais l'expression proposée ici conduit logiquement à une énergie potentielle nulle lorsque le ressort n'est ni tendu ni comprimé.

Définition 1.6. ***Énergie potentielle élastique***

L'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est

$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2\,.$$

En fait, le membre de droite de l'équation (1.6) est la puissance fournie par la force de rappel élastique au mobile M, c'est-à-dire le travail fourni par cette force de rappel à M par unité de temps,

$$\mathcal{P}_{\mathrm{ressort}\to M} = \vec{F}_{\mathrm{ressort}\to M}\cdot\vec{v} = -kx\,\vec{\mathrm{u}}_x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{u}}_x = \frac{\vec{F}_{\mathrm{ressort}\to M}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}_M}{\mathrm{d}t}\,,$$

où le numérateur du dernier membre est bien le travail de la force élastique.

II.4.2. Illustration dans le cas du mobile lâché sans vitesse initiale

Reprenons la solution obtenue à la section II.3.2 dans le cas d'un mobile lâché sans vitesse initiale (voir équation (1.4)). En utilisant x_max, plus parlant, la position du mobile est $x(t) = x_\mathrm{max}\cos(\omega_0 t)$. Sa vitesse est donc $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 x_\mathrm{max}\sin(\omega_0 t)$ et ainsi les énergies cinétique et potentielle ont pour expressions

$$\mathcal{E}_\mathrm{c}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_\mathrm{max}^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_\mathrm{max}^2\sin^2(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_\mathrm{p}(t) = \frac{1}{2}kx_\mathrm{max}^2\cos^2(\omega_0 t)\,.$$

Leur somme est bien constante, conformément à l'équation (1.7),

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_\mathrm{c}(t) + \mathcal{E}_\mathrm{p}(t) = \frac{1}{2}kx_\mathrm{max}^2\left[\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)\right] = \frac{1}{2}kx_\mathrm{max}^2\,.$$

Cette conservation de l'énergie est illustrée sur la figure 1.5. L'énergie est initialement totalement sous forme d'énergie potentielle élastique. Lorsque l'énergie potentielle diminue (quand la longueur du ressort se rapproche de sa longueur à vide), l'énergie cinétique augmente ; le transfert d'énergie d'une forme à l'autre assurant la conservation de l'énergie mécanique.

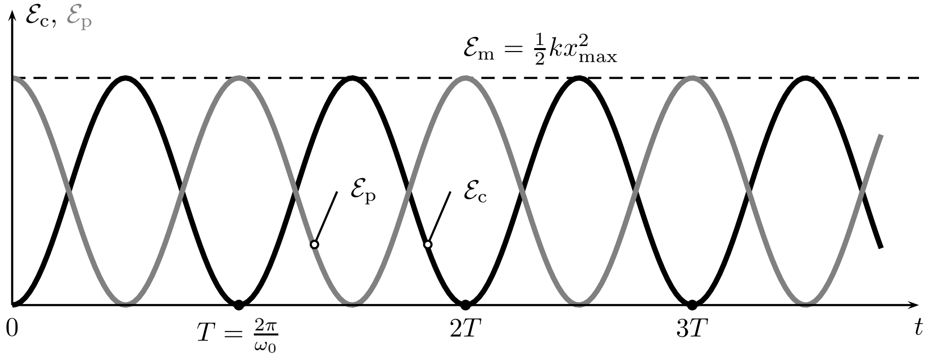


Fig. 1.5. Évolution temporelle des grandeurs énergétiques.

III. Exercices

1. Oscillateur lancé avec une vitesse initiale ★ (solution page 655)

On considère un mobile M de masse m lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 (voir figure 1.6). Il peut se déplacer horizontalement sur une glissière parfaite (sans frottement).
Le mobile est lancé avec une vitesse initiale v_0 à partir de sa position d'équilibre.
Déterminer la loi d'évolution $x(t)$ de la position du mobile M.

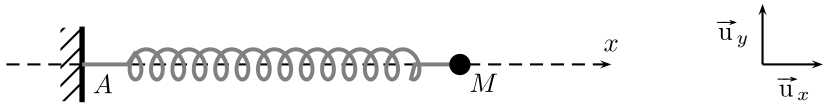


Fig. 1.6. Oscillateur harmonique.

2. Forces exercées par deux ressorts ★★ (solution page 655)

On fixe un mobile à deux murs par deux ressorts, de raideurs k_1 et k_2 et de longueurs à vide ℓ_{01} et ℓ_{02} (voir figure 1.7). Les points de fixation sont aux abscisses $x = 0$ et $x = L$. Exprimer la résultante des forces élastiques subies par le mobile. Montrer que l'ensemble des deux ressorts est équivalent à un unique ressort dont les caractéristiques sont à préciser.

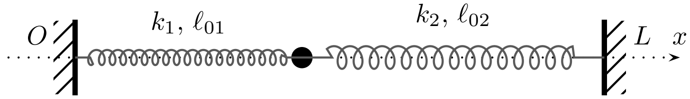


Fig. 1.7. Mobile relié à deux ressorts.