Sommaire :

Partie A

Généralités : théorèmes et relations métriques :

a. Théorèmes

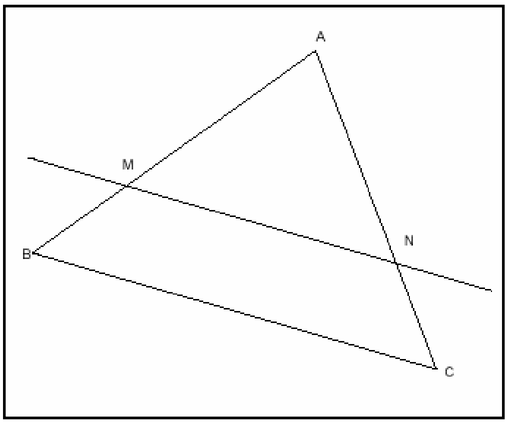
1. Théorème de Thalès

Le théorème de Thalès est en fait le théorème proprement dit et sa réciproque. Le théorème constitue une première et importante étape dans la "numérisation" de la géométrie : une égalité de rapport implique un parallélisme. Comme chacun peut le constater, il est plus facile de raisonner sur des nombres que sur des points ou des droites...

Enoncé

Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC], et si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC), alors on a les égalités suivantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Soit ABC un triangle quelconque,

Hypothèses : M $\in$ [AB]
N $\in$ (AC)
(MN) // (BC)

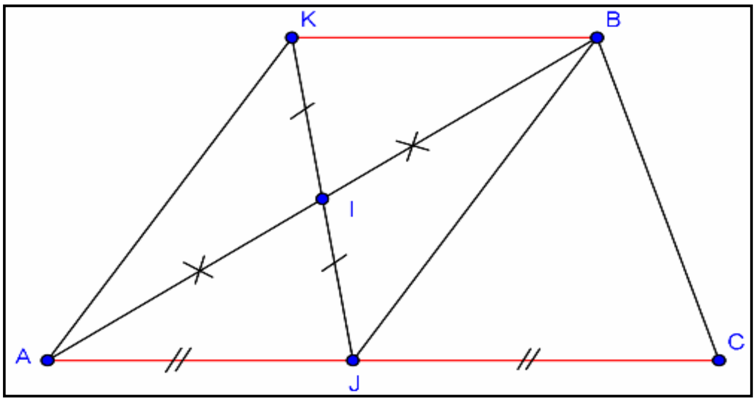
Conclusion : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Un des corollaires du théorème de Thalès est le théorème de la droite des milieux.

2. Théorème de la droite des milieux

Enoncé

Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.



Soit ABC un triangle quelconque,

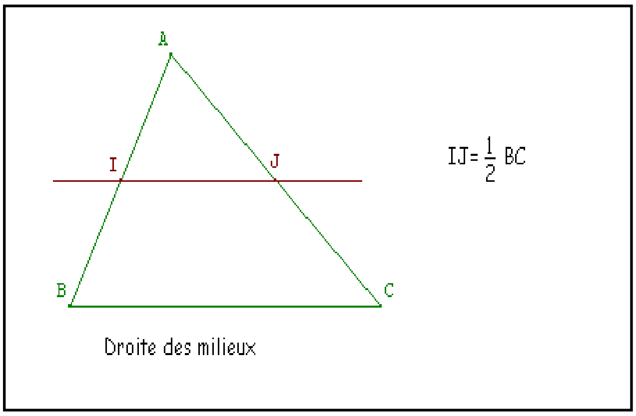
Hypothèses : I milieu de [AB] et J milieu de [AC]

Conclusion **: (IJ) // (BC)**

3. Propriétés des milieux

Enoncé

Si dans un triangle un segment joint les milieux de deux côtés alors ce segment mesure la moitié du troisième côté.

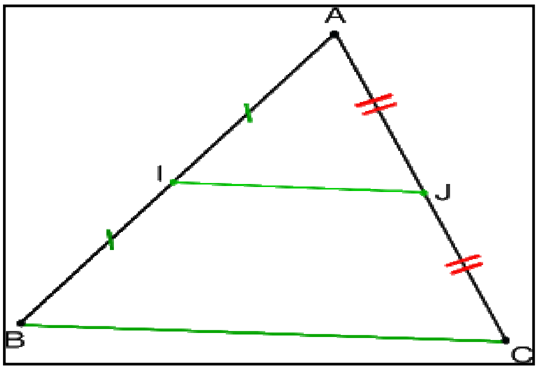


Soit ABC un triangle quelconque,
<u>Hypothèses</u> : I milieu de [AB] et J milieu de [AC]
<u>Conclusion</u> **: IJ = ½ BC**

Réciproque

Enoncé

Si dans un triangle la parallèle à un côté passe par le milieu d'un deuxième côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

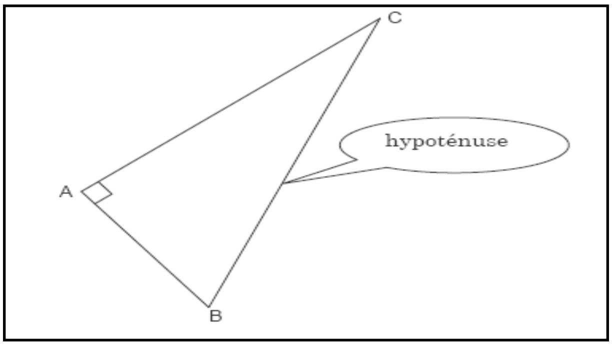


Soit ABC un triangle quelconque,
<u>Hypothèses</u> : I milieu de [AB]
(IJ) // (BC)
J $\in$ (AC)
<u>Conclusion</u> **: J milieu de [AC]**

4. Théorème de Pythagore

Enoncé

ABC est rectangle en A ssi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (i.e. le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des 2 autres côtés)



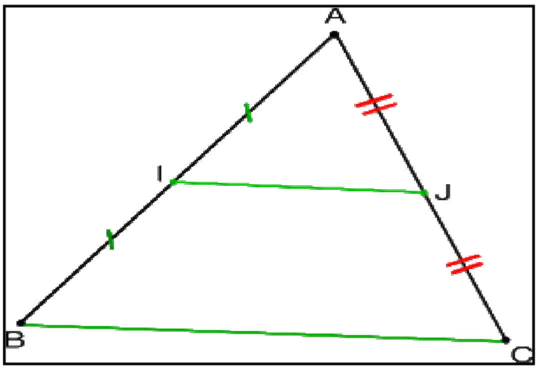
Dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur d'un côté connaissant la longueur des deux autres côtés.

Réciproque

Enoncé

Si dans un triangle ABC, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle en A.

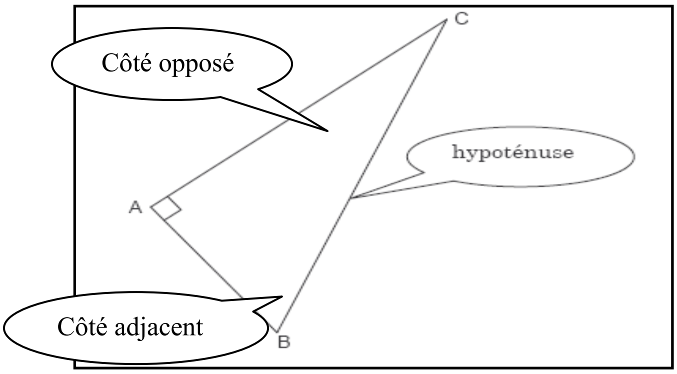
La réciproque du théorème de Pythagore permet de démontrer qu'un triangle est rectangle.



b. Relations métriques

On se place dans $\mathcal{P}$ plan affine (associé au plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$) muni d'une distance.
On considérera, dans toute la leçon, un triangle ABC non aplati (i.e. A, B et C non alignés).

Définition :
Un triangle ABC est rectangle en A si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
Si c'est le cas, le côté [BC] sera appelé l'hypoténuse du triangle ABC.



[AC] est le côté opposé de l'angle $\hat{B} = \widehat{ABC}$
[AB] est le côté adjacent de l'angle $\hat{B} = \widehat{ABC}$

<u>Proposition 1 :</u>

L'aire d'un triangle rectangle en A est $S = \frac{1}{2}AB \times AC$ (c'est la moitié de l'aire d'un rectangle).

<u>Proposition 2 : Caractérisation :</u>
Le triangle ABC est rectangle en A $\Longleftrightarrow$ 2AI = BC où I est le milieu de [BC]
$\Longleftrightarrow$ A est sur le cercle de diamètre [BC]
(c'est le Théorème de l'angle droit (cas particulier du Théorème de l'angle inscrit))

Proposition 3 : Relations métriques :
On note H le pied de la hauteur issue de A. On suppose de plus $H \in]BC[$, alors :
i) ABC est rectangle en A $\Longleftrightarrow BC \times AH = AB \times AC$ (Formules des aires)
ii) ABC est rectangle en A $\Longleftrightarrow BA^2 = BH \times BC$
$\Longleftrightarrow CA^2 = CH \times CB$
iii) ABC est rectangle en A $\Longleftrightarrow AH^2 = BH \times HC$

c. Trigonométrie

Définition :

On définit, dans un triangle rectangle en A, le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle $\widehat{B}=\widehat{ABC}$ aigu par les formules suivantes :

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{cote adjacent}}{\text{hypotenuse}} \in]0,1[$$
$$\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{cote oppose}}{\text{hypotenuse}} \in]0,1[$$
$$\tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{cote oppose}}{\text{cote adjacent}} \in \mathbb{R}$$

Proposition 4:

Pour tout angle (géométrique) aigu, on a les propriétés suivantes :

$i)\tan\widehat{B}=\frac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}$

$ii)\cos^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{B}=1$

iii) Lorsque les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires, i.e. $\widehat{B}+\widehat{C}$ = 90° (ce qui est le cas ici), on a $\sin\widehat{B}=\cos\widehat{C}$ i.e. $\sin(90^o-\widehat{B})=\cos\widehat{B}$ et $\cos(90^o-\widehat{B})=\sin\widehat{B}$

Proposition 6 : Valeurs remarquables

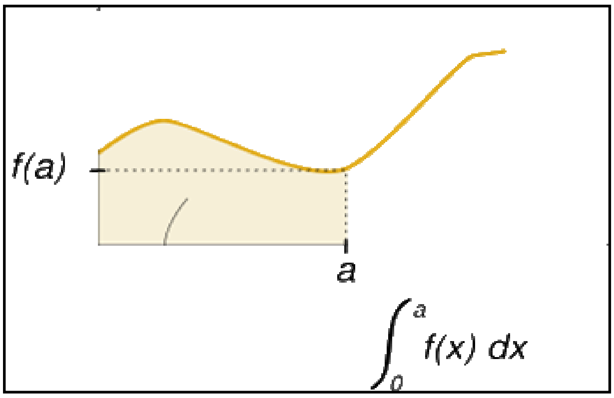
α	30^o	45^o	60^o
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

B. Intégrales simples

Une **intégrale** est le résultat de l'opération mathématique, effectuée sur une fonction, appelé intégration. Une intégrale est donc composée d'un intégrande (la fonction à intégrer) et d'un opérateur que l'on appelle intégrateur (le ∫).

a. Approche intuitive

Représentation graphique d'une intégrale.
En mathématiques, l'**intégrale** d'une fonction réelle positive est la valeur de l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction.



Pour les fonctions qui prennent des valeurs réelles négatives (gardant un signe constant par intervalles), une définition d'aire algébrique rend possible une aire négative.

b. Définition

Soit *f* une fonction continue définie sur un segment [*a*,*b*] à valeurs réelles. Pour simplifier, supposons que cette fonction soit positive (à valeurs positives ou nulles).
L'ensemble $S = S_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^+ | \, a \leq x \leq b \ et \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$ est une région du plan comprise entre la courbe représentative de *f*, les deux verticales *x*=*a* et *x*=*b*, et l'axe des abscisses *x*. La mesure de l'« aire » de *S* cherchée, notée $\int_a^b f(x)dx$, est l'intégrale de a à b de *f*. Celle-ci est alors appelée l'intégrale définie de *f* sur le segment *[a,b]*.
Il est possible de définir une intégrale par la notion de **primitive** d'une fonction. La « primitivation » est l'opération qui, à partir d'une fonction *f*, donne une fonction *F* dérivable et dont la dérivée est égale à *f* : $F'(x) = f(x)$
En admettant que toute fonction continue sur un segment [*a*, *b*], admet des primitives, l'intégrale de *a* à *b* est égale à *F*(*b*)-*F*(*a*) et ce nombre ne dépend pas de la primitive choisie.

c. Moyenne

Pour toute fonction continue (ou même seulement continue par morceaux) sur un segment [a, b] non vide et non trivial (c.-à-d. b>a), la **valeur moyenne de *f* sur [a;b]** est le réel *m* défini par :

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$$

Cette notion généralise celle de moyenne d'un nombre fini de réels en l'appliquant à un nombre infini de valeurs prises par une fonction intégrable.

d. Propriétés des intégrales

Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur *I* et *a*, *b* et *c* trois réels de *I*.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ (relation de Chasles)
4. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
5. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
6. Si $f(x) \leq g(x)$ sur [*a*; *b*], alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
7. **Inégalité de la moyenne** : Si *f* est continue sur *[a; b]* et si pour tout *x* de cet intervalle, on a : $m \leq f(x) \leq M$, alors $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$

e. Intégration par parties

En mathématiques, l'**intégration par parties** est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul.
La formule-type est la suivante, où *f* et *g* sont deux fonctions dérivables, de dérivées continues et *a* et *b* deux réels de leur intervalle de définition.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ou encore

$$\int udv = uv - \int vdu$$

où u représente une partie de l'intégrande et dv représente l'autre partie ainsi que la variable d'intégration.

Démonstration
La démonstration de cette formule est très simple : en effet, elle découle directement de la propriété de dérivation d'un produit de fonctions u et v : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
On a donc :

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int (uv)' - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple
Effectuons le calcul de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$ grâce à une intégration par parties.
Pour cela, nous posons :
$f(x) = x$, de telle sorte que $f'(x) = 1$,
$g'(x) = \cos(x)$, de telle sorte que $g(x) = \sin(x)$, par exemple.
Il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$$

Effectuons le calcul de l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int xe^x dx$$

Pour l'intégration par parties posons :
$u = x$ et $dv = e^x dx$
Nous avons donc :
$du = dx$ et $v = e^x$
Utilisons la formule de l'intégration par parties :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

L'intégrale est maintenant beaucoup plus simple à calculer. On trouve :

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

f. Intégration par changement de variable

En mathématiques, le **changement de variable** est un procédé qui consiste à remplacer une variable ou même une fonction par une autre fonction de celle-ci ou d'un autre paramètre. Ce procédé est un des outils principaux pour la résolution d'intégrales, en analyse.

Principe
C'est la règle d'intégration qui découle du théorème de dérivation des fonctions composées.
Soit deux fonctions dérivables f,g et sachant, par la définition d'intégrale, que

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$$

alors ce théorème permet d'obtenir

$$\int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g(x)}f(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\right) dx = \int \mathrm{d}[f\circ g(x)] = f\circ g(x) + C$$

Exemple

Soit à calculer

$$\int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x$$

Si on pose le **changement de variable** $u = x^2$ et donc $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ alors

$$\int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \int \cos(u)\mathrm{d}u = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C$$

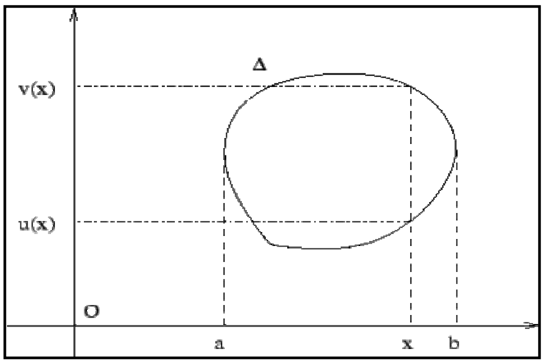
C. Calcul d'aires et de volumes

a. Description hiérarchique du domaine et intégrale

On ne peut calculer une intégrale multiple que si on a une description hiérarchique du domaine :

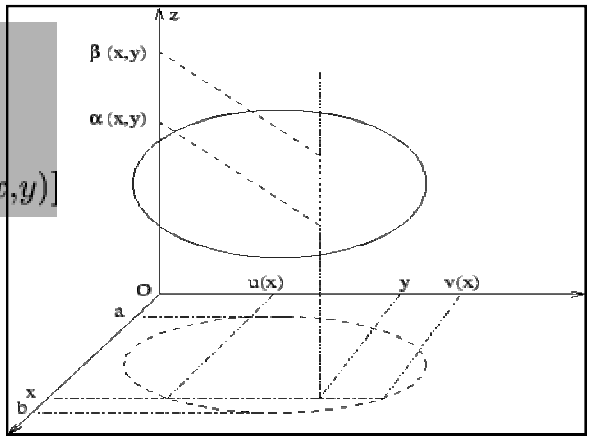
- Pour une intégrale double :

$$(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [u(x),v(x)] \end{cases}$$



- Pour une intégrale triple :

$$(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [u(x),v(x)] \\ z \in [\alpha(x,y),\beta(x,y)] \end{cases}$$



Remarque : On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.

On définit alors les intégrales doubles et triples comme des intégrales simples emboîtées :

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dy\right) dx$$

b. Formules de calcul d'Aires et de Volumes

On travaille ici dans un repère orthonormal.

- Dans le plan, l'aire géométrique du domaine Δ est : $\mathcal{A} = \iint_\Delta dx\,dy$,

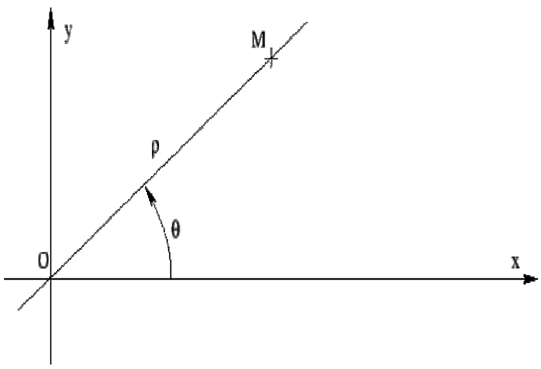
- Dans l'espace, le volume géométrique du domaine Δ est : $\mathcal{V} = \iiint_\Delta dx\,dy\,dz$.

1. Intégrale double en coordonnées Polaires

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $(x,y) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta) \in \Delta$, et

$f(x,y) = g(\rho,\theta)$

La figure ci-dessous indique le mode de calcul.

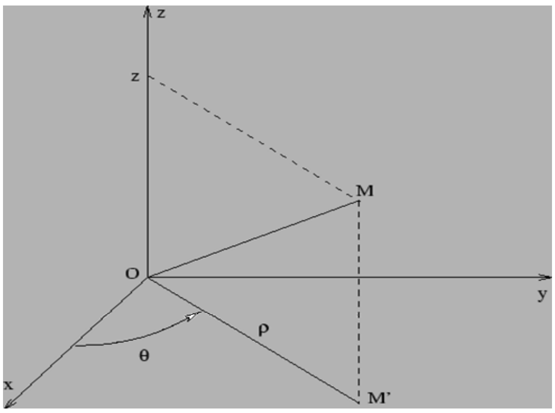


2. Intégrale triple en coordonnées Cylindriques

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta,z) \in \Delta$,

et $f(x,y,z) = g(\rho,\theta,z)$

La figure ci-dessous indique le mode de calcul.



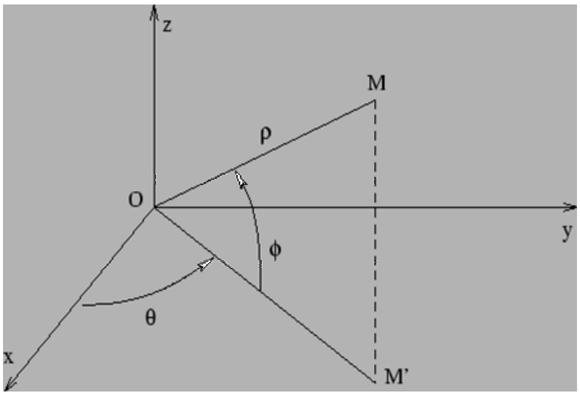
3. Intégrale triple en coordonnées Sphériques

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = z\sin\varphi \end{cases}$$

$(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta,\varphi) \in \Delta$,

et $f(x,y,z) = g(\rho,\theta,\varphi)$

La figure ci-dessous indique le mode de calcul.



- Remarque : Il s'agit de la convention des mathématiciens : les physiciens utilisent un autre angle.

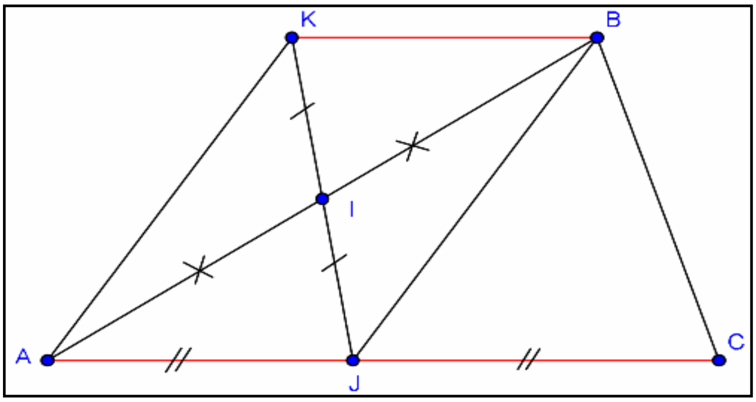
  En mathématiques, en général, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Les physiciens utilisent l'angle entre
- Oz et OM qui appartient donc à $[0,\pi]$.

Ils échangent ainsi $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Annexes

Démonstrations

Théorème de la droite des milieux



Sur la figure, (IJ) est la droite des milieux dans ABC qu'on veut prouver parallèle à (BC).

Soit K le symétrique de J par rapport à I, on a alors I milieu de [JK] et $IJ = \frac{KJ}{2}$.

Comme I est par hypothèse le milieu de [AB], les diagonales de AJBK se coupent en leur milieu commun I, donc AJBK est un parallélogramme.
Ses côtés [AJ] et [KB] sont parallèles et de même longueur, et il en est donc de même pour [JC] et [KB].

Donc KBCJ est un parallélogramme.

Par les propriétés du parallélogramme, les côtés opposés [KJ] et [BC] sont parallèles, la droite (IJ) est donc parallèle à (BC).

Comme les côtés opposés sont égaux, de KJ = BC on déduit : $IJ = \frac{BC}{2}$.

Proposition 1 :

Démonstration : Soit A' le symétrique de A par rapport à I.
Par construction, BACA' est un parallélogramme (car les diagonales se coupent en leur milieu).
Ainsi, ABC est rectangle en A ssi BACA' est un rectangle (un rectangle étant un parallélogramme ayant un angle droit)
donc ABC est rectangle en A ssi 2AI = BC (un rectangle étant un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur)

Proposition 2 : Caractérisation :

Démonstration : On a, avec I milieu de [BC], BC = BI + IC = 2BI.
Ainsi, ABC est rectangle en A ssi AI = BI
i.e. ssi $A \in \mathcal{C}$(I, BI), cercle de diamètre [BC].

Remarque : Via le produit scalaire, la démonstration est immédiate avec :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})=0 \Leftrightarrow AI^2=BI^2$

Proposition 3 : Relations métriques :

Démonstration :

i) L'aire de ABC est S = $\frac{1}{2}$Base × hauteur = $\frac{1}{2}$BC × AH (c'est la moitié de l'aire d'un rectangle)

Et si ABC est rectangle en A, S = $\frac{1}{2}$AB × AC (car (AB) est la hauteur issue de B ou (AC) celle issue de C)

Ainsi, par identification, on a bien BC × AH = AB × AC (Formules des aires).

Réciproquement, si BC × AH = AB × AC, l'aire du triangle ABC est donc S = $\frac{1}{2}$BC × AH = $\frac{1}{2}$ AB × AC

Mais on a également, S = $\frac{1}{2}$AB × CH' où H' est le pied de la hauteur issue de C.

D'où nécessairement, AC = H'C i.e. H' = A avec A, B, H' alignés

donc (AC) $\perp$ (AB) et ABC est rectangle en A.

ii) Si ABC est rectangle en A, on a :

$BA^2 = BC^2 - AC^2$ par le théorème de Pythagore

$BA^2 = BC^2 - (AH^2 + HC^2)$ avec ACH rectangle en H et Pythagore

$BA^2 = BC^2 - (AB^2 - BH^2 + HC^2)$ avec ABH rectangle en H

D'où $2AB^2 = BC^2 + BH^2 - CH^2$

Or B,C et H étant alignés, on a $BC^2 = (BH + HC)^2$ où H $\in$]BC[

$$=BH^2+HC^2+2BH\times HC$$

donc, il vient $2AB^2 = 2BH^2 + 2BH \times HC = 2BH(BH + HC) = 2BH \times HC > 0$

(Les mesures algébriques nous assurant que H $\in$]BC[)

La réciproque s'obtient alors en remontant les calculs (avec H $\in$]BC[)

De plus, B et C jouant des rôles arbitraires, on obtient par permutation la seconde équivalence.

iii) Semblable à ii)

Si ABC est rectangle en A, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ par le théorème de Pythagore

$=AH^2+HB^2+AH^2+HC^2$ avec ABH et ACH rectangles en H

$=2AH^2+HB^2+HC^2$

De même, on a $BC^2 =(BH + HC)^2 = BH^2 + HC^2 + 2BH \times HC$ (avec B, C et H alignés)

D'où par identification $AH^2 = BH \times HC$

Et réciproquement, en remontant les calculs.

Remarque : Démonstration identique par le produit scalaire en remplaçant les mesures algébriques par des vecteurs avec $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ ssi $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Proposition 4 : (Egalité de trois rapports)

Démonstration : Posons BC = xBC' et AB = yBA'

Par Pythagore, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ d'où $x^2BC'^2 = y^2BA'^2 + AC^2$

et $BC'^2 = A'B^2 + A'C'^2$ d'où $x^2BC'^2 = x^2BA'^2 + x^2A'C'^2$

et l'égalité $y^2BA'^2 + AC^2 = x^2BA'^2 + x^2A'C'^2$ (*)

D'autre part, en calculant l'aire du triangle ABC de deux manières, on a :

d'où A'C' × AB = AC × A'B i.e. A'C' × yBA' = AC × A'B et AC = yA'C'

Enfin, avec (*), on obtient $y^2BA'^2 + y^2A'C'^2 = x^2BA'^2 + x^2A'C'^2$, i.e. x = y

Ainsi, $\frac{BC}{BC'}=\frac{AB}{A'B}=\frac{AC}{A'C'}$.

D'où le résultat.

En particulier, $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B}{BC'}$

ce qui prouve que le rapport $\frac{AB}{BC}$ est indépendant de la longueur des côtés.
Donc les rapports $\frac{AB}{BC}$ $\frac{AC}{BC}$ et $\frac{AC}{AB}$ sont indépendants de la longueur des côtés et ne dépendent que de l'angle $\widehat{B}$.
(l'angle $\widehat{C}$ étant lui-même fonction de l'angle $\widehat{B}$, avec $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}$= 180° i.e. $\widehat{B}+\widehat{C}$ = 90° puisque par hypothèse l'angle $\widehat{A}$ est droit).

Proposition 5 :

Démonstration :

i) Par définition, dans un triangle rectangle en A, on

$$\tan\widehat{B}=\frac{AC}{AB}=\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}}=\frac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}$$

ii) Dans ABC rectangle en A, on a

$$\cos^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{B}=\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1$$

avec $BC^2 = AB^2 + AC^2$ d'après le théorème de Pythagore

iii) Dans ABC rectangle en A, on a $\sin\widehat{B}=\frac{AC}{BC}$

et en échangeant les rôles de B et C, on a $\cos\widehat{C}=\frac{AC}{CB}=\sin\widehat{B}$ d'où le résultat.

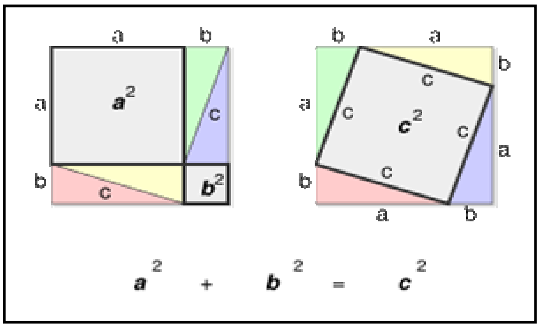
Proposition 6 : Valeurs remarquables

Démonstration :

i) On se place dans un triangle équilatéral de côté 1, puis on considère le triangle ABH rectangle en H où H est le pied de la hauteur issue de A.
On a $\widehat{A}=30°$ et
$\widehat{B}=60°$ et
Ce qui nous donne la 1ère et la 3ème colonne (par complémentarité).
ii) On se place dans un carré ABCD de côté 1, puis on considère le triangle isocèle ABC rectangle en B.
On a $\widehat{A}=\widehat{C}$= 45° et
Ce qui prouve la seconde colonne.

Théorème de Pythagore.

Considérons un triangle rectangle dont les côtés sont de longueurs *a*, *b* et *c*. Ensuite recopions ce triangle trois fois et plaçons le triangle et ses copies de manière à avoir le côté *a* de chacun aligné au côté *b* d'un autre, et pour que les jambes des triangles forment un carré dont le côté est $a + b$, comme dans l'image. Puis, nous essayons de trouver l'aire du carré formé par les côtés *c*. Évidemment, c'est c^2, mais c'est aussi égal à la différence entre l'aire du carré extérieur et la somme des aires des triangles.



L'aire du carré est $(a + b)^2$ (car son côté est $a + b$) et l'aire totale des triangles est quatre fois l'aire d'un seul, c'est-à-dire $4(ab / 2)$, donc la différence est $(a + b)^2 - 4(ab / 2)$, ce qu'on peut simplifier comme $a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$, ou bien $a^2 + b^2$. Nous avons démontré que l'aire du carré de côté *c* est égale à $a^2 + b^2$; en effet, $c^2 = a^2 + b^2$. CQFD

Changement de variables

Intégrale double

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ bijective $(x,y) \in D \Leftrightarrow (u,v) \in \Delta$, et $f(x,y) = g(u,v)$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta g(u,v) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\,dv$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien. (voir annexe)

Intégrale triple

$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ bijective $(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (u,v\ w) \in \Delta$, et $f(x,y,z) = g(u,v,w)$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta g(u,v,w) \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien.

Matrice jacobienne

En analyse vectorielle, la **matrice jacobienne** est une matrice associée à une fonction vectorielle en un point donné. Le déterminant de cette matrice est appelé **jacobien.**

La matrice jacobienne est la matrice des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction vectorielle.

Soit F une fonction d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^m$. Une telle fonction est définie par ses m fonctions composantes à valeurs réelles :

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Les dérivées partielles de ces fonctions en un point **M**, si elles existent, peuvent être rangées dans une matrice à m lignes et n colonnes, appelée matrice jacobienne de F :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est notée :

$$J_F(M) \qquad , \qquad \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{D}(f_1,\ldots,f_m)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}$$

Pour $i = 1, ..., m$, la i^e ligne de cette matrice est la transposée du vecteur gradient au point **M** de la fonction y_i. La matrice jacobienne est également la matrice de la différentielle de la fonction.

Exemple

La matrice jacobienne de la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par :

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, 5x_3, 4x_2^2 - 2x_3, x_3 \sin(x_1)\right)$$

est:

$$J_F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 8x_2 & -2 \\ x_3\cos(x_1) & 0 & \sin(x_1) \end{pmatrix}$$

Exemple :

Volume d'un cylindre, de révolution ou non, de base un cercle de rayon R.

L'application de la formule précédente donne immédiatement : $\mathcal{V} = h \times \pi R^2$

Exemple : volume d'une sphère.

La sphère de rayon R et de centre O est l'image du pavé

$C_3 = [0, R] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par la fonction

$\Phi \ : \quad (r, \theta\ \varphi) \longmapsto (r\ \cos(\theta)\ \cos(\varphi),\ r\ \sin(\theta)\ \cos(\varphi),\ r\ \sin(\varphi))$.

Un calcul immédiat donne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(V(\mathcal{C}_3)) &= \int_{\mathcal{C}_3} \left\| \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \right) \right\| \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\mathcal{C}_3} r^2 \cos(\varphi)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{4}{3}\pi \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Quelques classiques.

Prisme droit. (*Parallélépipède rectangle, cube.*)

Aire latérale :	Volume :
hauteur $\times$ périmètre de base	hauteur $\times$ aire de base

Cylindre droit.

Aire latérale :	Volume :
hauteur $\times$ périmètre de base	hauteur $\times$ aire de base

Pyramide régulière ou cône de révolution.

Aire latérale :	Volume :
$\frac{1}{2}$ apothème $\times$ périmètre de base	$\frac{1}{3}$ hauteur $\times$ aire de base

Sphère de rayon R.

Aire latérale **(*)** :	Volume **(*)** :
$4\pi \times R^2$	$\frac{4}{3}\pi \times R^3$

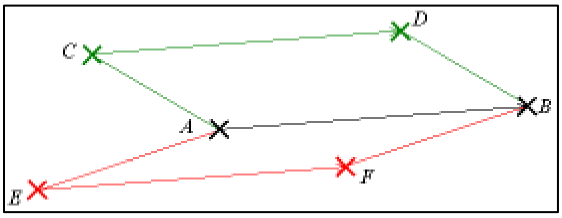
Tore de rayons R et r ($r < R$).

Aire latérale :	Volume :
$4\pi^2 \times R \times r$	$2\pi^2 \times R \times r^2$

Partie B

1.Définition :

En mathématiques, le vecteur est un objet véhiculant plus d'information que les nombres usuels, ou scalaires, et sur lequel on peut effectuer des opérations simples.
On peut se représenter un vecteur comme un segment orienté (une « flèche ») dont l'emplacement dans le plan n'a pas d'importance, seuls comptent sa longueur, sa direction et son sens. On peut donc le faire glisser librement dans le plan, parallèlement à lui-même.

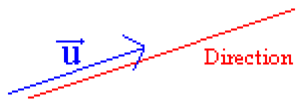


Les bipoints (A,B), (C,D), (E,F) sont équipollents. Ils constituent trois représentants d'un même vecteur.

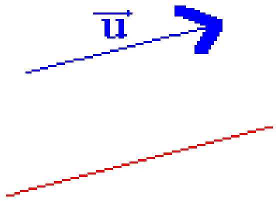
Les grandeurs vectorielles s'opposent aux grandeurs scalaires. Elles sont caractérisées par quatre propriétés :

- leur norme (ou longueur), qui est un scalaire ;
- leur direction ;
- leur sens ;
- et éventuellement, leur origine, ou point d'application.

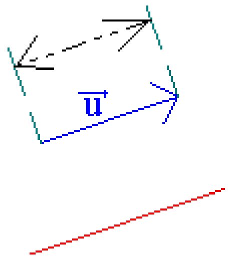
Sa direction



Son sens



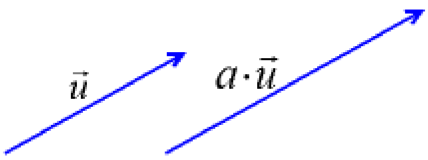
Sa norme



2. Opérations sur les vecteurs dans le plan et l'espace

Les vecteurs dont il sera question dans cet article sont ceux de l'espace $\mathbb{R}^3$ou du plan $\mathbb{R}^2$.

a. Produit d'un vecteur par un scalaire



Le terme « scalaire » désigne ici un nombre réel. Le produit d'un vecteur $\vec{u}$par un scalaire *a* est un vecteur noté

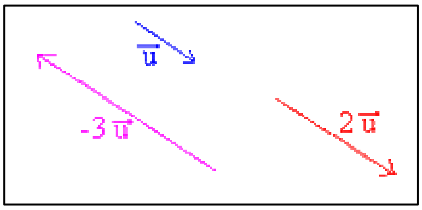
$a \cdot \vec{u}$

de même direction et sens que $\vec{u}$, mais dont la longueur vaut

$a \cdot ||\vec{u}||$, si a > 0

de même direction mais de sens contraire que $\vec{u}$, et dont la longueur vaut

$-a \cdot ||\vec{u}||$, si a < 0.
il s'agit d'un vecteur nul si a = 0



On a

$$1.\vec{u} = \vec{u}\text{ , }0.\vec{u} = \vec{0}\text{ et }a.\vec{0} = \vec{0}$$

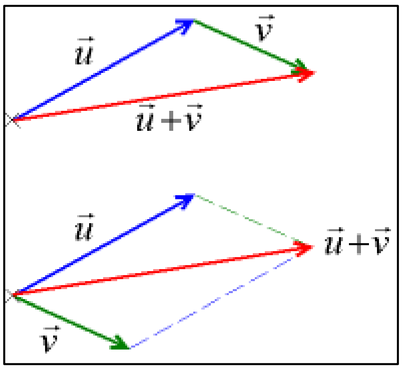
1 est donc l'élément scalaire neutre, et 0 l'élément scalaire absorbant pour cette opération. Le produit d'un vecteur par un scalaire est distributif sur l'addition des scalaires

$$(a+b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$$

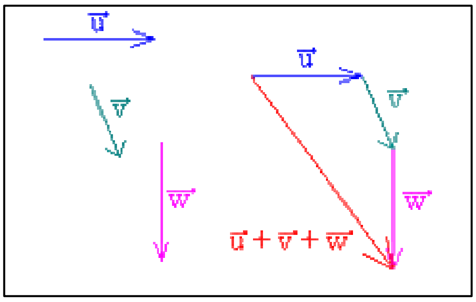
mais il n'est pas commutatif : la notation $\vec{u} \cdot a$ n'a pas de sens.
Notez que deux vecteurs sont colinéaires (parallèles) si et seulement s'ils sont proportionnels, c'est-à-dire s'il existe un nombre a tel que $\vec{u} = a \cdot \vec{v}$.

b. Somme de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, qui est construit de la manière suivante :



on amène l'origine du deuxième vecteur à l'extrémité du premier, la somme est le vecteur qui joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité de second.
Il s'agit du troisième côté d'un triangle formé par les deux premiers vecteurs.
On peut aussi le construire d'une autre manière :
on amène les origines des deux vecteurs en un même point, on trace un parallélogramme dont les vecteurs sont deux côtés, la somme est alors la diagonale du parallélogramme partant de l'origine.
Dans les deux cas, on place les vecteurs bout à bout ; mais si l'origine d'un vecteur correspond à l'extrémité de l'autre, on utilise la méthode du triangle, si les origines sont confondues, on utilise la méthode du parallélogramme.
Si l'on a trois points A, B et C, alors on a la « relation de Chasles » :



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

on déduit de cela que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

ce qui permet de définir l'opposé d'un vecteur, et donc la soustraction : en posant la notation

$$-\overrightarrow{AB} = -1 \cdot \overrightarrow{AB}$$

on a

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

L'opposé d'un vecteur est le vecteur de même direction, de même longueur, mais de sens opposé.
On a : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

$\vec{0}$ Est l'élément neutre de l'addition des vecteurs. L'addition des vecteurs est commutative

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Le produit d'un scalaire par un vecteur est distributif sur l'addition des vecteurs :

$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$.

c. Produit scalaire de deux vecteurs

- **Définition**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs faisant un angle géométrique α, on appelle produit scalaire, et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre (réel) valant :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\alpha)$.

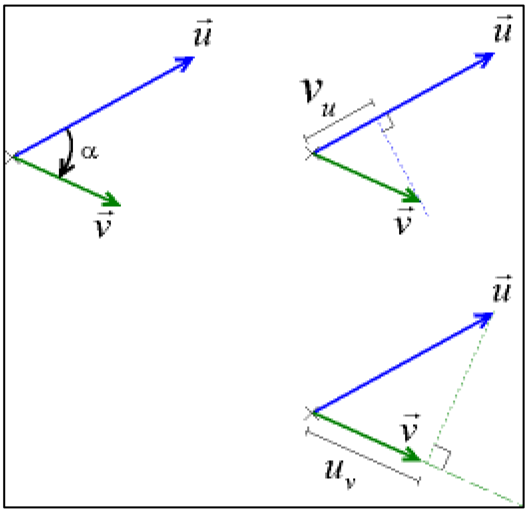
Le produit scalaire est nul si l'un des vecteurs est nul ou si l'angle entre eux est droit (c'est-à-dire si et α = π/2 rad = 90 °), les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans ce cas orthogonaux, strictement positif si l'angle est aigu et strictement négatif si l'angle est obtus.

Cette opération a été introduite pour simplifier les calculs sur les projections orthogonales. En effet si vu est la longueur algébrique de la projection de $\vec{v}$ sur une droite orientée selon $\vec{u}$ (vu est positif si la projection est dans le même sens que $\vec{u}$, négatif s'il est dans le sens opposé), alors on a

$\vec{u} \cdot \vec{v} = v_u \cdot ||\vec{u}||$

Ainsi, si la norme de $\vec{u}$ vaut 1, alors la longueur algébrique de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite est $\vec{u} \cdot \vec{v}$. De la même manière, si uv est la longueur algébrique de la projection de $\vec{u}$ sur une droite orientée selon $\vec{v}$, alors on a

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_v \cdot ||\vec{v}||$



- **Propriétés**

Le produit scalaire est commutatif

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Il est distributif sur l'addition des vecteurs

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Le vecteur nul est l'élément absorbant du produit scalaire

$\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{u}$ s'appelle le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ et se note $\vec{u}2$; ainsi : $\vec{u}2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme

$\vec{u}2 = \|\vec{u}\|$ 2 et donc $\sqrt{\vec{u}^2} = \|\vec{u}\|$

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

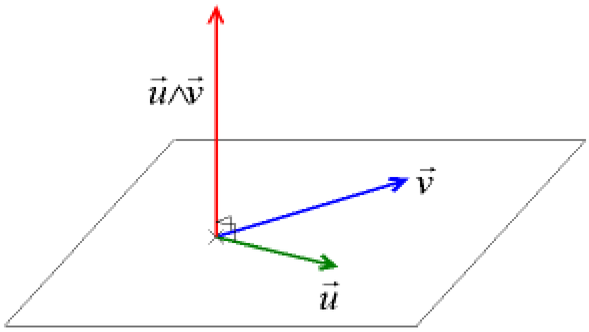
Dans le plan rapporté à une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$ Soient $\vec{u}(u_x; u_y)$ et $\vec{v}(v_x; v_y)$ deux vecteurs dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ de coordonnées polaires respectives $(r; \theta)$ et $(r'; \theta')$. On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = r.r'.\cos(\theta' - \theta)$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = r.r'.(\cos(\theta).\cos(\theta') + \sin(\theta).\sin(\theta'))$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (r.\cos(\theta)).(r'.\cos(\theta')) + (r.\sin(\theta)).(r'.\sin(\theta'))$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y$

Dans l'espace rapporté à une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$

d. Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace



Notons tout d'abord que deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent un plan vectoriel ; un troisième vecteur $\vec{w}$ est coplanaire aux deux précédents si et seulement s'il peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux premiers, c'est-à-dire s'il existe deux réels a et b tels que
$\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$

Trois vecteurs non coplanaires forment une base. La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est dite directe si on peut l'imager avec la main droite, $\vec{u}$ étant le pouce, $\vec{v}$ étant l'index et $\vec{w}$ étant le majeur.
On définit le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, comme étant le vecteur :
normal au plan vectoriel de base $(\vec{u}, \vec{v})$
dont la norme vaut $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
tel que $(\vec{u}, \vec{v}, (\vec{u} \wedge \vec{v}))$ forme une base directe.
On étend la définition précédente au cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires en posant :
$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

e. Produit mixte

- **Définition et propriétés**

Étant donnés trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on appelle produit mixte de ces 3 vecteurs la quantité :
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.
On peut démontrer que l'on a : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$ et :
$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
et aussi :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

autrement dit :
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (u_x v_y w_z + v_x w_y u_z + w_x u_y v_z) - (u_z v_y w_x + v_x w_z u_y + w_y u_x v_z)$

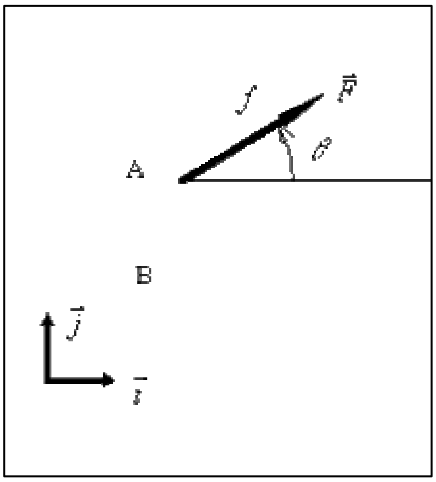
Remarques :
Si deux des trois vecteurs sont égaux ou colinéaires, le produit mixte est nul.

f. Double produit vectoriel

On peut combiner trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par deux produits vectoriels successifs.
C'est ce qu'on appelle un double produit vectoriel.
Exemple : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$
Attention : comme le produit vectoriel n'est ni associatif, ni commutatif, il est nécessaire d'utiliser comme ici des parenthèses et le résultat va dépendre à la fois de l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées et de l'ordre de présentation des 3 vecteurs.

3. Notions sur les torseurs

a. Définition



Un torseur est un champ de vecteurs, antisymétrique de E. Un torseur $[\tau]_A$ en un point A est défini par :

- Un vecteur libre $\vec{R}$ appelé Résultante du torseur
- Un vecteur $\vec{M}_{(A)}$ dépendant du point A ou il est exprimé appelé Moment du torseur en A et vérifiant:

$$\boxed{\forall (A, B) \quad \vec{M}_{(B)} = \vec{M}_{(A)} + \vec{R} \wedge \vec{AB}}$$

Remarque:
La résultante du torseur est indépendante du point où est défini un torseur.

b. Application des torseurs à la représentation d'un champ de force

Soit un champ de force défini dans l'espace à trois dimensions de base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par la donnée de la force $\vec{F}$ appliquée en un point $A(2,3,0)$:
$\vec{F} = \|\vec{F}\| \cos\theta \vec{i} + \|\vec{F}\| \sin\theta \vec{j}$ ou $\vec{F}(f\cos\theta, f\sin\theta, 0)$

Le moment de la force $\vec{F}$ en son point d'application A est nul d'où: $\vec{M}_{F(A)} = \vec{0}$.
Si on veut calculer le moment de la force $\vec{M}_{F(B)}$ au point $B(2,1,0)$,
on obtient $\vec{M}_{F(B)} = -2f\cos\theta\vec{k}$ (intensité de la force f multiplié par le bras de levier $2\cos\theta$, sens négatif).

En appliquant la notion de torseur, on peut définir le torseur force $[F]_A$ au point A, associé à $\vec{F}$ par:

- la résultante du torseur force $[F]_A$ égale à la force $\vec{F}$
- le moment en A du torseur force $[F]_A$ égal à $\vec{M}_{F(A)} = \vec{0}$

Le moment au point B de la force $\vec{F}$ est défini par la formule de transport donnée plus haut soit:

$$\vec{M}_{F(B)} = \vec{M}_{F(A)} + \vec{F} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f\cos\theta \\ f\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2f\cos\theta \end{vmatrix}$$

Ou:

$$\boxed{\vec{M}_{F(B)} = -2f\cos\theta\,\vec{k}}$$

Remarques:

- La notion de torseur de force permet donc de parler globalement d'une force et de son moment en tout point de l'espace.
- Les deux vecteurs définis dans un torseur sont de natures différentes. Pour un torseur de force, le vecteur résultant est une force ayant des composantes dont les unités sont des (N), alors que le moment en un point est un moment dont les composantes ont des unités en (N.m).
- Attention quand l'on demande de définir un torseur, il est nécessaire de donner une réponse pour la résultante et une réponse pour le moment.

Partie C

A. Généralités

La mécanique est la partie de la physique qui étudie le mouvement des corps et les forces auxquelles ils sont soumis. Elle exige donc des définitions précises de grandeurs telles que le déplacement, le temps, la vitesse, l'accélération, la masse ou la force.
La mécanique classique concerne trois grands domaines : la statique, la cinématique et la dynamique.

a. La statique

La statique a pour objet l'étude des forces qui s'exercent sur un corps en équilibre. Lorsqu'un solide est au repos, la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle.

b. La cinématique

La cinématique étudie les mouvements indépendamment de leurs causes. La vitesse moyenne d'un corps entre deux instants t1 et t2 correspond à la distance parcourue par ce solide durant cet intervalle de temps, divisée par la durée correspondante t2-t1.

c. La dynamique

La dynamique s'intéresse aux mouvements d'un corps sous l'action des forces auxquelles il est soumis.
La dynamique définit de manière précise les notions de force et de masse.

B. Concepts de base

- **Modèles d'étude**

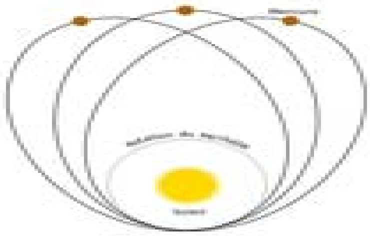
Un **système mécanique** est un ensemble matériel (objet de l'étude) qui peut être, un point matériel, un solide, un ensemble de solides, une partie d'un solide, un échantillon de fluide, ou tout autre association de corps physiques souvent affectés d'une masse.

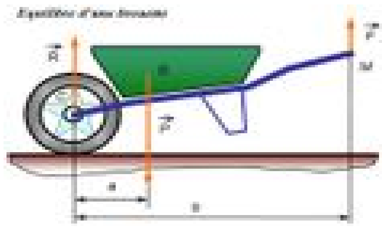
Le choix d'un modèle dépend étroitement du résultat recherché. Des modèles très simples bien adaptés et mis en œuvre peuvent aboutir à des résultats tout à fait réalistes.

Ces modèles d'étude se distinguent en partie par le type de système étudié:

- le point matériel: dans ce cas les actions mécaniques extérieures sont des forces toutes appliquées au point considéré. Il est tout à fait satisfaisant lorsque le système n'est soumis qu'à des actions à distance comme en astronomie, pour l'étude du mouvement des planètes.
- le solide indéformable: les actions mécaniques sont réparties sur la frontière du solide (action de contact) ou dans la masse (actions à distance). du fait de la multiplication des points d'application, l'étude nécessite de plus la considération des moments de force.

Et bien d'autres…



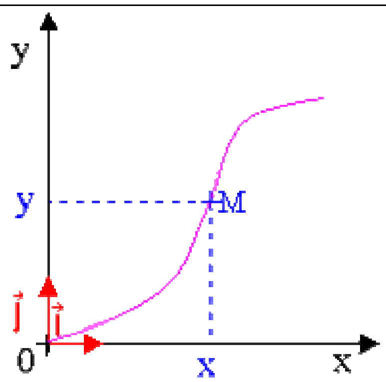
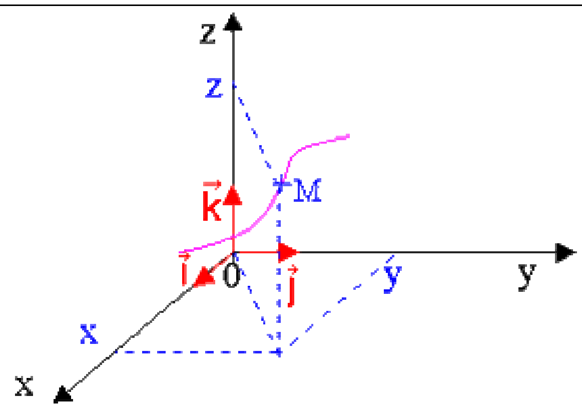


[Mécanique du point] [Mécanique du solide]

- **Référentiels galiléens :**

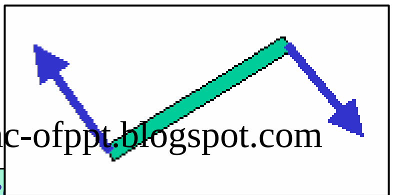
Il s'agit de référentiels dans lesquels le principe d'inertie est vérifié.
Les référentiels terrestres, géocentriques et héliocentriques sont considérés comme galiléens.

Un référentiel est un solide par rapport auquel on étudie le mouvement, c'est un repère spatial associé à une mesure de temps.

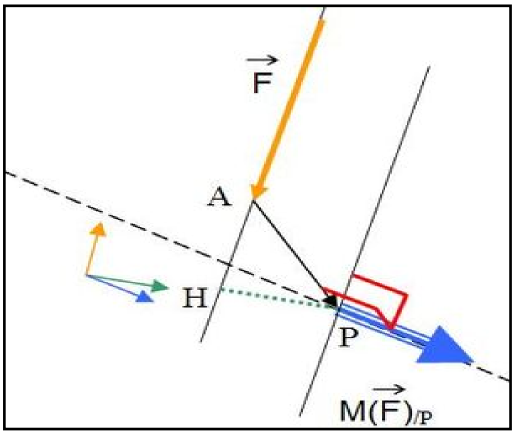
Repère d'espace : On appelle repère le système de repérage dans l'espace associé au référentiel	 Repère à une dimension : $\overrightarrow{OM} = x \, . \, \vec{i}$; $OM = x$ Mouvement rectiligne de M
 Repère à 2 dimensions : $\overrightarrow{OM} = x \, . \, \vec{i} + y \, . \, \vec{j}$; $OM = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ Mouvement plan de M	 Repère à 3 dimensions $\overrightarrow{OM} = x. \, \vec{i} + y. \, \vec{j} + z. \, \vec{k}$; $OM = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ Mouvement de M dans l'espace

- **Moment d'une force:**

Prenons l'exemple d'un bâtonnet posé sur un bureau. Si on pousse l'une de ses extrémités dans un sens, et l'autre dans le sens opposé avec la même force, le stylo va pivoter, suite au couple qu'on lui aura fait subir. Pour



définir les conditions d'équilibre d'un corps, il est nécessaire d'introduire la notion de moment M d'une force, qui est un vecteur mesurant l'effet rotatif de cette force.



Le **moment** d'une force $\vec{F}$ s'exerçant au point A par rapport au pivot P, est défini par :

$$\vec{M}_{\vec{F}/P} = \vec{PA} \wedge \vec{F} = \vec{F} \wedge \vec{AP}.$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.

Ce pseudovecteur est à la fois orthogonal à $\vec{F}$ et au bipoint $\vec{AP}$ et finalement normal au plan dans lequel se déroule la rotation que peut provoquer la force, et son sens donne le sens de rotation (la rotation est positive dans le plan orienté par $\vec{M}_{\vec{F}/\Delta}$).

Le moment algébrique d'une force est compté positivement si cette force contribue au mouvement, et négativement si elle s'oppose au mouvement.

Si d est la distance orthogonale du pivot P à la droite d'action, c'est-à-dire PH, alors sa norme vaut :

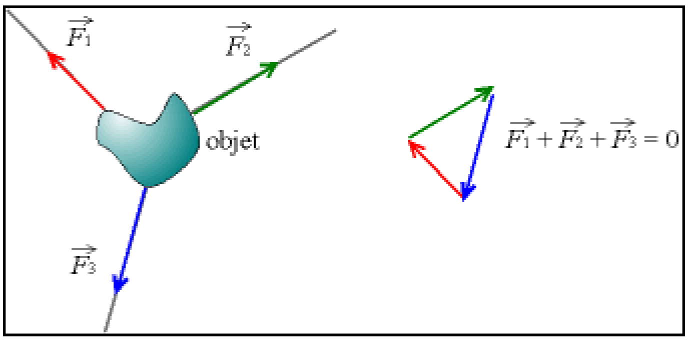
$$\left\|\vec{M}_{\vec{F}/P}\right\| = \left\|\vec{F}\right\| \cdot d.$$

La longueur d est appelée **bras de levier**. Dans le cas bidimensionnel, il est fréquent de considérer la norme du moment comme le moment lui-même, celui-ci ne comportant qu'une composante non nulle.

Un couple est un ensemble de deux forces égales, parallèles et de sens contraire.

C. Les trois lois de Newton

1ère loi : Principe d'inertie :



Lorsque les forces qui s'exercent sur un solide se compensent, son centre d'inertie est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen.
Réciproquement, si le centre d'inertie d'un solide est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen, alors les forces qui s'exercent sur lui se compensent.

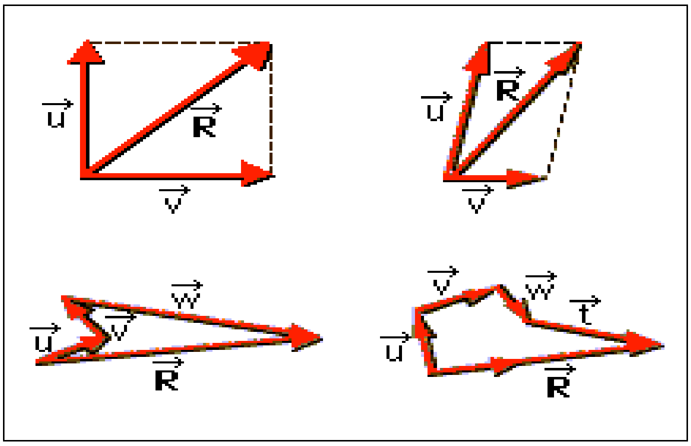
$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \vec{0}$ (le sigle Σ signifie somme en mathématique)

Trouver tous les modules sur | www.bac-ofppt.blogspot.com

Ceci introduit la notion de vecteur force résultante.

Vecteur force résultante

Un solide est généralement soumis à plusieurs forces. Calculer leur effet séparément se révèle souvent fort complexe. Comme les forces peuvent être représentées par des vecteurs, il est souvent plus simple de considérer la force résultante R, somme vectorielle de toutes les forces agissant sur le solide. (revoir les opérations sur les vecteurs)



Deuxième loi de Newton : **principe fondamental de la dynamique :**

Le principe fondamental de la dynamique de translation (PFDT) s'énonce ainsi :

Soit un corps de masse m constante,l'accélération subie par un corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m.

Ceci est souvent récapitulé dans l'équation : $\vec{a} = \frac{1}{m} \sum \vec{F_i}$

Soit : $\sum \vec{F_i} = m\vec{a}$, $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = m\,\vec{a}_G$

où $\vec{F_i}$ désigne les forces exercées sur l'objet, m est sa masse, et $\vec{a}$ correspond à l'accélération de son centre d'inertie G.

Remarque : Si $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ alors $\vec{a}_G = \vec{0}$ et, par conséquent, $\vec{V}_G$ reste constant en direction, sens et norme (on retrouve la première loi de Newton).

On remarque donc, d'après l'exemple du bâtonnet cité ci haut, qu'un solide peut être soumis à des forces de somme vectorielle nulle, sans pour autant être en équilibre.

On démontre qu'un solide est en équilibre si et seulement si la somme des forces auxquelles ce solide est soumis est nulle, ainsi que la somme des moments algébriques de ces forces.

Les deux équations utilisées dans les calculs du Principe Fondamental de la Statique (qui est un cas particulier du principe fondamental de la dynamique) sont :

La **somme des efforts extérieures** à un objet est égale au vecteur nul (équilibre translationnel) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

La **somme des moments en un point**, ici le point A, est égale au vecteur nul (équilibre rotationnel) :

$$\sum \vec{M}_{\vec{F}}(A) = \vec{0}$$

Remarque:
• La projection de ces deux relations vectorielles permet d'obtenir six équations dans l'espace et trois équations dans un plan.

Autrement dit :

Il existe au moins un repère Galiléen tel que pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur représentatif des actions extérieures qui lui sont appliquées est égal au torseur nul :

$$\text{(E) en équilibre} \quad \Rightarrow \quad \{T_{\overline{E}/E}\}_X = \{\,0\,\}_X$$

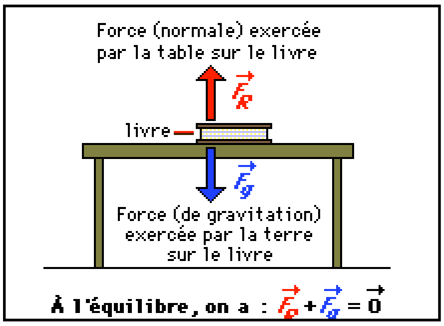
C'est-à-dire que la somme des torseurs associés à ces actions est égal au torseur nul, soit :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$$

$$\sum \overrightarrow{M_{ext,X}} = \vec{0}$$

3ème loi de Newton : Principe des actions réciproques :

Lorsqu'un corps A exerce sur un corps B une action mécanique modélisée par la force $\overrightarrow{F}_{A/B}$, alors le corps B exerce sur le corps A une action mécanique modélisée par la force $\overrightarrow{F}_{B/A}$.
Ces interactions sont telles que :
* $\overrightarrow{F}_{A/B}$ et $\overrightarrow{F}_{B/A}$ ont la même droite d'action
* $\overrightarrow{F}_{A/B} = -\overrightarrow{F}_{B/A}$



D. Chute libre d'un corps

Une **chute libre** est un **mouvement accéléré sous le seul effet de la pesanteur**. On distingue la simple chute dans un champ de pesanteur uniforme au voisinage de la Terre (Galilée, 1605), et la chute céleste (Lois de Kepler).
Il est convenu que les autres forces agissant sur le corps, sont négligées, en particulier la résistance de l'air. Pour le cas où l'on considère la résistance de l'air, on parle de chute avec résistance de l'air.

Chute libre sans vitesse initiale

En supposant que le corps n'est soumis qu'à la pesanteur, si un corps ponctuel P est lâché d'un point de cote z0 sans vitesse initiale, alors :

az = − g (composante selon l'axe des z de l'accélération, deuxième loi de Newton)
vz = − gt + V0 = − gt (composante selon l'axe des z de la vitesse)
$z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$ (Composante selon l'axe des z de la position)

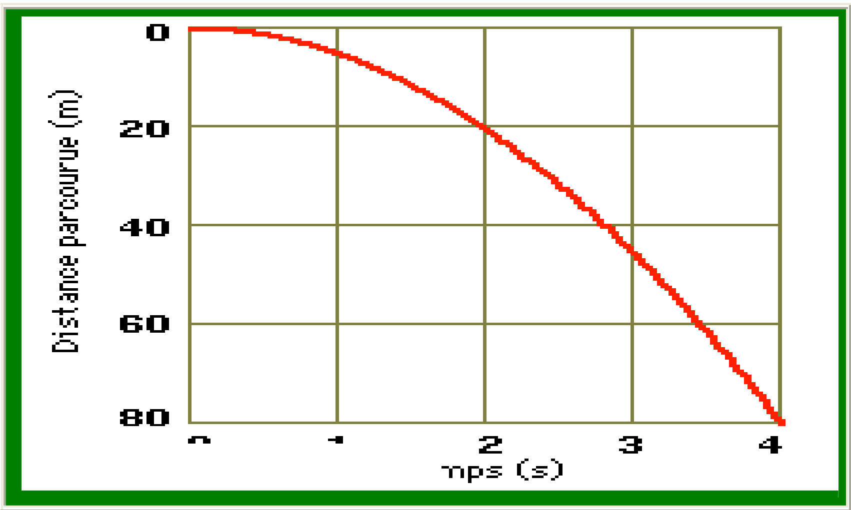
Avec :

- z la hauteur du corps par rapport au sol
- g l'accélération du champ de pesanteur terrestre (environ 9,81 m.s-2)
- t le temps en secondes

La vitesse V à l'impact est donnée par:

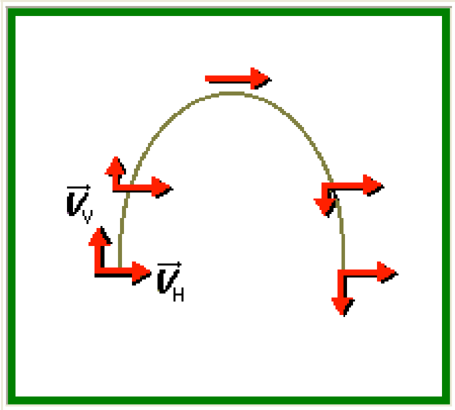
$$V = \sqrt{2gz_0}$$

On peut représenter sur un graphe la distance parcourue par un solide en chute libre en fonction du temps. L'instant t=0 correspond au moment où le corps est lâché.
On constate que, sous l'action du champ gravitationnel, la vitesse du solide s'accélère : il parcourt 20 m pendant les deux premières secondes, puis environ 60 m durant les deux suivantes.



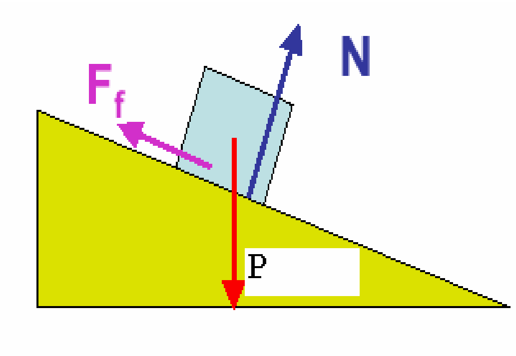
Chute avec vitesse initiale

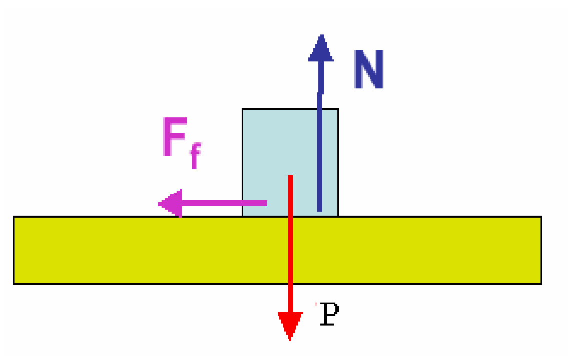
On peut considérer qu'une balle jetée en l'air a une trajectoire parabolique, en négligeant la résistance de l'air. Le vecteur vitesse de la balle est la somme de deux composantes indépendantes : une composante horizontale VH et une composante verticale VV. Au cours du lancer de la balle, la composante horizontale demeure constante, alors que la composante verticale varie en norme et en direction.



E. Frottements

- Lorsqu'un corps est en mouvement, il est toujours soumis à des frottements (résistance de l'air ou de l'eau, adhérence de la route, etc.). Ces derniers exercent sur le corps une force qui s'oppose à sa vitesse.
- Autrement dit : c'est la force qui agit pour s'opposer au mouvement d'un objet qui glisse sur un autre
- La force de frottements $\vec{f}_{frottements}$ doit être englobée dans la somme vectorielle $\Sigma\vec{F}$ de toutes les forces appliquées au solide, qui intervient dans la relation : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$





Les forces à prendre en compte lorsqu'un objet est posé sur un support :

- Le poids (vertical): P
- Les forces de contact
  - tangentielle : F_f
  - normale : N

Annexe 1 : Historique

Jusqu'au début du XVIIe siècle, les savants se référaient encore aux théories d'Aristote pour expliquer les lois du mouvement. Ils classaient les corps en deux catégories : les lourds et les légers.

- **Galilée** met en place les bases de**: La dynamique moderne.**

Le mouvement est une distance parcourue à partir d'un certain point et dans un temps donné

Il constata que la vitesse des solides en chute libre augmentait de façon régulière, et que cette accélération était la même quelle que soit la masse du solide, à condition de négliger la résistance de l'air.

- **Isaac Newton** développa les analyses de Galilée en donnant des définitions rigoureuses de la force et de la masse, notions qu'il relia à l'accélération.

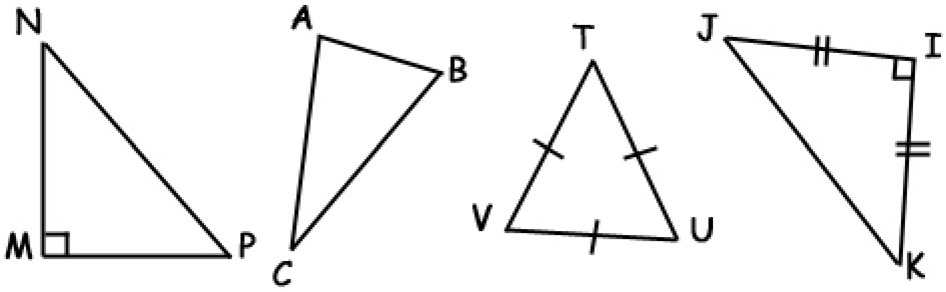
Il énonça trois principes qui régissent la mécanique classique d'aujourd'hui.

- **Albert Einstein** généralisa les lois de Newton pour les appliquer à des corps se déplaçant à des vitesses proches de celle de la lumière, et exposa ses révisions dans **sa théorie de la relativité.**

Partie D : exercices résolus

Exercice 1 : Utilisation du théorème de Pythagore :

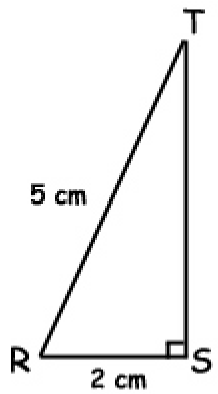
Dans les triangles suivants, repérer l'hypoténuse si possible.



Réponse :
Dans le triangle MNP rectangle en M, l'hypoténuse est [NP].
Le triangle ABC n'est pas rectangle, il n'y a pas d'hypoténuse.
Le triangle TUV n'est pas rectangle, il n'y a pas d'hypoténuse.
Dans le triangle JIK rectangle en I, l'hypoténuse est [JK].

Exercice 2 :

Soit un triangle RST rectangle en S tel que RS=2cm et RT= 5cm.
Donner la valeur exacte de ST puis la valeur arrondie au millimètre.
Réponse :
Dans le triangle RST rectangle en S.
D'après le théorème de Pythagore:
$RT^2 = RS^2 + ST^2$
$ST^2 = RT^2 - RS^2$
$ST^2 = 52 - 22$
$ST^2 = 25 - 4$
$ST^2 = 21$
$ST = \sqrt{21}$ (valeur exacte)
$ST \approx 4{,}58$ cm soit $ST \approx 46$ mm
ST mesure environ 46mm



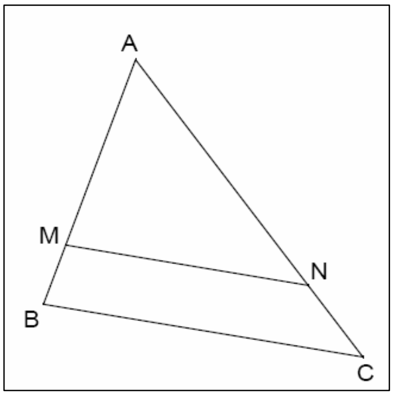
Exercice 3 :

Soit un triangle EFG tel que EF = 7cm, EG = 11cm et FG= 13 cm.
Le triangle EFG est-il rectangle ? Pourquoi ?
Réponse :
Le côté le plus long est [FG]
$FG^2 = 132 = 169$
$EF^2 + EG^2 = 72 + 112 = 49 + 121 = 170$
$FG^2 \neq 2 + EG^2$
Le triangle EFG n'est pas rectangle

Exercice 4 :

Utilisation du théorème de Thalès :

On considère la figure ci-contre :



ABC est un triangle, M est un point de [AB], N un point de [AC] et [MN] et [BC] sont parallèles. On a les mesures suivantes :
AB = 8cm ;   AM = 6cm ;   AC = 12cm ; MN = 4cm
Calculer BC et AN

Réponse :
ABC est un triangle, M est un point de [AB], N un point de [AC] peut donc appliquer le théorème de Thalès :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ Soit $\frac{6}{8} = \frac{AN}{12} = \frac{4}{BC}$

- Pour calculer AN, on utilise l'égalité : $\frac{6}{8} = \frac{AN}{12}$

8xAN = 6x12 ou encore : 8xAN = 72 ; d'où AN = 72/8 = 9
AN mesure 9cm

- Pour calculer BC, on utilise l'égalité : $\frac{6}{8} = \frac{4}{BC}$

6xBC = 8x4 ou encore : 6xBC = 32 ; d'où BC = 32/6 ≈ 5,3
BC mesure environ 5,3cm

Exercice 5 :

Etudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2 - 4x$, et calculer, en unités d'aires :

1. L'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations : x= -1 et x=0
2. L'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations : x= 0 et x=4

Réponse :
La fonction f est un trinôme du second degré, de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ où a=1, b=-4 et c=0.

Puisque a>0, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right] =]-\infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$.
Elle atteint donc son minimum pour x=2, lequel minimum vaut $f(2)=2^2-4\times2=-4$
De plus puisque $f(x)=x^2-4x=x(4-x)$, on déduit le tableau de signes de f :

x	0 4
$f(x)=x^2-4x$	+ 0 − 0 +

1) Puisque pour tout $x \in [-1;0]$, $f(x) \geq 0$, l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations x=-1 et x=0 sera donnée, en unités d'aires, par $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

A l'aide d'une primitive de f sur [0 ;1], définie par $F(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2$, on calcule :

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = F(0)-F(-1)$$

$$=\left(\frac{0^3}{3}-2\times 0^2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-2\times(-1)^2\right)=-\left(\frac{-1}{3}-2\right)=\frac{7}{3}$$

L'aire du domaine vaut donc $\frac{7}{3}$ unités d'aire

2) Puisque pour tout $x \in [0;4]$, $f(x) \leq 0$, l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations x=0 et x=4 sera donnée, en unités d'aires, par $-\left(\int_{0}^{4} f(x)dx\right)$.

A l'aide de la même primitive définie par $F(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2$, on calcule :

$$\int_{0}^{4} f(x)dx = F(4)-F(0)$$

$$=\frac{4^3}{3}-2\times 4^2-\left(\frac{0^3}{3}-2\times 0^2\right)=\frac{64}{3}-32=-\frac{32}{3}$$

L'aire du domaine vaut donc $\frac{32}{3}$ unités d'aire

Exercice 6 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+2x^2+2x+4$

Etudier les variations de $f(x)$

Démontrez que $f(x)$ est positive sur [-2 ;0]

Calculez l'aire de la partie D du plan limité par (C), les axes de coordonnées et de la droite d'équation x = -2

Réponse :

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+4x+2$

Le calcul du discriminant de $f'(x)$ nous permet d'en déduire le signe de $f'(x)$, donc le sens de variation de f :

$\Delta=4^2$-4x3x2=16-24=-8<0, donc $f'(x)$ garde un signe constant.

Plus précisément pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) On calcule $f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2+2\times(-2)+4=0$ et $f(0)=4$.

Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout réel $x \in [-2;0]$, on aura $f(-2) \leq f(x) \leq f(0)$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$

3) Puisque pour tout réel $x \in [-2;0]$, $f(x) \geq 0$, l'aire en cm^2 de la partie D du plan limitée par (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation x=-2 sera égale à $\int_{-2}^{0} f(x)dx = F(0) - F(-2)$ où F est une primitive de f sur [0 ;2].

Une primitive de f sur [0 ; 2] est donnée par $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x$, donc

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = F(0) - F(-2) = \frac{0^4}{4} + \frac{2\times 0^3}{3} + 0^2 + 4\times 0^2 - \left(\frac{(-2)^4}{4} + \frac{2\times(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 4\times(-2)\right)$$

$= -\left(\frac{-16}{3}\right) = \frac{16}{3}$ Unités d'aires

Exercice 1 :

Soit un espace vectoriel muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit les vecteurs $\vec{A}(-3,4,1)$, $\vec{B}(-2,6,-3)$, $\vec{C}(5,1,-2)$, $\vec{D}(-1,4,-5)$

a)- Calculez les produits scalaires: $\vec{A}.\vec{B}$, $\vec{A}.\vec{C}$, $\vec{A}.\vec{D}$, $\vec{B}.\vec{C}$, $\vec{B}.\vec{D}$, $\vec{C}.\vec{D}$

b)- Calculez les produits vectoriels: $\vec{A}\wedge\vec{B}$, $\vec{A}\wedge\vec{C}$, $\vec{A}\wedge\vec{D}$, $\vec{B}\wedge\vec{C}$, $\vec{B}\wedge\vec{D}$, $\vec{C}\wedge\vec{D}$

Réponse :

$\vec{A}.\vec{B}$= (-3x-2) + (4x6) + (1x-3) = 27 ; de même pour les autres

$\vec{A}\wedge\vec{B}$= [(4x-3) – (1x6)] $\vec{i}$ - [(-3x-3)-(1x-2)] $\vec{j}$ + [(-3x6)-(4x-2)] $\vec{k}$

= -18 $\vec{i}$ +7 $\vec{j}$ -2 $\vec{k}$; de même pour les autres

Exercice 2 :

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que:

$\|\vec{u}\| = 2$ et $\alpha = (\vec{i},\vec{u}) = \frac{\pi}{4}$

$\|\vec{v}\| = 4$ et $\beta = (\vec{i},\vec{v}) = \frac{5.\pi}{4}$

$\|\vec{w}\| = 3$ et $\gamma = (\vec{i},\vec{w}) = \frac{-3.\pi}{4}$

a)- Représentez les vecteurs dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$

b)- Calculez les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

c)- Calculez directement: $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$

d)- Calculez directement : $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{w}\wedge\vec{u}$, $\vec{v}\wedge\vec{w}$

Réponse :

Les vecteurs se disposent simplement dans le plan à l'aide de leur longueur qui peut être figurée par un cercle du rayon correspondant et de l'angle mesuré à partir d'un vecteur de base (Figure 1).

Les coordonnées sont obtenues pour chaque vecteur en écrivant les relations de trigonométrie dans le triangle rectangle ayant le vecteur considéré comme hypoténuse et de côtés portés par les axes de la base. On obtient pour le vecteur $\overrightarrow{U}$ (Figure 2) :

On a donc $\overrightarrow{U} = X_u\overrightarrow{i} + Y_u\overrightarrow{j}$ avec $X_u = \left\|\overrightarrow{U}\right\|\cos\frac{\pi}{4}$ et $Y_u = \left\|\overrightarrow{U}\right\|\sin\frac{\pi}{4}$ soit

$X_u = 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et $Y_u = 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

On obtient de la même manière :

$X_v = -2\sqrt{2}$, $Y_v = -2\sqrt{2}$ et $X_w = -3\frac{\sqrt{2}}{2}$, $Y_w = -3\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- c) On calcule les produits scalaires à l'aide de la formule $\vec{U} \cdot \vec{V} = \left\|\vec{U}\right\| \left\|\vec{V}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}\right)$

avec $\left(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}\right) = \pi$, $\left(\widehat{\vec{U}, \vec{W}}\right) = \pi$ et $\left(\widehat{\vec{V}, \vec{W}}\right) = 0$, $\cos\pi = -1$ et $\cos 0 = 1$

$\vec{U} \cdot \vec{V} = -8$, $\vec{U} \cdot \vec{W} = -6$ et $\vec{V} \cdot \vec{W} = 12$

d)On calcule les produits vectoriels à l'aide de la formule $\vec{U} \wedge \vec{V} = \left\|\vec{U}\right\| \left\|\vec{V}\right\| \sin\left(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}\right) \vec{k}$

or les vecteurs sont tous collinéaires $\sin 0 = \sin\pi = 0$, tous les produits vectoriels sont nuls dans ce cas.

$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$, $\vec{U} \wedge \vec{W} = \vec{0}$ et $\vec{V} \wedge \vec{W} = \vec{0}$

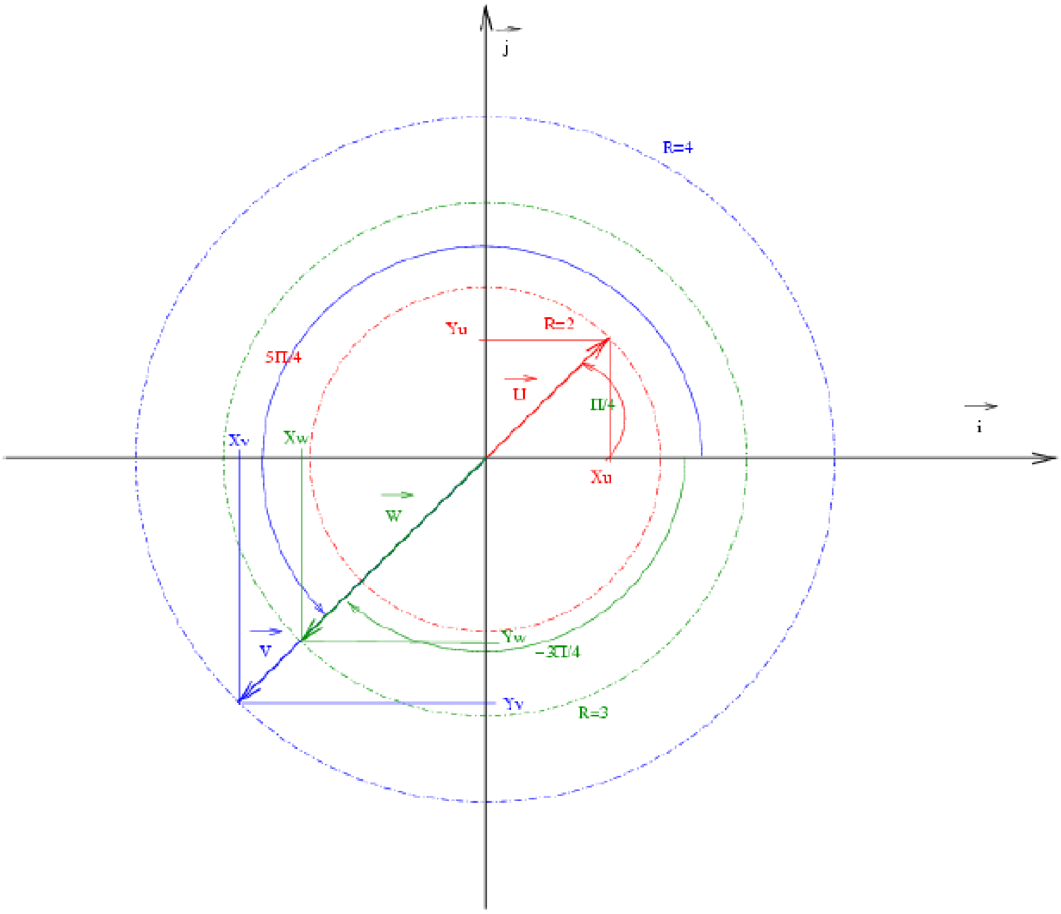


FIG. 1 – Tracé des vecteurs dans le plan

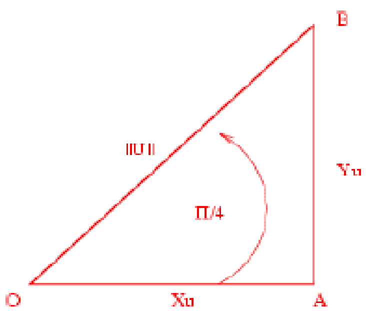


FIG. 2 – Coordonnées du vecteur $\vec{U}$

Trouver tous les modules sur | www.bac-ofppt.blogspot.com

Exercice 3 :

Soit un torseur T de résultante: $\vec{R}(3,-1,4)$ et de moment au point 0: $\vec{M}(0)(2,-3,0)$

1. Calculer le torseur T au point A (2,-1,4)
2. Calculer le torseur T au point B (6,-3,-2)

Réponse :

1. Au point A, le torseur $[\tau]_A$ est caractérisé par les deux vecteurs :

- Sa résultante $\vec{R}(3,-1,4)$
- Son moment résultant au point A défini par la formule de transport :

$$\vec{M}(A) = \vec{M}(0) + \vec{R} \wedge \vec{0A}$$

= (2,-3,0) + (3,-1,4) ^ (2,-1,4)
= (2,-3,0) + (0,-4,-1)
= (2,-7,-1)

2. Au point B, le torseur $[\tau]_B$ est caractérisé par les deux vecteurs :

- Sa résultante $\vec{R}(3,-1,4)$
- Son moment résultant au point B défini par la formule de transport :

$$\vec{M}(B) = \vec{M}(0) + \vec{R} \wedge \vec{0B}$$

= (2,-3,0) + (3,-1,4) ^ (6,-3,-2)
= (2,-3,0) + (14, 30,-3)
= (16, 27,-3)

Exercice 4 :

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que:

$\|\vec{u}\| = 3$ et $\alpha = (\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\pi}{6}$

$\|\vec{v}\| = 2$ et $\beta = (\vec{i}, \vec{v}) = \frac{-4.\pi}{6}$

$\|\vec{w}\| = 4$ et $\gamma = (\vec{i}, \vec{w}) = \frac{5.\pi}{6}$

a)- Représentez les vecteurs dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b)- Calculez les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

c)- Calculez directement : $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{w} \wedge \vec{u}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$

QCM : Les lois de Newton

1. Dans quel référentiel peut-on appliquer les lois de Newton?

   (Galiléen)

2. Le centre d'inertie d'un solide persévère en son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme si les forces qui s'exercent sur le solide se ......

   (Compensent)

3. Si les forces appliquées se compensent, le centre d'inertie peut-être animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

   A. ? Faux

   B. ? Vrai

4. Une remorque est tractée par une voiture. A chaque virage la remorque a tendance à partir vers l'extérieur de la route. Pourquoi?

   A. ? La voiture roule trop vite.

   B. ? La remorque est mal fixée à la voiture.

   C. ? La remorque poursuit une trajectoire rectiligne uniforme à l'entrée du virage.

   D. ? Les pneus sont lisses.

5. Une pierre lancée sur une plaque de verglas plane horizontale finit par s'arrêter parce que:

   A. ? la somme des forces est nulle.

   B. ? son poids le ralentit.

   C. ? il y a toujours de légers frottements.

6. Lorsque les forces extérieures se compensent, le centre d'inertie d'un solide est toujours au repos.

   A. ? Vrai

   B. ? <u>Faux</u>

7. Quand les forces appliquées au solide ne se compensent pas, le vecteur vitesse du centre d'inertie est modifié.

   A. ? <u>Vrai</u>

   B. ? Faux

8. Si on connaît la variation du vecteur vitesse du centre d'inertie entre deux instants très proches, alors on peut déterminer la direction et le sens de la résultante des forces appliquées.

   A. ? <u>Vrai</u>

   B. ? Faux

9. Il faut impérativement exercer une force pour entretenir un mouvement.

   A. ? <u>Faux</u>

   B. ? Vrai

10. La force exercée par le pied d'un footballeur sur le ballon .... que la force exercée par le ballon sur le pied du footballeur au moment du tir.

    A. ? est plus petite

    B. ? est plus grande

    C. ? <u>a la même valeur</u>

Avant d'entamer tout exercice de statique en général, il faut d'abord :

- *Choisir un système, choisir les repères d'espace et de temps*
- *Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées à ce système*
- *Enoncer les trois lois de Newton.*

<u>Exercice 1 :</u>

I) – Un skieur descend à vitesse constante une pente d'une inclinaison de 30° par rapport à l'horizontale.

1 – Faire un schéma et préciser le système mécanique ainsi que le repère d'espace choisi.

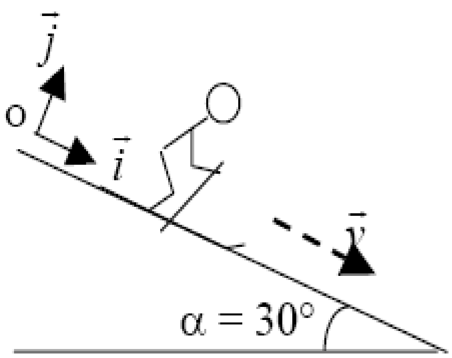
2 – Lister l'ensemble des forces extérieures que subit le système mécanique choisi. Représenter ces forces sur le dessin dans le cas de figure où la descente s'effectue avec frottement des skis sur la neige.

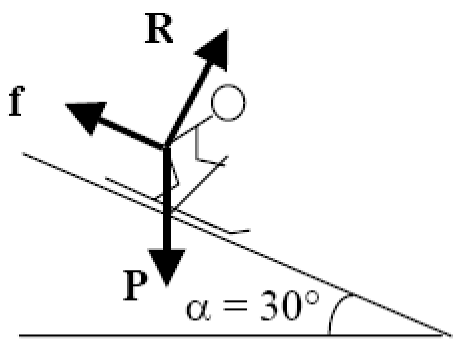
3 – Après avoir énuméré les 3 lois de Newton, déterminer laquelle de ces lois sont concernée par le problème ci-dessus et expliciter.

<u>Réponse :</u>

I) – 1) Le système mécanique à considérer est le skieur et l'ensemble de son équipement

- le poids **P** du système considéré
- la réaction normale **R**
- la force de frottement **f,** qui a même direction que le vecteur vitesse mais en sens inverse.





3)- *Première loi de Newton (ou principe d'inertie)*: dans un référentiel Galiléen, lorsqu'un solide est isolé ou pseudo-isolé, son centre d'inertie G est :

- soit au repos, G est initialement immobile
- soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme

Alors : $\sum \vec{F}_{ext}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{C}te$

<u>C'est cette première loi de Newton qui est concernée par le problème posé</u>

Deuxième loi de Newton (ou relation fondamentale de la dynamique): dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide par l'accélération $\vec{a}_G$ de son centre d'inertie G :

$$\sum \vec{F}_{ext}=m.\vec{a}_G$$

Troisième loi de Newton (ou loi des actions réciproques): lorsque deux solides S1 et S2 sont en interaction, les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre sont directement opposées :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

<u>Exercice 2 :</u>

Un skieur de poids P=900N est en équilibre sur un plan incliné d'angle α=30° par rapport à l'horizontale. La force de frottement exercée par le plan incliné est représentée fait un angle β=20° avec ce plan incliné.

1. Déterminer les intensités (normes) des forces F et R (réaction normale du plan incliné) en utilisant la méthode graphique : par construction vectorielle
2. Déterminer les intensités des forces F et R en utilisant les projections des forces dans le repère choisi de façon adéquate.

<u>Réponse :</u>

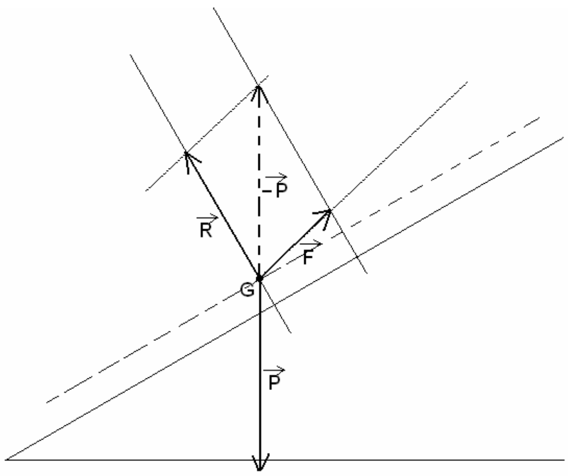
1) Le skieur est soumis aux forces suivantes :

$\vec{P}$	vertical vers le bas appliqué au centre d'inertie P = m.g	$\vec{R}$	perpendiculaire au plan incliné vers le haut appliqué au centre de la surface de contact des skis avec le sol	$\vec{F}$	inclinée d'un angle de 20° par rapport au plan incliné vers le haut appliquée au point de contact entre la perche et le skieur

2) Méthode graphique :

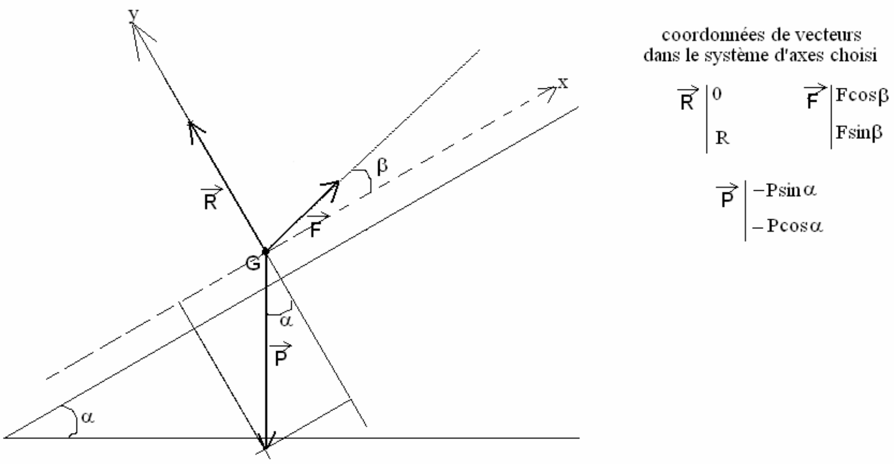
Pour le poids, on a P = m.g = 900 N. On peut prendre l'échelle 1 cm pour 100 N.

Le skieur est en équilibre donc d'après la première loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$. Ce qui donne ici la relation : $\vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$ donc on en déduit que $\vec{F} + \vec{R} = -\vec{P}$. On construit donc, à l'échelle les vecteurs $\vec{P}$ et $-\vec{P}$. En faisant partir les autres vecteurs du centre d'inertie du skieur (représenté par le point G), on trace leurs directions en respectant les angles : puis on compète la construction en respectant les sommes vectorielles. Le skieur est représenté uniquement par son centre d'inertie sur le schéma ci – dessous :



D'après l'échelle utilisée, on en déduit que F = 480 N et R = 620 N

3) Méthode des projections :



Le skieur est e, équilibre donc d'après la première loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$. Ce qui donne ici la relation : $\vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$. On projette cette relation sur les deux axes Gx et Gy.

Sur Gx : $0 + F\cos\beta - P\sin\alpha = 0$ donc $F = \dfrac{P\sin\alpha}{\cos\beta} = 479N$

Sur Gy : $R + F\sin\beta - P\cos\alpha = 0$ donc

$$R = P\cos\alpha - F\sin\beta = P\cos\alpha - P\sin\alpha\tan\beta = 615N$$

Exercice 3 :

Etude d'une chute verticale :

1) Chute libre :

Par définition, un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids.
On peut étudier la chute dans le vide, elle est parfaitement libre..
Dans l'air, un objet en chute, est soumis à la poussée d'Archimède et la force de frottements fluide, exercées par l'air, mais ces forces sont faibles et négligeables par rapport au poids dans certaines conditions : faible hauteur (quelques mètres) et faible vitesse.

2) Chute verticale libre, sans vitesse initiale :

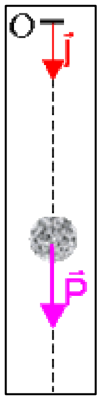
Une bille métallique de masse m est lâchée à 6,0 m du sol, sans vitesse initiale, d'un point pris comme origine d'un axe vertical

(O, $\vec{j}$) orienté vers le bas. (g = 9,80 $N.kg^{-1}$)

a) S'agit-il d'une chute libre ? Justifier.
b) Faire un schéma en représentant axe, origine et force(s).
c) Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la vitesse v.
d) Déterminer les équations horaires du mouvement (a, v et y en fonction du temps)
e) Déterminer l'instant t_1 et la vitesse v_1 où la bille frappe le sol

Réponse :

a) La poussée d'Archimède P_A dans l'air est négligeable par rapport au poids P de la bille. La vitesse de la bille et la hauteur de chute sont faibles, la force de frottement fluide exercée par l'air sur la bille est donc négligeable par rapport au poids. Le poids est donc la seule force exercée sur la bille. La chute est donc libre.



b) On étudie la bille (système) dans le référentiel terrestre galiléen, auquel on associe le repère $(O, \vec{j})$.

$\vec{j}$ Vertical vers le bas.

Force : poids $\vec{P}$ vertical vers le bas, $P = m.\,g$

c) Deuxième loi de Newton : Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse m du solide par l'accélération de son centre d'inertie.

$\vec{P} = m\,.\,\vec{a}$; $m\,.\,\vec{g} = m\,.\,\vec{a}$ $\Rightarrow$ $\vec{g} = \vec{a}$

Dans ce cas, le mouvement est rectiligne vertical,

$\vec{a} = \vec{a}_y$, $\vec{V} = \vec{V}_y$ et $\vec{OM} = y\,.\,\vec{j}$.

On projette sur l'axe : $a = a_y = g$; $a = dv/dt$ $\Rightarrow$ $dv/dt = g$ (équation différentielle)

d) Pour déterminer la solution de l'équation différentielle, on cherche la fonction v qui admet g comme dérivée :
$v = g\,.\,t + k_1$ (k_1 étant une constante)
Pour déterminer la constante k_1 , on utilise les conditions initiales :
A $t = 0s$, $v = k_1 = v_0 = 0\ m.s^{-1}$ $\Rightarrow$ $v = g\,.\,t$, soit $dy/dt = g\,.\,t$
La fonction y qui admet g. t comme dérivée est : $y = ½\, g.\, t^2 + k_2$ (k_2 étant une constante)
A $t = 0s$, $y = k_2 = y_0 = 0\ m$ $\Rightarrow$ $y = ½\, g\,.\,t^2$
Equations horaires du mouvement : $y = ½\, g.\, t^2$ $v = g.\, t$ et $a = g$

e) Soit A le point du sol à la verticale de O, $y_A = 6{,}0$ m. $y_A = ½\, g\,.\,t_1^2$; $t_1^2 = 2\, y_A / g$

$t_1 = \sqrt{(2\, y_A / g)} = \sqrt{(2 \times 6{,}0 / 9{,}80)} = 1{,}1$ s (2 chiffres significatifs en accord avec les données)
Calcul de v_1 : $v_1 = g\,.\,t_1$, $v_1 = 9{,}80 \times 1{,}1 = 11\ m.s^{-1}$
Dans d'autres exercices, v_0 et y_0 peuvent être non nulles, les constantes k_1 et k_2 interviennent alors.

Liste des références bibliographiques

Ouvrage	Auteur	Edition
Internet	**http://web.univ-pau.fr/**	
Internet	http://physique.educations.net/	
Internet	http://www.intellego.fr/	
Internet	http://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_du_mouvement_de_Newton	
Internet	http://homeomath.imingo.net/vecdef.htm	
Internet	http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=1851	
Internet	http://fr.wikipedia.org/wiki/Torseur_cin%C3%A9matique	
Internet	http://www.ilemaths.net/maths-capes-lecon-37-relation-triangle-rectangle.php	

NB : Outre les ouvrages, la liste peut comporter toutes autres ressources jugées utiles (Site, Internet, Catalogues constructeurs, Cassettes, CD…)