# Mathématiques pour l'Economie et la Finance, Cours pour les Littéraires

Johan Hombert

Année 2005-06

## 1 Equations et manipulation d'expressions

### 1.1 Equations linéaires à 1 inconnue

**Méthode** Comment résoudre :

$$7x + 17 = 1 - x\,?$$

On met les $x$ d'un coté, les termes constants de l'autre : $7x + x = 1 - 17$,
donc $8x = -16$,
puis on divise par 8 : $x = -\frac{16}{8} = -2$.

**Applications** Résoudre :

$$ax - b = x$$
$$\frac{2x}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} - x$$

(Revoir au passage les règles de fraction).

Solutions :
$ax - x = b \Longleftrightarrow (a-1)x = b \Longleftrightarrow x = \frac{b}{a-1}$.
$\frac{2x}{3} + x = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \frac{5x}{3} = -\frac{1}{12} \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{12}\frac{3}{5} = -\frac{1}{20}$.

### 1.2 Equations linéaires à 2 inconnues

**Méthode** Comment résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 1 + y = 5 & (1) \\ x - y = 5 & (2) \end{cases}$$

a/ Exprimer $y$ en fonction de $x$ avec (1) : $y = 4 - 2x$
b/ Remplacer les $y$ dans (2) : $x - (4 - 2x) = 5$
c/ Résoudre (2) en $x$ : $x = 3$
d/ En déduire $y$ : $y = 4 - 2x = -2$
(On peut bien sûr commencer avec (2) au lieu de (1) et/ou avec $x$ au lieu de $y$.)

**Application**

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3x - 2 \\ -2x - 5 + 4y = 8y \end{cases}$$

Solution : De la première équation, on tire $y = -x - 1$, puis en réinjectant dans la seconde : $-2x - 5 = 4(-x - 1)$, donc $x = 1/2$ et $y = -3/2$.

## 1.3 Equations du 2$^{\text{nd}}$ degré

**Méthode** Comment résoudre :

$$ax^2 + bx + c = 0\,?$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta \equiv b^2 - 4ac$$

*1$^{er}$ cas :* $\Delta > 0$
2 solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
*2$^{ème}$ cas :* $\Delta = 0$
1 solution : $x = \frac{-b}{2a}$
*3$^{ème}$ cas :* $\Delta < 0$
Pas de solution

**Applications** Résoudre :

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$4x^2 + 2 + x = 1 - x^2 - 4x$$

Solutions :
$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$, donc 2 solutions $x_1 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2} = -4$.

La seconde équation se récrit $5x^2 + 5x + 1 = 0$, $\Delta = 5^2 - 4 \times 5 \times 1 = 5$, donc 2 solutions $x_1 = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$ et $x_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}$.

## 1.4 Développement, factorisation, identités remarquables

**Propriétés** de développement et factorisation :

$$\begin{cases} a(b + c) = ab + ac \\ (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \end{cases}$$

Identités remarquables :

$$\begin{cases} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \end{cases}$$

**Applications** Développer :

$$(7x + 8y)^2$$

$$(1 + \alpha + \beta)^2$$

Simplifier :

$$(1 + 2x)(2 + x) - (1 - x)^2 - 5x$$

Solutions :
$(7x + 8)^2 = (7x)^2 + 2(7x)(8y) + (8y)^2 = 49x^2 + 112xy + 64y^2$.
$(1+\alpha+\beta)^2 = ((1+\alpha)+\beta)^2 = (1+\alpha)^2+2(1+\alpha)\beta+\beta^2 = 1+2\alpha+\alpha^2+2\beta+2\alpha\beta+\beta^2$.
$(1+2x)(2+x)-(1-x)^2-5x = 2+x+4x+2x^2-(1-2x+x^2)-5x = x^2+2x+1 = (1+x)^2$.

## 1.5 Exercices

1. Résoudre $ax + b(-a + x) = x^2$, sachant que $a > b$ (indication : l'inégalité $a > b$ ne servira qu'au moment de calculer $\sqrt{\Delta}$).

2. Considérons un marché (disons de melons), qui rassemble des vendeurs et des acheteurs. Les caractéristiques de tous ces acteurs font que si le prix en vigueur est $p$, alors les vendeurs sont prêts à offrir $O(p) = 2p$ melons à eux tous, tandis que les acheteurs souhaitent acquérir $D(p) = 10 - 3p$ melons à eux tous. Notez que plus le prix est élevé, plus les vendeurs offrent de melons et moins les acheteurs en veulent, ce qui est conforme au bon sens.
Déterminer le prix qui équilibre l'offre et la demande. (Représenter éventuellement les droites en question.)

Solutions :
1. L'équation se récrit $x^2 + (-b - a)x + ab = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = (-b - a)^2 - 4ab = b^2 + 2ba + a^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, donc $\Delta > 0$. Comme $a > b$, alors $a - b > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = a + b$. Il y a 2 solutions : $x_1 = \frac{-(-b-a)+(a-b)}{2} = a$ et $x_2 = \frac{-(-b-a)-(a-b)}{2} = b$.
2. Il s'agit de résoudre $D(p) = O(p)$, soit $10 - 3p = 2p$, $10 = 5p$, $p = 2$.

## 1.6 Puissances et logarithme

### 1.6.1 Puissances

**Exemple** Calculer $2^3$, $2^{2\times2}$, $(2^2)^2$ et $2^{(2^2)}$.
Solutions : 8, 16, 16 et 16.

**Propriétés**

$$a^b a^c = a^{b+c}$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$a^{-b} = 1/a^b$$

$$a^{1/2} = \sqrt{a}$$

**Applications** Calculer :

$$x\frac{(x^2)^y}{x^{-1}x^z}$$

Solution : $x\frac{(x^2)^y}{x^{-1}x^z} = x\frac{x^{2y}}{x^{-1+z}} = x^{1+2y-(-1+z)} = x^{2+2y-z}$.

### 1.6.2 Logarithme

**Définition** $\ln(x)$ défini pour $x > 0$ est croissante et $\ln(0) = -\infty$, $\ln(1) = 0$, $\ln(+\infty) = +\infty$.

**Propriétés**

$$\begin{cases} \ln(ab) = \ln(a) + ln(b) \\ \ln(a^b) = b\ln(a) \end{cases}$$

# 2 Fonctions, dérivée et optimisation

## 2.1 Représentation d'une droite

Une fonction prend un nombre et en renvoie un autre. Exemple : $f(x) = 1 + 2x$. On la représente graphiquement dans un plan $(x, f(x))$.

Représenter $f(x) = 1 + 2x$, voir que c'est une droite. Voir que 1=ordonnée à l'origine et 2=pente. La droite est croissante (resp. décroissante), i.e. elle monte (resp. descend) lorsque la pente est positive (resp. négative). Elle est horizontale lorsque la pente est nulle.

Lorsqu'une droite est tracée, on peut déterminer la pente graphiquement en considérant deux points (appelons-les $A$ et $B$) sur la droite. En notant $x$ leur abscisse et $y$ leur ordonnée, la pente est donnée par $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

## 2.2 Dérivée

Représenter $f(x) = x^2$ point par point. Voir que la pente n'est pas constante.

On définit la dérivée comme étant la pente de la tangente (en chaque point, la dérivée est donc une fonction). Donc lorsque la dérivée est positive (resp. négative), la tangente a une pente positive (resp. négative), donc la courbe est croissante (resp. décroissante). Lorsque la dérivée est nulle, la courbe est a un maximum ou un minimum.

Formule de la dérivée $f'(x) = 2x$. On retrouve bien que pour $x < 0$, la dérivée est négative, donc la courbe est décroissante, que pour $x > 0$ la courbe est croissante, et que la courbe passe par son minimum en $x = 0$.

Refaire tout cela avec $g(x) = 1/x$ (formule : $g'(x) = -1/x^2$).

**Formules**

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(1/x)' = -1/x^2$$
$$(1/x^n)' = -n/x^{n+1}$$
$$(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$$
$$(\text{constante})' = 0$$

Toutes ces formules se condensent en fait en une seule :

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Si $u$ et $v$ sont des fonctions :

$$\begin{cases} (uv)' = u'v + uv' \\ (u/v)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \\ (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u' \end{cases}$$

Et la dérivée du logarithme :

$$\begin{cases} (\ln(x))' = \frac{1}{x} \\ (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \end{cases}$$

**Applications** Calculer les dérivées de :

$$f(x) = 3x^2$$
$$g(x) = \frac{x}{1+x}$$
$$h(x) = x\ln(x)$$

Solutions :
$f'(x) = 3 \times 2x = 6x$.
$g'(x) = \frac{1\times(1+x)-x\times 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$.
$h'(x) = x\frac{1}{x} + 1\ln(x) = 1 + \ln(x)$.

## 2.3 Optimisation

**Méthode** La dérivée est un outil très pratique pour déterminer le minimum ou le maximum d'une fonction. Voyons cela sur un exemple. Considérons la fonction suivante :

$$\theta(t) = t^2 + 3t - 4.$$

On sait calculer sa dérivée :

$$\theta'(t) = 2t + 3.$$

On cherche les $t$ pour lesquels la dérivée est nulle :

$$\theta'(t) = 0 \Longleftrightarrow 2t + 3 = 0 \Longleftrightarrow t = -3/2.$$

Cela signifie que la tangente est horizontale en $t = -3/2$, c'est donc soit un maximum, soit un minimum. Afin de trancher, il faut savoir si la fonction est croissante ou décroissante sur les intervalles $-\infty < t < -3/2$ et $-3/2 < t < \theta$. Il suffit de regarder le signe de la dérivée à l'intérieur de chacun de ces intervalles. Pour cela, on calcule le signe pour une valeur particulière de ces intervalles. Par exemple, $\theta'(-2) = 2(-2) + 3 = -1 < 0$ et $\theta'(0) = 3 > 0$. Cela permet de tracer le tableau de variation de la fonction :

| $t$ | $-\infty$ | | $-3/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\theta'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\theta(t)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Donc $-3/2$ est un minimum.

**Application** Calculer la dérivée et tracer le tableau de variation de :

$$\phi(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{x} \text{ (s'intéresser uniquement aux } x > 0\text{)}$$

Solution : $\phi'(x) = x^2/2 - 1/x^2$. $\phi'(x) = 0 \iff x^2/2 = 1/x^2 \Longleftarrow x^4 = 2 \Longleftarrow x = 2^{1/4}$

| $x$ | $0$ | | $2^{1/4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\phi'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\phi$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

## 2.4 Exercice

Vous êtes un vendeurs de melon (encore !). Si vous mettez un prix $p$, vous pourrez en vendre $D(p) = 12 - p^2$. Supposons pour simplifier que votre coût (d'achat en gros ou de fabrication) d'un melon est nul.
A quel prix allez-vous vendre vos melons pour maximiser votre bénéfice (égal à vos recettes puisque vous n'avez pas de dépenses) ?

Solution : Le profit est $\pi(p) = p(12 - p^2) = -p^3 + 12p$. $\pi'(p) = -3p^2 + 12$. $pi'(p) = 0 \iff 3p^2 = 12 \iff p^2 = 4 \iff p = 2$ ou $p = -2$. C'est un prix, on ne s'intéresse qu'à $p \geq 0$.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\pi$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Donc le profit est maximum pour le prix $p = 2$, le profit vaut dans ce cas $\pi(2) = -2^3 + 12 \times 2 = 16$.

## 2.5 Optimisation sous contrainte

**Le problème** On cherche à maximiser en $x$ et $y$ l'expression suivante :

$$\ln(x) + \ln(y),$$

sous la contrainte que :

$$x + y \leq 1.$$

La fonction ln est croissante, donc on voudrait prendre $x$ et $y$ les plus grands possibles, mais la contrainte impose que la somme des deux ne doit pas dépasser 1. Evidemment, il y a intérêt à tirer au maximum sur la contrainte et à les choisir tels que $x+y=1$ (on dit qu'on sature la contrainte).

**Méthode** On procède comme suit :
a/ On exprime $y$ en fonction de $x$ en utilisant la contrainte : $y=1-x$.
b/ On remplace $y$ dans l'expression à maximiser : $\ln(x)+\ln(1-x)$. C'est une fonction à une variable $(x)$, appelons-là $f$.
c/ Il reste à maximiser $f$ : $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{-1}{1-x}$. $f'(x)=0 \iff \frac{1}{x}=\frac{1}{1-x} \iff x=1-x \iff x=1/2$, qui est bien un maximum.

| $x$ | 0 | | 1/2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

d/On déduit $y=1-x=1/2$.

**Applications** Maximiser :

$$\frac{1}{3}\ln(k)+\frac{2}{3}\ln(l)$$

sous la contrainte :

$$0,1k+0,2l\leq 3.$$

Minimiser :

$$\sqrt{2x}+\sqrt{y}$$

sous la contrainte :

$$x+y\geq 1.$$

Solutions :

On part de la contrainte : $l=\frac{3-0,1k}{0,2}$. On définit $f(k)=\frac{1}{3}\ln(k)+\frac{2}{3}\ln(\frac{3-0,1k}{0,2})$. $f'(k)=\frac{1}{3}\frac{1}{k}+\frac{2}{3}\frac{(-0,1)/0,2}{(3-0,1k)/0,2}$. $f'k)=0 \iff \frac{1}{3k}=\frac{0,2}{3(3-0,1k)} \iff 0,2k=3-0,1k \iff k=3/0,3=10$. Et $l=\frac{3-0,1\times 10}{0,2}=\frac{2}{0,2}=10$.

On part de la contrainte : $y=1-x$. On définit $g(x)=\sqrt{2x}+\sqrt{1-x}$. $g'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x}}+\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$. $g'(x)=0 \iff 2\sqrt{1-x}=\sqrt{2x} \iff 4(1-x)=2x \iff x=2/3$. Puis $y=1-x=1/3$.

## 2.6 Exercice

Votre usine à yaourt fonctionne de la manière suivante : avec $x$ hectolitres de lait et $y$ kilos de fruit, vous pouvez fabriquer $x^{2/3}y^{1/3}$ milliers de yaourts aux fruits. L'hectolitre de lait coûte 100 euros et le kilo de fruits 5 euros. On vous passe une commande de 10 milliers de yaourts, quelles quantités de lait et de fruits allez-vous utiliser pour les fabriquer au moindre coût ?

Solution : Il s'agit de minimiser $100x + 5y$ sous la contrainte $x^{2/3}y^{1/3} \geq 10$. On sature la contrainte : $x^2y = 10^3 = 1000$, soit $y = \frac{1000}{x^2}$. La fonction à minimiser se récrit $f(x) = 100x + 5000\frac{1}{x^2}$. $f'(x) = 100 - 5000\frac{2}{x^3}$. $f'(x) = 0 \iff 100 = \frac{10000}{x^3} \iff x = 100^{1/3} \approx 4,6$, et on vérifie avec un tableau de variation que c'est bien un minimum. On en déduit $y = \frac{1000}{100^{2/3}} \approx 46,4$. On utilise 4,64 hectolitres de lait et 46,4 kilos de fruits pour produire 10 milliers de yaourts au moindre coût.

# 3 Calculs d'actualisation

## 3.1 Actualisation

**Intuition** En finance, lorsque le taux d'intérêt est de 10% par an, 100 euros aujourd'hui sont équivalents à $100 \times 1,1 = 110$ euros dans un an. Ils sont donc aussi équivalents à $110 \times 1,1 = 121 (= 100 \times 1,1 \times 1,1 = 100 \times 1,1^2)$ euros dans deux ans. En réitérant ce raisonnant, on peut affirmer que 100 euros aujourd'hui sont équivalents à $100 \times 1,1^{20} \approx 673$ euros dans vingt ans.

On peut en déduire la règle générale suivante : si le taux d'intérêt est $r$, $X$ euros aujourd'hui sont équivalents à $X(1+r)^n$ euros dans $n$ années. On résume cette règle dans la formule :

$$X_n = X_0(1+r)^n.$$

On peut renverser le déroulement du temps dans ces raisonnements, en disant que $X$ euros dans $n$ années sont équivalents à $X/(1+r)^n$ euros aujourd'hui. Formellement : $X_0 = X_n/(1+r)^n$.

**Applications** Questions :

A. Combien dois-je investir pour avoir 500 euros dans 8 ans avec un taux d'intérêt annuel de $r = 7\%$ ?

B. A quel taux dois-je investir 10 euros pour avoir 20 euros dans 10 ans ?

C. Combien d'années me faut-il pour doubler mon capital avec un taux de 10% ?

Solutions :

A. En utilisant $X_0 = X_8/(1+r)^8$, on en déduis qu'il me faut investir $500/1,07^8 \approx 291$ euros.

B. En utilisant $X_10 = X_0(1+r)^{10}$, on obtient $20 = 10(1+r)^{10}$, soit $2 = (1+r)^{10}$, soit $2^{1/10} = 1+r$, donc $r = 2^{1/10} - 1 \approx 7\%$.

C. En utilisant $X_n = X_0(1,1)^n$, on obtient $2X_0 = X_0(1,1)^n$, soit $2 = (1+r)^n$. On prend le logarithme de cette égalité : $\ln(2) = \ln((1,1)^n) = n\ln(1,1)$, d'où $n = \ln(2)/\ln(1,1) \approx 7,3$ ans.

## 3.2 Somme géométrique

**Le problème** On cherche à répondre à la question suivante : combien valent aujourd'hui 1 euro dans 1 an + 1 euro dans 2 ans + 1 euro dans 3 ans + ... + 1 euro dans 25 ans, lorsque le taux d'intérêt est $r$ ? On sait déjà que 1 euro dans $n$ années valent aujourd'hui $1/(1+r)^n$ euros. Mais ici, on a besoin de calculer une somme de tels termes. Formellement, on souhaite déterminer :

$$\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + ... + \frac{1}{(1+r)^{25}} \equiv \sum_{i=1}^{25} \frac{1}{(1+r)^i}.$$

**La formule**

$$\sum_{i=p}^{n} x^i = x^p \frac{1-x^{n-p+1}}{1-x}.$$

**Applications** Calculer :

$$\sum_{k=0}^{100} (1+t)^k$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x^i}$$

Résoudre le problème initial.

Solutions :
$\sum_{k=0}^{100}(1+t)^k = \frac{1-(1+t)^{101}}{1-(1+t)} = \frac{(1+t)^{101}-1}{t}$.
$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x^i} = \frac{1}{x}\frac{1-(1/x)^N}{1-1/x} = \frac{1-(1/x)^N}{x-1}$.
$\sum_{i=1}^{25} \frac{1}{(1+r)^i} = \frac{1}{1+r}\frac{1-\frac{1}{(1+r)^{25}}}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{1-\frac{1}{(1+r)^{25}}}{1+r-1} = \frac{1-\frac{1}{(1+r)^{25}}}{r}$.

## 3.3 Exercices

1. Calculer le prix d'une obligation qui rapporte 1 euros tous les ans (à partir de l'an prochain, et jusqu'à la fin des temps), lorsque le taux d'intérêt est 2% annuel.

2. Une société d'autoroute rapportera 1 milliards d'euros par an les 20 prochaines années, puis 2 les 20 années suivantes. Si $r = 5\%$, quel est la valeur de ces profits aujourd'hui ?

Solutions :
1. Une obligation qui rapporte 1 euros par an à partir de l'an prochain jusqu'à dans $n$ années vaut $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1{,}02^i} = \frac{1}{1{,}02}\frac{1-1/1{,}02^n}{1-1/1{,}02} = \frac{1-1/1{,}02^n}{0{,}02}$. L'obligation rapporte en fait jusqu'à la fin des temps, autrement dit $n = +\infty$. Comme $1,02 > 1$, alors $1,02^{+\infty} = +\infty$. Donc l'obligation vaut $\frac{1}{0{,}02} \approx 50$ euros.

2. $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{1{,}05^i} + \sum_{i=21}^{40} \frac{2}{1{,}05^i} = \frac{1}{1{,}05}\frac{1-1/1{,}05^{20}}{1-1/1{,}05} + 2\frac{1}{1{,}05^{21}}\frac{1-1/1{,}05^{20}}{1-1/1{,}05} = \frac{1-1/1{,}05^{20}}{0{,}05}(1 + \frac{2}{1{,}05^{20}}) \approx 21,9$.

**Remarque** Il est utile de remarquer qu'en pratique, la formule de la somme géométrique est quasiment toujours appliquée avec $x = 1/(1+r)$ et $p = 1$. Dans ce cas, nous avons vu dans les exercices qu'elle s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{1}{1+r} \right)^i = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right],$$

et où le terme de droite vaut simplement $1/r$ lorsque $n = +\infty$.

# 4 Statistiques

## 4.1 Introduction

Une variable aléatoire est, par exemple, le score obtenu en lançant un dé. Elle est caractérisée par les valeurs qu'elle peut prendre et les probabilités avec lesquelles elle prend ces valeurs. Dans le cas du dé, les valeurs possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6, et chacune de ces valeurs peut survenir avec probabilité 1/6. On peut résumer cette variable aléatoire dans le tableau suivant :

| Probabilités | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeurs | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

La moyenne (on dit l'espérance) de cette variable aléatoire est le score moyen que l'on obtient. C'est donc $\frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}2 + \frac{1}{6}3 + \frac{1}{6}4 + \frac{1}{6}5 + \frac{1}{6}6 = 3,5$.

## 4.2 Définitions

Considérons deux variables aléatoires $A$ et $B$, définies par les valeurs qu'elles peuvent prendre (les $A_i$ et $B_i$) et les probabilités correspondantes (les $p_i$) :

| Probabilités | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |
|---|---|---|---|---|
| Valeurs de $A$ | $A_1$ | $A_2$ | ... | $A_n$ |
| Valeurs de $B$ | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_n$ |

Notons au passage qu'on a forcément $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$, car la réunion de tous les états posibles de la nature correspond à une probabilité de 1 (i.e. de 100%).

**Espérance** C'est la moyenne :

$$\begin{aligned} E(A) &= p_1 A_1 + p_2 A_2 + ... + p_n A_n \\ &\equiv \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i A_i \end{aligned}$$

**Variance** Elle indique si les valeurs que peut prendre la variable aléatoire sont très dispersées autour de la moyenne (variance élevée), ou au contraire concentrées autour de la moyenne (variance faible).

$$\begin{aligned} V(A) &= p_1(A_1 - E(A))^2 + p_2(A_2 - E(A))^2 + ... + p_n(A_n - E(A))^2 \\ &\equiv \sum_{i=1}^n p_i(A_i - E(A))^2 \end{aligned}$$

Cette définition appelle à quelques remarques :
- D'abord, la variance est une somme de carrés, elle est donc toujours positive.
- Ensuite, que vaut la variance d'une variable aléatoire qui ne prend qu'une seule valeur (appelons-la $k$) avec probabilité 1 ? Comme son espérance est également $k$, on obtient que sa variance est 0. La dispersion (ou variance) d'une variable aléatoire constante est la plus petite qui soit.

**Ecart-type** Il est directement lié à la variance :

$$\sigma(A) = \sqrt{V(A)} \text{ (cette lettre grecque s'appelle } \textit{sigma}\text{)}$$

**Covariance** La covariance des variables aléatoires $A$ et $B$ indique si elles varient plutôt dans le même sens, i.e. que $A$ est grand quand $B$ l'est et petit quand $B$ l'est (covariance positive), ou dans des sens inverse, i.e. $A$ est grand quand $B$ est petit et réciproquement (covariance négative).

$$\begin{aligned} Cov(A,B) &= p_1(A_1 - E(A))(B_1 - E(B)) + ... + p_n(A_n - E(A))(B_n - E(B)) \\ &\equiv \sum_{i=1}^n p_i(A_i - E(A))(B_i - E(B)) \end{aligned}$$

A nouveau, quelques remarques :
- $Cov(A, A) = V(A)$.
- Si $k$ est une variable aléatoire constante (ne prend qu'une seule valeur $k$ avec probabilité 1), alors $Cov(A, k) = 0$.

**Corrélation** Elle est directement liée à la covariance :

$$\rho(A,B) = \frac{Cov(A,B)}{\sigma(A)\sigma(B)} \text{ (cette lettre grecque s'appelle } \textit{rho}\text{)}$$

## 4.3 Exemple

| Proba | 1/2 | 1/4 | 1/4 |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 3 | 5 |
| $B$ | 2 | 0 | 4 |

Calculer toutes les moyennes, variances, écart-types, covariance et corrélation de $A$ et $B$.

Solution :
$E(A) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}3 + \frac{1}{4}5 = 2$, de même $E(B) = 2$.

$V(A) = \frac{1}{2}(0-2)^2 + \frac{1}{4}(3-2)^2 + \frac{1}{4}(5-2)^2 = 4,5$, de même $V(B) = 2$.
$\sigma(A) = \sqrt{4,5} \approx 2,1$ et $\sigma(A) = \sqrt{2} \approx 1,4$.
$Cov(A,B) = \frac{1}{2}(0-2)(2-2) + \frac{1}{4}(3-2)(0-2) + \frac{1}{4}(5-2)(4-2) = 1$.
$\rho(A,B) = \frac{Cov(A,B)}{\sigma(A)\sigma(B)} = \frac{1}{\sqrt{4,5}\sqrt{2}} = 1/3 \approx 0,3$.

## 4.4 Propriétés

**Formules** Si $A$ et $B$ sont deux variables aléatoires et $k$ une constante, on a les propriétés suivantes :

$$\textit{Espérance} \left| \begin{array}{l} E(A+B) = E(A) + E(B) \\ E(kA) = kE(A) \end{array} \right.$$

$$\textit{Variance} \left| \begin{array}{l} V(kA) = k^2 V(A) \\ V(k+A) = V(A) \end{array} \right.$$

Les formules sur la variance se récrivent immédiatement avec les écart-types :

$$\textit{Ecart-type} \left| \begin{array}{l} \sigma(kA) = k\sigma(A) \\ \sigma(k+A) = \sigma(A) \end{array} \right.$$

La covariance est en fait la généralisation se la multiplication aux variables aléatoires. Cela permet de retenir facilement les formules suivantes :

$$\textit{Covariance} \left| \begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} Cov(B,A) = Cov(A,B) \end{array} \right. \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} Cov(\lambda A, B) = \lambda Cov(A,B) \\ Cov(A, \mu B) = \mu Cov(A,B) \\ Cov(\lambda A, \mu B) = \lambda\mu Cov(A,B) \end{array} \right. \\ (3) \left\{ \begin{array}{l} Cov(A, B+C) = Cov(A,B) + Cov(A,C) \\ Cov(A+B, C+D) = Cov(A,C) + Cov(A,D) + Cov(B,C) + Cov(B,D) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les analogues de (1) et (2) sont aussi vraies pour la corrélation, mais pas (3) :

$$\textit{Corrélation} \left| \begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} \rho(B,A) = \rho(A,B) \end{array} \right. \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} \rho(\lambda A, B) = \lambda\rho(A,B) \\ \rho(A, \mu B) = \mu\rho(A,B) \\ \rho(\lambda A, \mu B) = \lambda\mu\rho(A,B) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Application** Soient $A$ et $B$ deux variables aléatoires. Exprimer $V(A+B)$ en fonction de $V(A)$, $V(B)$ et $Cov(A,B)$.

Solution : $V(A+B) = Cov(A+B, A+B) = Cov(A,A) + Cov(A,B) + Cov(B,A) + Cov(B,B) = V(A) + V(B) + 2Cov(A,B)$.

## 4.5 Exercice

Soient $A$ et $B$ deux variables aléatoires d'espérances $E(A) = 0,2$ et $E(B) = 0,12$, d'écart-types $\sigma_A = 0,3$ et $\sigma_B = 0,15$, et de corrélation $\rho_{A,B} = 0,1$.

A. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de $(A+B)/2$.

B. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de $xA+(1-x)B$.

C. Pour quelle valeur de $x$ la variance de $xA+(1-x)B$ est-elle minimale ?

D. On considère une nouvelle variable aléatoire $C = 4A - 0,5$. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de $C$, ainsi que ses corrélations avec $A$ et $B$.

Solutions :

A. $V((A+B)/2) = (1/2)^2V(A+B) = (V(A)+V(B)+2Cov(A,B))/4$. Or $V(A) = \sigma_A^2$, $V(B) = \sigma_B^2$ et $Cov(A,B) = \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$, donc $V((A+B)/2) = (0,3^2+0,15^2+2\times 0,1\times 0,3\times ,012)/4 \approx 0,05$.

B. $V(xA+(1-x)B) = V(xA)+V((1-x)B)+2Cov(xA,(1-x)B) = x^2V(A)+(1-x)^2V(B)+2x(1-x)Cov(A,B) = x^2\sigma_A^2+(1-x)^2\sigma_B^2+2x(1-x)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$.

C. Dérivons $V(xA+(1-x)B) \equiv f(x)$ en $x$ : $f'(x) = 2x\sigma_A^2 - 2(1-x)\sigma_B^2 + (2-4x)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$. $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\sigma_B^2-\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B} \approx 0,17$.

D. $E(C) = E(4A-0,5) = 4E(A)-0,5 = 0,3$.
$V(C) = V(4A-0,5) = V(4A) = 4^2V(A) = 16\sigma_A^2 = 1,44$.
$\sigma_C = \sqrt{(V(C))} = \sqrt{16V(A)} = 4\sigma_A = 1,2$.
$\rho_{C,A} = \frac{Cov(C,A)}{\sigma_C\sigma_A} = \frac{Cov(4A-0,5,A)}{4\sigma_A\sigma_A} = \frac{4Cov(A,A)-Cov(0,5,A)}{4\sigma_A^2} = \frac{4V(A)}{4\sigma_A^2} = 1$.
$\rho_{C,B} = \frac{Cov(C,B)}{\sigma_C\sigma_B} = \frac{Cov(4A-0,5,B)}{4\sigma_A\sigma_B} = \frac{4Cov(A,B)-Cov(0,5,B)}{4\sigma_A\sigma_B} = \frac{4\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}{4\sigma_A\sigma_B} = \rho_{A,B} = 0,1$.

## 4.6 Un autre exercice

Soient une variable aléatoire $X$ définie par :

| Proba | $0,1$ | $0,2$ | $0,4$ | $0,2$ | $0,1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $0,6$ | $0,4$ | $0,3$ | $0,2$ | $-1$ |

et une autre variable aléatoire $Y = 0,06+0,2X$.

A. Calculer les espérances de $X$ et $Y$, leurs écart-types $\sigma_X$ et $\sigma_Y$, et leur corrélation $\rho$.

B. Pour quelle valeur de $t$ la variance de $tX+(1-t)Y$ est-elle nulle ?

Solutions :

A. $E(X) = 0,1\times 0,6+0,2\times 0,4+0,4\times 0,3+0,2\times 0,2+0,1\times(-1) = 0,2$.
$E(Y) = E(0,06+0,2X) = 0,06+0,2E(X) = 0,1$.
$V(X) = 0,1\times(0,6-0,2)^2+0,2\times(0,4-0,2)^2+0,4\times(0,3-0,2)^2+0,2\times(0,2-0,2)^2+0,1\times(-1-0,2)^2 = 0,172$, d'où $\sigma_X = \sqrt{V(X)} \approx 0,415$.
$\sigma_Y = \sigma(0,06+0,2X) = \sigma(0,2X) = 0,2\sigma_X \approx 0,083$.
$Cov(X,Y) = Cov(X,0,06+0,02Y) = Cov(X,0,06)+0,02Cov(X,X) = 0+0,02V(X) = 0,02\sigma_X^2$, donc $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{0,02\sigma_X^2}{\sigma_X 0,02\sigma_X} = 1$.

B. $V(tX+(1-t)Y = t^2V(X)+(1-t)^2V(Y)+2t(1-t)Cov(X,Y) = t^2\sigma_X^2 + (1-2t+t^2)\sigma_Y^2 + (2t-2t^2)\rho\sigma_X\sigma_Y = t^2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\rho\sigma_X\sigma_Y) + t(-2\sigma_Y^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y)+\sigma_Y^2$. On cherche $t$ telle que cette expression soit nulle, c'est une équation du second degré. $\Delta = (-2\sigma_Y^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y)^2 - 4(\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\rho\sigma_X\sigma_Y)\sigma_Y^2 = 4\sigma_Y^4+4\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2-8\rho\sigma_X\sigma_Y^3 - 4\sigma_X^2\sigma_Y^2-4\sigma_Y^4+8\rho\sigma_X\sigma_Y^3 = 4\sigma_X^2\sigma_Y^2(\rho^2-1)$. Or $\rho=1$, donc $\Delta=0$. Il y a donc une unique solution $t = \frac{2\sigma_Y^2-2\rho\sigma_X\sigma_Y)}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\rho\sigma_X\sigma_Y)} = \frac{0,2^2\sigma_X^2-0,2\sigma_X^2}{\sigma_X^2+0,2^2\sigma_X^2-2\times 0,2\sigma_X^2} = \frac{0,04-0,2}{1+0,04-0,4} = -0,25$.