SOMMAIRE

MODULE 6 : DETERMINATION DES DIMENSIONS DES SURFACES ET DES VOLUMES DES STRUCTURES

Durée : 60 h

OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU DE CONMORTEMENT

COMPORTEMENT ATTENDU

Pour démontrer sa compétence, le stagiaire doit **déterminer les dimensions, les surfaces et les volumes des structures** selon les conditions, les critères et les précisions qui suivent.

CONDITIONS D'EVALUATION

- Individuellement à partir des questions de cours
- A partir des exercices notés

CRITERES GENERAUX DE PERFORMANCE

- Connaissance exacte des formules concernant les relations métriques et trigonométriques des triangles
- Détermination précise du côté, de l'apothème et de la surface des polygones
- Calcul exacte des volumes et des surfaces des figure géométriques

PRECISIONS SUR LE COMPORTEMENT ATTENDU	CRITERES PARTICULIERS DE PERFORMANCE
A- Connaître convenablement les relations dans le triangle	• Définition précise des droites remarquables • Définition précise des différents types de triangle • Détermination exacte des relations trigonométriques dans un triangle rectangle
B- Etudier les cercles	• Détermination exacte de l'angle inscrit et angle circonscrit • Traçage correcte du cercle inscrit et du cercle circonscrit
C- Appliquer les formules concernant les polygones réguliers	• Calcul exacte du côté de chaque polygone régulier • Calcul exact de l'apothème de chaque polygone régulier • Détermination précise de la surface d'un polygone régulier
D- Calculer les surfaces et les volumes des pièces géométriques	• Détermination précise des formules de calcul des surfaces et des volumes des figures géométriques
E- Tracer correctement de balancement des escaliers	• Définition exacte et terminologie correcte des escaliers • Traçage exact de balancement.

OBJECTIFS OPERATIONNELS DE SECOND NIVEAU

LE STAGIAIRE DOIT MAITRISER LES SAVOIRS, SAVOIR-FAIRE, SAVOIR-PERCEVOIR OU SAVOIR-ETRE JUGES PREALABLES AUX APPRENTISSAGES DIRECTEMENT REQUIS POUR L'ATTEINTE DE L'OBJECTIF DE PREMIER NIVEAU,TELS QUE :

Avant d'apprendre à *connaître convenablement les relations dans le triangle* (A) :

1. Savoir correctement déterminer la hauteur, la médiatrice, la bissectrice et la médiane
2. Connaître correctement les différentes sortes de triangle tels que triangle équilatéral, triangle isocèle et triangle rectangle
3. Etablir correctement les relations métriques et trigonométriques dans le rectangle.

Avant d'apprendre à *étudier les cercles* (B) :

4. Savoir tracer un cercle
5. Calculer l'angle inscrit et l'angle circonscrit
6. Savoir un cercle inscrit

Avant d'apprendre à *appliquer les formules concernant les polygones réguliers* (C) :

7. Définir correctement un polygone régulier à un côtés
8. Tracer correctement un polygone régulier à un côtés
9. Etudier et calculer correctement le côté et l'apothème d'un polygone particulier tel que :

- Carré
- Triangle
- Pentagone
- Hexagone
- Octogone

Avant d'apprendre à *calculer les surfaces et les volumes des pièces géométriques* (D) :

10. Déterminer parfaitement les formules des surfaces et des volumes des figures
11. particulier tel que: cube , parallélépipède ,cylindre ,pyramide ,tronc de pyramide ,cône et tronc de cône

Avant d'apprendre à *tracer les balancements des escaliers* (E) :

12. Définir la terminologie des escaliers
13. Tracer le balancement

- Méthode de l'arc de cercle
- Méthode des alignements
- Méthode des angles

(Les balancement seront tracé avec un compas)

PRESENTATION DU MODULE

- *Ce module de compétence générale consiste à connaître les formules de calcul des volumes et des surfaces des structures. Il sera étalé sur une durée de 6 semaines du 1er semestre du programme de formation à raison de 10h par semaine .*

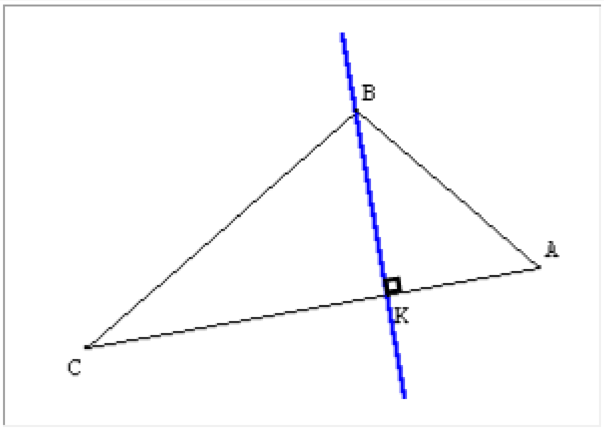
- *A l'issu de ce module, les stagiaires auront acquis des connaissances et compétences techniques de base SUR les formules de calcul des surfaces et des volumes ainsi que le traçage des formes géométriques.*
- *La durée de ce module est de 60h.*

Module N°6 : Détermination des dimensions des surfaces et des volumes des structures

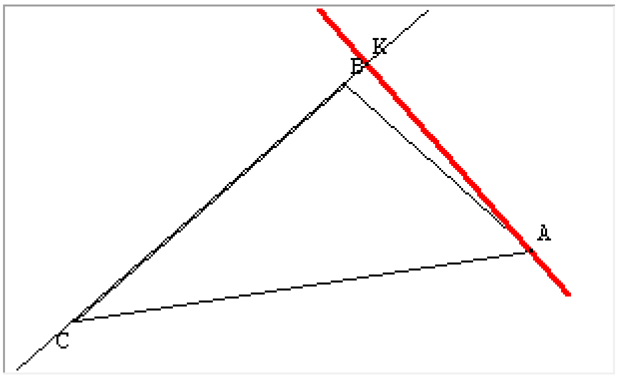
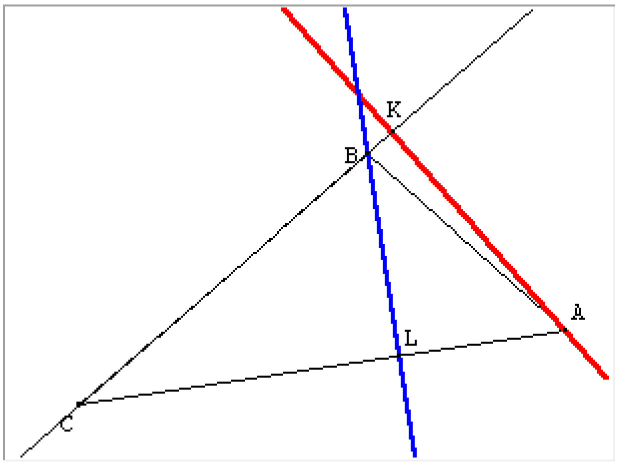
A/ Connaître les relations dans le triangle

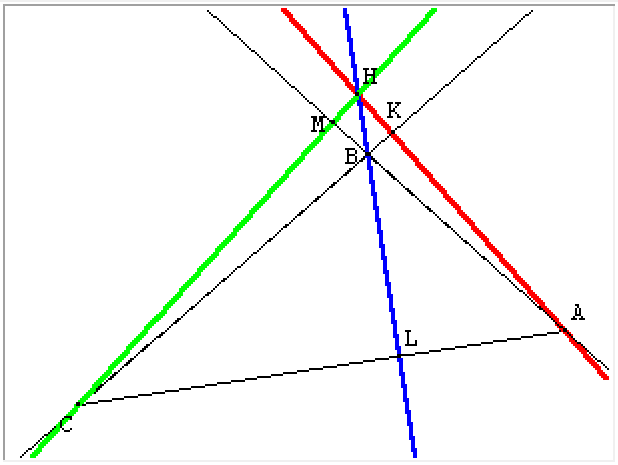
1- la hauteur

Définition **:** ***On appelle hauteur dans un triangle ABC la droite passant par un sommet de ce triangle et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.***

	Pour tracer la hauteur issue du sommet B, prendre règle et équerre et effectuer le schéma ci-contre. Le segment [BK] est appelé hauteur issue de B. H est appelé pied de la hauteur (BK)

Propriété de l'orthocentre : ***les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle.***

	Tracer la hauteur issue du sommet A. Pour la hauteur [AK], il a fallu prolonger le segment [BC].
	Tracer la hauteur issue de B. On a la hauteur [BL]

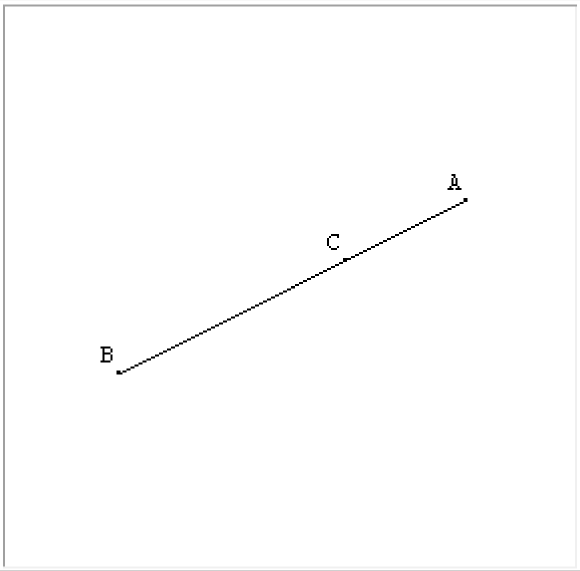


Tracer la hauteur issue de C. Également la hauteur issue de C est extérieure au triangle.

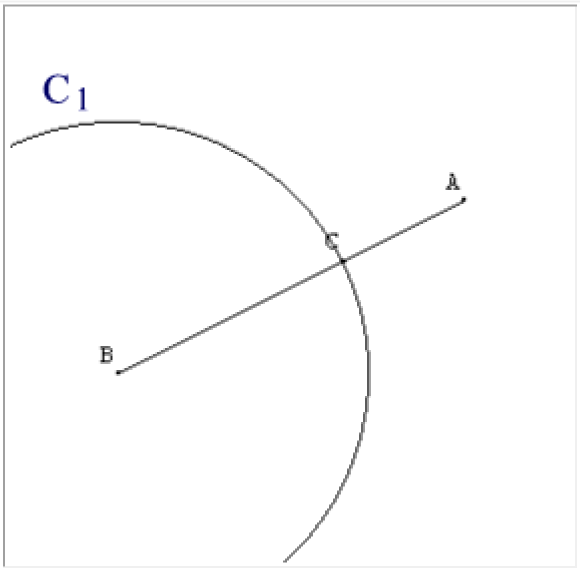
On définit H comme étant l'orthocentre du triangle ABC.

2- la médiatrice

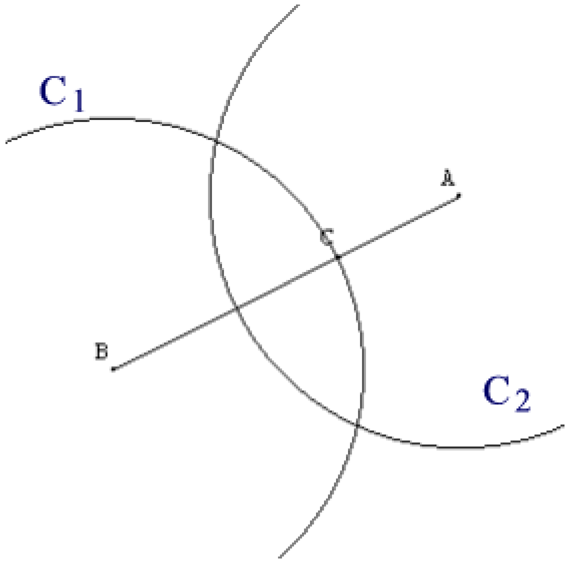
Définition : On appelle médiatrice d'un segment [AB] la droite passant par le milieu I de [AB] et perpendiculaire à [AB].



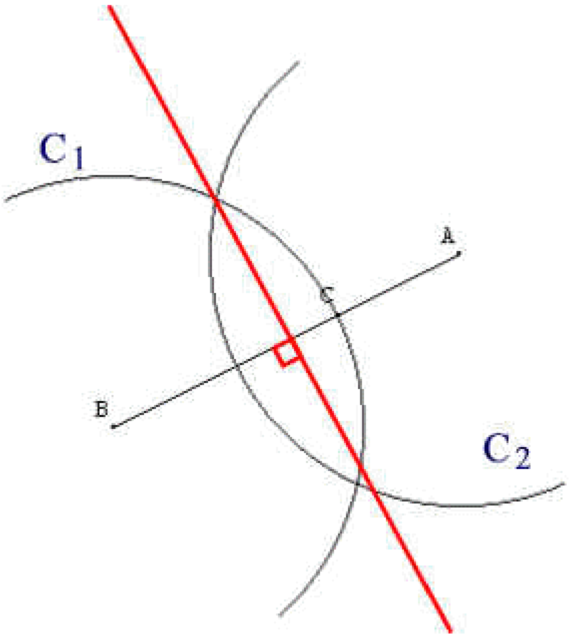
Pour tracer la médiatrice d'un segment [AB], choisir un point de ce segment C, autre que le milieu.



En mesurant BC et CA, on prend la longueur la plus grande (ici BC), pour tracer un 1er cercle ayant pour centre l'une des deux extrémités, on obtient ainsi C1



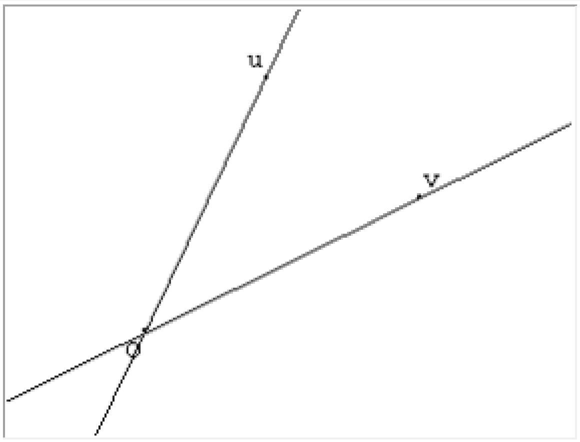
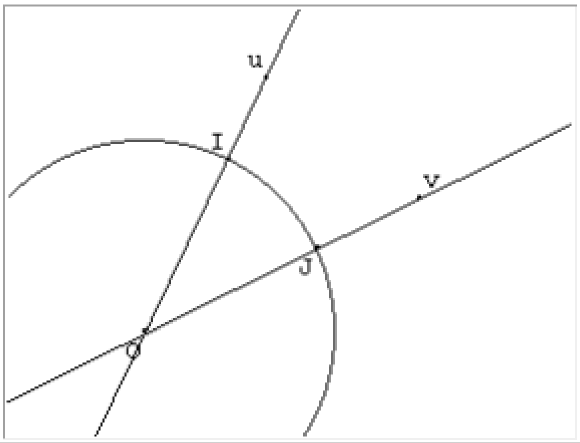
Puis on trace un deuxième cercle à l'autre extrémité en gardant bien le même rayon. On obtient la figure suivante

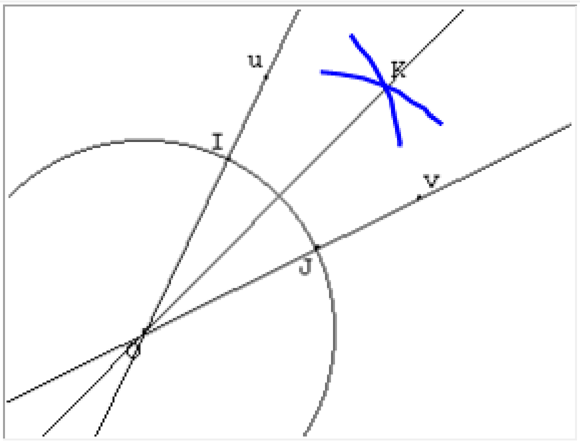


On prend les deux points d'intersection entre les deux cercles et on trace ainsi la médiatrice.

3- la bissectrice

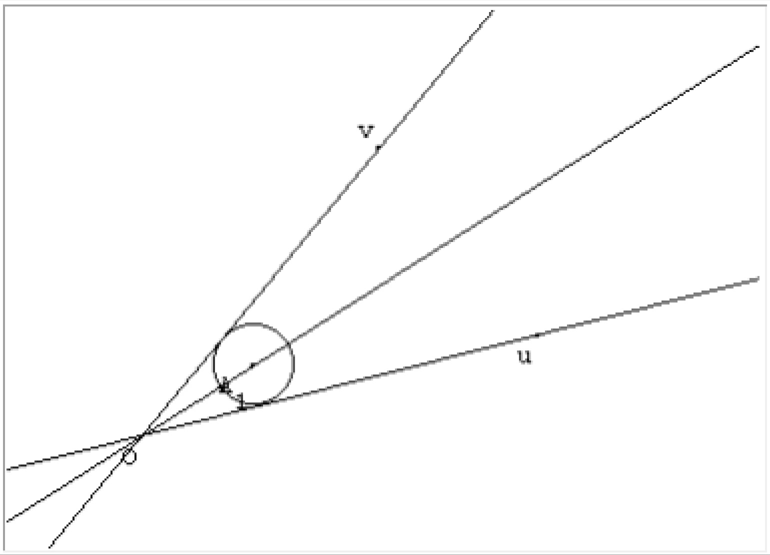
Définition : On appelle bissectrice d'un angle, la droite qui partage un angle en deux parties égales.

	Construction à la règle et au compas: Soient deux droites (Ou) et (Ov).
	On construit un cercle de centre O qui coupe les droites (Ou) et (Ov) en I et J.



On construit alors les deux arcs de cercle de centre I et J, de même rayon. On appelle K leur point d'intersection.

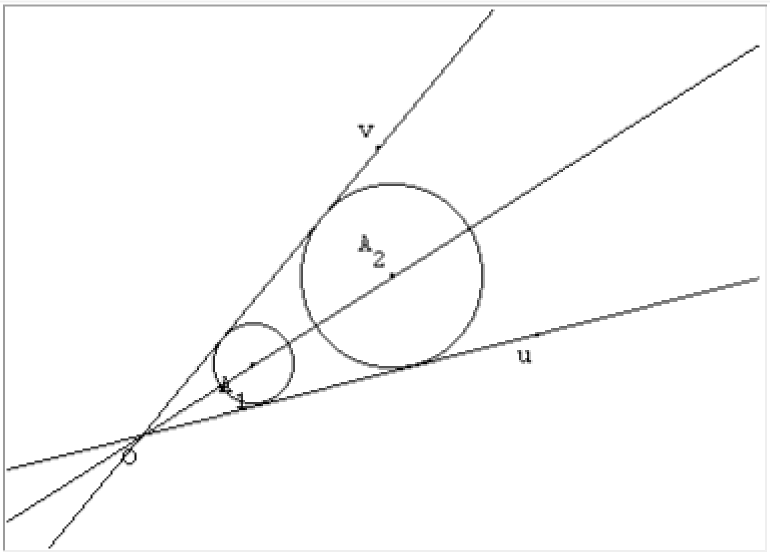
(OK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{uOv}$

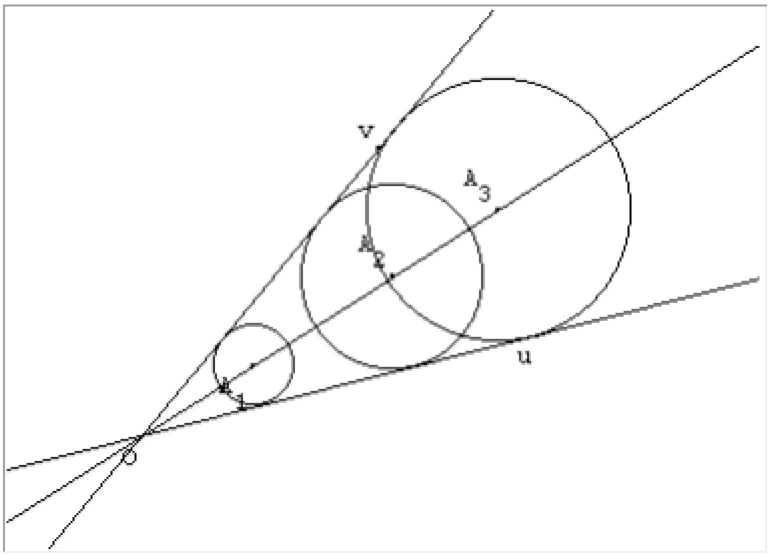


La bissectrice de deux droites est l'ensemble des centres des cercles tangents à chacune de ces deux droites.

La bissectrice de deux droites est l'ensemble des points situés à égale distance de chacune des droites.

- On a tracé sur ces trois figures trois cercles tangents aux deux droites (Ou) et (Ov);
- Comme on le voit les centres de ces trois cercles appartiennent à la

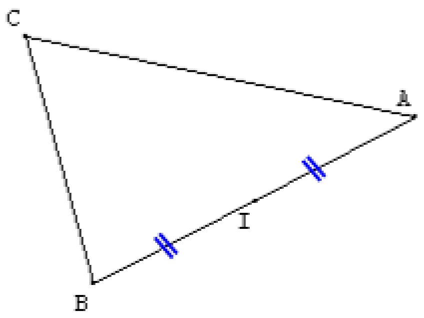
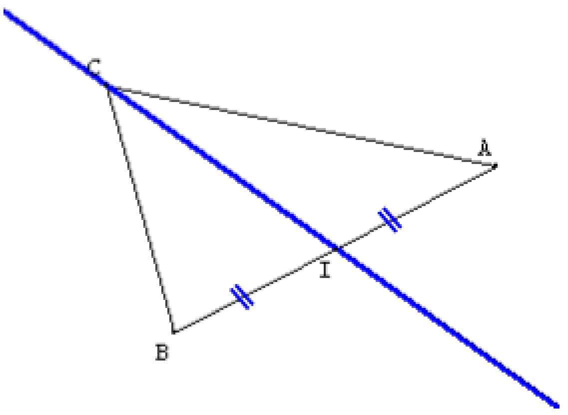




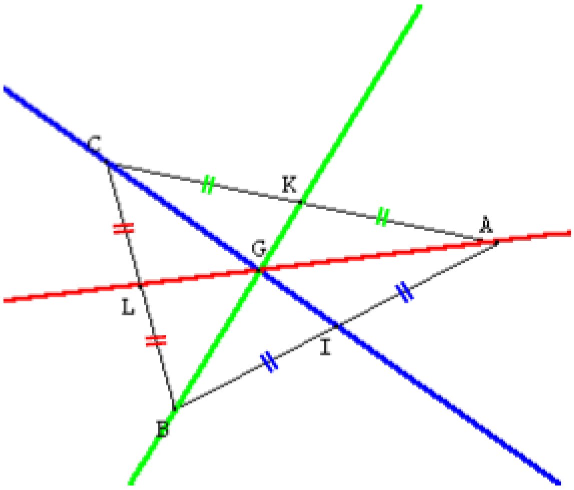
bissectrice de l'angle $\widehat{uOv}$

4- la médiane

Définition : ***Une médiane d'un triangle est la droite issue d'un sommet coupant le côté opposé en son milieu. I milieu du segment [AB] La droite (AI) est une médiane du triangle ABC.***

	Pour commencer choisir un côté et mesurer sa longueur pour en déterminer son milieu.
	Relier le milieu du segment [AB] au sommet du côté opposé, obtient ainsi la médiane issue du sommet C. Si nous appelons I le milieu du segment [BA] alors (CI) est la médiane issue de C. Le segment [CI] est également appelé médiane ainsi que la longueur CI. I est alors appelé le pied de la médiane (CI).

Propriété : ***les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle.***

	Ici nous avons tracé les trois médianes du triangle ABC. Elles sont concourantes en un point G qui est le centre de gravité.
Le centre de gravité d'un triangle est situé au 2/3 de chaque médiane en partant du sommet.	$AG = \frac{2}{3} AL$ $BG = \frac{2}{3} BK$ $CG = \frac{2}{3} CI$

5-Les différentes sortes de triangles :

Les triangles isocèles et équilatéraux sont des triangles particuliers qui présentent respectivement deux et trois côtés égaux. Quelles sont les propriétés de ces figures et comment peut-on les tracer ?

1. Les triangles équilatéraux

1.1. Définition

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés ont la même longueur.

Le triangle 2 de la figure ci-dessous est donc un triangle équilatéral.

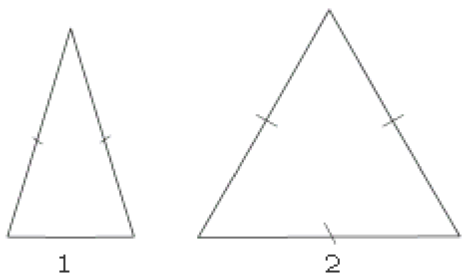


Figure 1

1.2. Propriétés

Tout triangle équilatéral a **trois axes de symétrie** ; réciproquement, si un triangle a trois axes de symétrie, alors ce triangle est équilatéral.

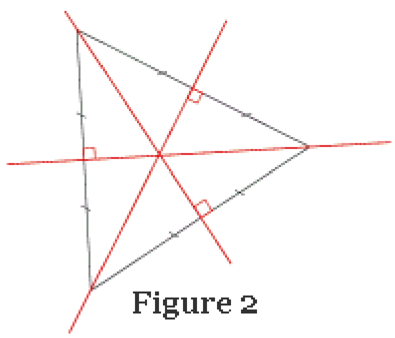


Figure 2

Dans un triangle équilatéral, **chaque angle mesure 60** ; réciproquement, si dans un triangle chaque angle mesure 60°, alors ce triangle est équilatéral.

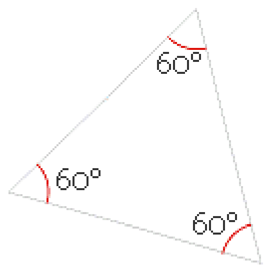


Figure 3

1.3. Construction

On veut construire un triangle équilatéral avec la règle et le compas. La série de figures ci-dessous montre les étapes de la construction ; l'écartement du compas représente la longueur du côté.

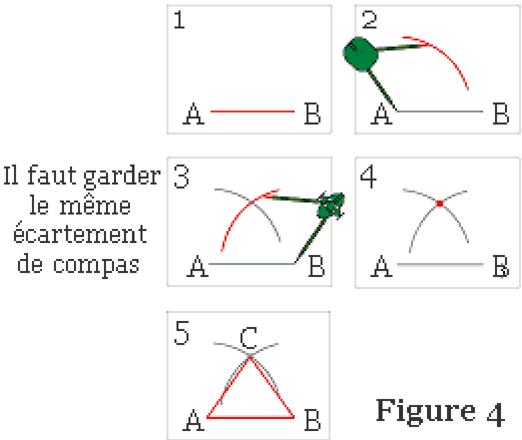


Figure 4

2. Les triangles isocèles

2.1 Définition

Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Remarque : si un triangle est équilatéral, alors ce triangle est isocèle (mais il existe des triangles isocèles qui ne sont pas équilatéraux).

2.2. Propriétés

Tout triangle isocèle a **au moins un axe de symétrie** ; réciproquement, si un triangle a un axe de symétrie, alors ce triangle est isocèle.

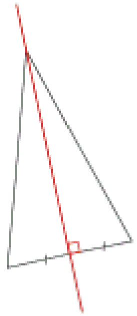


Figure 5

Dans un triangle isocèle, **deux angles au moins ont la même ouverture** ; réciproquement, si dans un triangle deux angles au moins ont la même ouverture, alors ce triangle est isocèle.

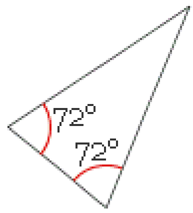


Figure 6

2.3. Construction

On veut ici construire un triangle isocèle non équilatéral. La différence avec la construction précédente est que les écartements de compas des étapes 2 et 3 sont égaux, mais ne sont pas égaux à AB.

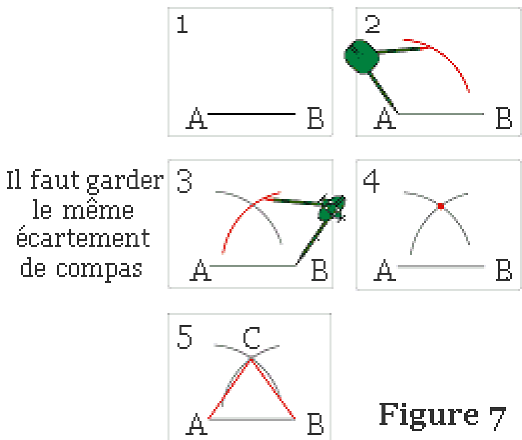
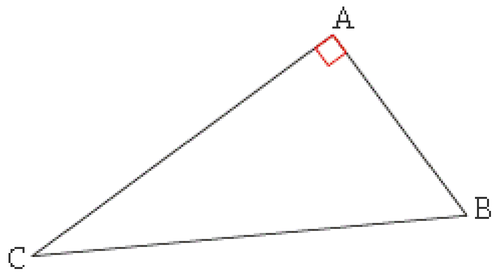


Figure 7

3- Le triangle rectangle

Un triangle rectangle est un triangle qui a angle droit .



6- les relations dans le triangle :

Calcul de la longueur d'un côté ou un angle dans un triangle rectangle

Pour calculer un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres, on a recours au théorème de Pythagore. Si on connaît seulement un côté et un angle aigu, on peut utiliser le sinus, le cosinus ou la tangente de cet angle.

1. Calcul de la longueur d'un côté

Il s'agit de calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la longueur d'un autre côté et la mesure d'un de ses angles aigus. Il suffit pour cela de caractériser le côté connu et le côté inconnu par rapport à l'angle dont la mesure est connue. On saura ainsi quel rapport trigonométrique on doit utiliser : le sinus, le cosinus ou la tangente.

Prenons un exemple.

Énoncé : soit IJK un triangle rectangle en I tel que IK = 3 cm et $\hat{J}$ = 26. On veut calculer KJ et IJ à 0,01 cm près.

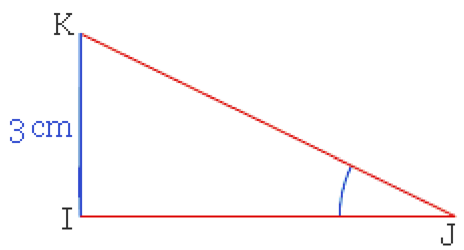


Figure 1

Résolution : on connaît IK qui est la longueur du côté **opposé** à $\hat{J}$, et on cherche KJ qui est la longueur de l'**hypoténuse** du triangle ; on va donc utiliser le **sinus** de l'angle $\hat{J}$. En effet, dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au rapport

$\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$.

On écrit : $\sin \hat{J} = \frac{IK}{KJ}$, soit $\sin 26° = \frac{3}{KJ}$, et on en déduit que $\mathbf{KJ} = \frac{3}{\sin 26°}$. D'où, à l'aide d'une calculatrice, on a : $KJ \approx 6{,}84$ cm.

Calculons IJ : on connaît IK qui est la longueur du côté **opposé** à $\hat{J}$, et on cherche IJ qui est la longueur du côté **adjacent** à $\hat{J}$; on va donc utiliser la **tangente** de l'angle $\hat{J}$. En effet, dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au rapport

$\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

On écrit : $\tan \hat{J} = \frac{IK}{IJ}$, soit $\tan 26° = \frac{3}{IJ}$, et on en déduit que $\mathbf{IJ} = \frac{3}{\tan 26°}$. D'où, à l'aide d'une calculatrice : $IJ \approx 6{,}15$ cm.

Calcul d'un angle

Il s'agit de calculer la mesure d'un angle d'un triangle rectangle, connaissant les longueurs de deux de ses côtés. Il suffit pour cela de caractériser les deux côtés connus par rapport à l'angle dont la mesure est à calculer ; on saura ainsi quel rapport trigonométrique on doit utiliser (le sinus, le cosinus ou la tangente).

Prenons un exemple.

Énoncé : soit NRV un triangle rectangle en R tel que RV = 7 m et NV = 9 m. On veut calculer la mesure de l'angle $\hat{V}$ arrondie à 0,1° près.

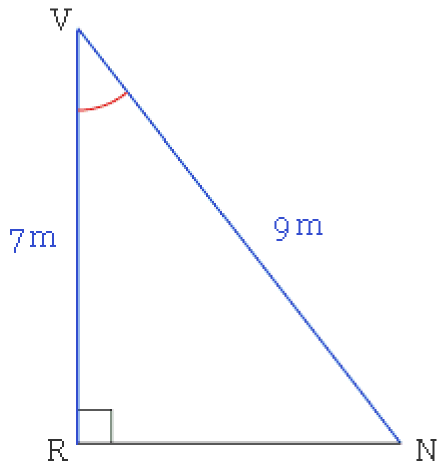


Figure 2

Résolution : RV est la longueur du côté **adjacent** à l'angle $\hat{V}$, et NV est la longueur de l'**hypoténuse** du triangle ; on va donc utiliser le **cosinus** de l'angle $\hat{V}$. En effet, dans un

$\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.

On écrit $\cos \hat{V} = \frac{RV}{NV}$, soit $\mathbf{\cos \hat{V} = \frac{7}{9}}$ et on en déduit, à l'aide d'une calculatrice, que $\hat{V} \approx 38{,}9°$.

Le triangle rectangle : calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle dans un triangle rectangle

Le mot *trigonométrie* vient du grec et signifie « mesure du triangle ». Le cosinus, le sinus et la tangente sont trois rapports trigonométriques. Comment peut-on calculer ces rapports et quelles sont leurs propriétés ?

Définitions

Étant donné un triangle ABC rectangle en B, considérons l'un de ses angles aigus, Â par exemple. Le côté [BC] est appelé côté opposé à l'angle Â, le côté [AB] est appelé côté adjacent à l'angle Â.

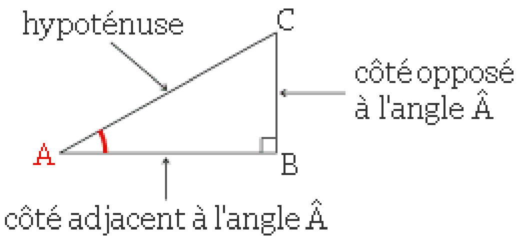


Figure 1

On définit alors les trois rapports suivants :

– sinus (sin)

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

– cosinus (cos)

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

– tangente (tan)

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}}$$

Remarque : pour calculer un de ces rapports, il faut exprimer les deux longueurs dans la même unité.

Exemple : en appliquant ces définitions à l'angle Â de la figure 1, on obtient :

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} ;\ \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} ;\ \tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}.$$

Propriétés

Appliquons les définitions précédentes à l'autre angle aigu du triangle de la figure 1, à savoir $\hat{C}$. On obtient :

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC} ;\ \cos \hat{C} = \frac{BC}{AC} ;\ \tan \hat{C} = \frac{AB}{BC}.$$

On constate que :

$$\sin \hat{A} = \cos \hat{C} ;\ \cos \hat{A} = \sin \hat{C} ;\ \tan \hat{A} = \frac{1}{\tan \hat{C}}.$$

Autrement dit, pour les deux angles aigus d'un triangle rectangle, on peut énoncer la propriété suivante : le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et la tangente de l'un est égale à l'inverse de la tangente de l'autre.

Ou encore, puisque les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires : **si deux angles** (non nuls) **sont complémentaires**, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre, et la tangente de l'un est égale à l'inverse de la tangente de l'autre.

Par exemple, sin 67° = cos 23° car un angle de 67° et un angle de 23° sont complémentaires.

Exemples de calcul

Exemple 1

Énoncé : l'unité de longueur étant le centimètre, soit LEM un triangle rectangle en E tel que EL = 12 et EM = 5. On veut calculer les valeurs exactes de sin $\hat{M}$, cos $\hat{M}$et tan $\hat{M}$.

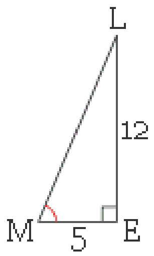


Figure 2

Résolution : pour calculer les valeurs exactes de sin $\hat{M}$et cos $\hat{M}$, on doit calculer la longueur de l'hypoténuse du triangle, à savoir ML. Ce triangle étant rectangle en E, on peut appliquer la propriété de Pythagore :

$LM^2 = EL^2 + EM^2$, soit $LM^2 = 12^2 + 5^2$, d'où $LM^2 = 169$, donc $LM = \sqrt{169} = 13$.

Par définition, $\sin \hat{M} = \frac{EL}{LM}$, donc $\sin \hat{M} = \frac{12}{13}$.

De même, $\cos \hat{M} = \frac{EM}{LM}$, donc $\cos \hat{M} = \frac{5}{13}$.

Enfin, $\tan \hat{M} = \frac{EL}{EM}$, donc $\tan \hat{M} = \frac{12}{5}$.

Remarque : avec une calculatrice, il est ensuite possible d'obtenir une valeur approchée de $\hat{M}$, par exemple à partir de sin $\hat{M}$ = 12/13 en tapant : 12/13 = INV SIN ou bien SIN^{-1} (12/13)EXE.

Exemple 2

Énoncé : soit PHR un triangle rectangle en P tel que HP = PR = 1 cm. Ce triangle étant isocèle et rectangle, on sait que $\hat{H} = \hat{R} = 45°$. On veut calculer les valeurs exactes du sinus, du cosinus et de la tangente de ces angles de 45°.

Résolution : par définition, $\cos \hat{H} = \frac{HP}{HR}$. Calculons la valeur exacte de HR, en appliquant la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle HPR :

$HR^2 = HP^2 + PR^2$, soit $HR^2 = 1^2 + 1^2$, donc $HR^2 = 2$, d'où HR = □ cm.

On en déduit que $\cos \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Par définition, $\tan \hat{H} = \frac{PR}{HP}$, donc $\tan \hat{H} = \frac{1}{1}$. On en déduit que $\tan 45° = 1$.

D'après les propriétés précédentes citées dans le paragraphe 2, les deux angles $\hat{H}$et $\hat{R}$étant complémentaires et de mesure 45°, on en déduit que sin $\hat{R}$ = cos 0007d623 et donc que

:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \tan 45° = 1.$$

.

Triangle rectangle et cercle : appliquer la propriété de Pythagore

En quoi consiste cette propriété célèbre et à quoi sert-elle ?

La propriété de Pythagore

Énoncés

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Remarque : ici, le mot *hypoténuse* désigne la longueur de l'hypoténuse et le mot *côté*, la longueur d'un côté.

On peut énoncer également la propriété de la façon suivante : soit ABC un triangle, s'il est rectangle en A alors $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$. Cette égalité est appelée égalité de Pythagore dans le triangle ABC.

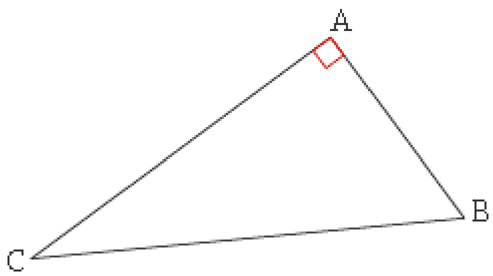


Figure 1

Applications

Calculer la longueur de l'hypoténuse

Énoncé : FGH est un triangle rectangle en G. L'unité de longueur étant le centimètre, on a GH = 8 et GF = 15. On veut calculer FH.

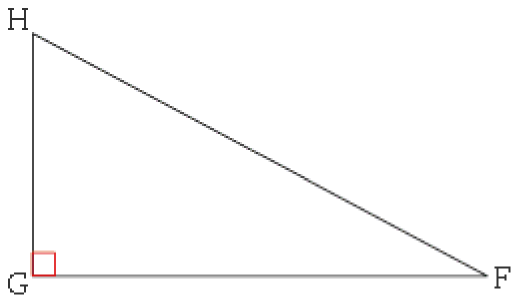


Figure 2

Résolution : le triangle FGH est rectangle en G. La propriété de Pythagore permet d'écrire : $FH^2 = GF^2 + GH^2$.

En remplaçant : $FH^2 = 8^2 + 15^2 = 289 = 17^2$. Finalement : FH = 17.

Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

Énoncé : RST est un triangle rectangle en R. L'unité de longueur étant le centimètre, on a RS = 5 et ST = 8. Combien mesure le segment [RT] ?

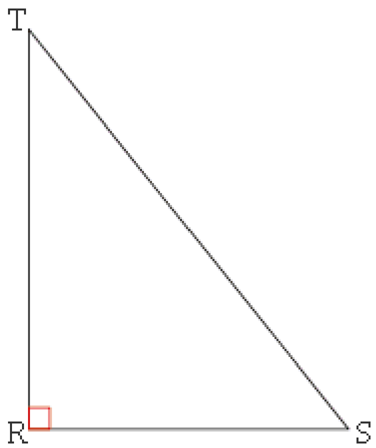


Figure 3

Résolution : le triangle RST est rectangle en R. La propriété de Pythagore permet d'écrire : $ST^2 = RS^2 + RT^2$.

En remplaçant : $8^2 = 5^2 + RT^2$ soit $64 = 25 + RT^2$. On obtient : $RT^2 = 64 – 25 = 39$. Donc $RT = \sqrt{39} \approx 6,2$ cm.

La réciproque de la propriété de Pythagore

1-Énoncé

Soit ABC un triangle. Si les longueurs de ses côtés vérifient la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ce triangle est rectangle en A.

2-Applications

Démontrer qu'un triangle est rectangle

Énoncé : soit un triangle MNP. L'unité de longueur étant le mètre, MN = 152, NP = 377 et MP = 345. Ce triangle est-il rectangle ?

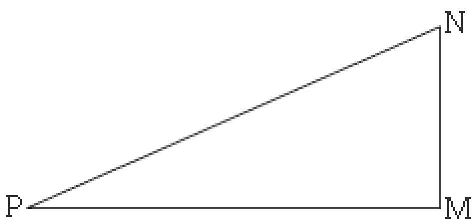


Figure 4

Résolution : le côté le plus long est [NP]. Comparons donc NP^2 et $MN^2 + MP^2$.

$NP^2 = 377^2 = 142\,129$ et $MN^2 + MP^2 = 152^2 + 345^2 = 23\,104 + 119\,025 = 142\,129$

On a bien $NP^2 = MN^2 + MP^2$.

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, ce triangle est rectangle en M.

Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Énoncé : ABC est un triangle. L'unité de longueur étant le centimètre, AB = 11, BC = 13 et AC = 17. Ce triangle est-il rectangle ?

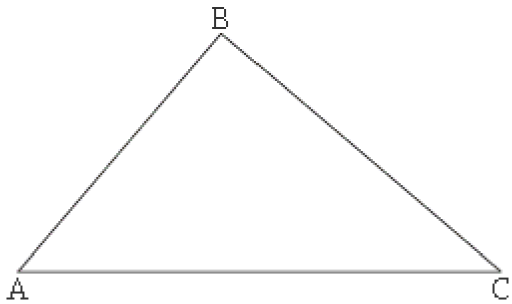


Figure 5

Résolution : si on observe la figure 5, ce triangle paraît rectangle mais l'est-il en réalité ?

Le côté le plus long est [AC]. Ce triangle ne peut donc être rectangle qu'en B. (En effet, dans un triangle rectangle le côté le plus long est l'hypoténuse).

Comparons AC^2 et $AB^2 + BC^2$.

$AC^2 = 17^2 = 289$ et $AB^2 + BC^2 = 11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$

$AC^2 \neq AB^2 + BC^2$

La propriété de Pythagore ($AC^2 = AB^2 + BC^2$) n'est pas vraie, donc le triangle ABC n'est pas rectangle en B.

Comme il ne pouvait pas être rectangle en un autre sommet que B, il n'est pas rectangle.

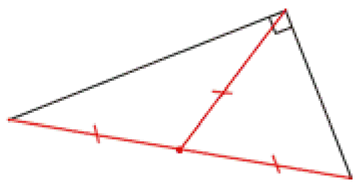


Figure 2

Exemple d'application

Énoncé : on a dessiné deux triangles rectangles ayant un côté commun. Le triangle ABC rectangle en C et le triangle ABD rectangle en D. Le point I est le milieu de [AB]. Le triangle ICD est-il isocèle ?

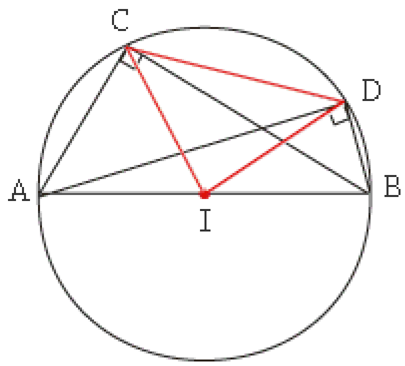


Figure 3

Résolution : le triangle ABC est rectangle en C. Il peut donc être inscrit dans le cercle de diamètre [AB] ; le segment [IC] est donc un rayon de ce cercle. Pour la même raison, [ID] est également un rayon du même cercle. On a donc IC = ID. Le triangle ICD est bien isocèle de sommet A.

Démontrer qu'un triangle est rectangle

La propriété réciproque

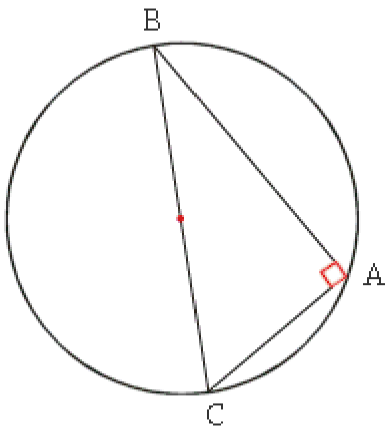


Figure 4

Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [BC], alors ABC est rectangle en A.

Remarque : cette propriété est la réciproque de celle vue dans le paragraphe 1.

Autres formulations :

– si le cercle circonscrit à un triangle ABC a pour diamètre le côté [BC], alors ABC est rectangle en A ;

– si dans un triangle ABC, le milieu de [BC] est équidistant des trois sommets, alors ABC est rectangle en A.

2.2. Exemple d’application

Énoncé : ABC est un triangle non rectangle. Le cercle de diamètre [BC] recoupe la droite (AB) en I et la droite (AC) en J. On va démontrer que les droites (CI) et (BJ) sont des hauteurs du triangle ABC.

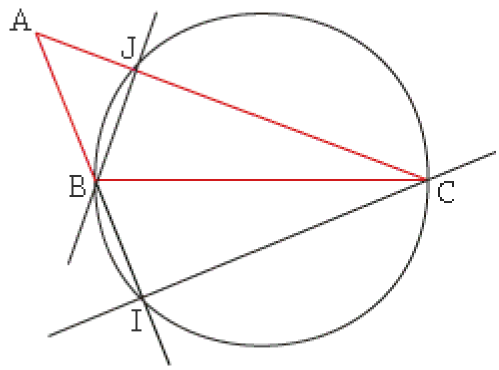


Figure 5

Résolution : le triangle BCI est inscrit dans le cercle de diamètre [BC]. Il est donc rectangle en I. La droite (CI) passe par le point C et est perpendiculaire à la droite (AB) ; c’est donc une hauteur du triangle ABC.

En considérant le triangle BCJ, on démontre de la même façon que (BJ) est également une hauteur du triangle ABC.

On vient de démontrer que dans un triangle, deux sommets et les pieds des hauteurs issues de ces sommets sont cocycliques (cela veut dire qu’ils se trouvent sur un même cercle).

Triangle rectangle et cercle : définir et utiliser le cosinus d’un angle

Soit un angle aigu d'un triangle rectangle, le rapport entre le côté adjacent et l'hypoténuse est toujours le même, quelle que soit l'ouverture de l'angle : ce nombre est appelé cosinus de cet angle. Mais quelle est son utilité ?

Cosinus d'un angle aigu

1-Définition

Soit ABC un triangle rectangle en B. On appelle cosinus de l'angle aigu $\hat{A}$ le rapport $\frac{AB}{AC}$.

On écrit $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$ (pour mémoriser facilement, on peut écrire $\cos \hat{A} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$, où « côté adjacent » signifie : « côté adjacent à l'angle Â qui n'est pas l'hypoténuse »).

Remarque : le cosinus de l'angle Â ne dépend que de l'ouverture de l'angle.

Pour s'en persuader, étudions la figure suivante.

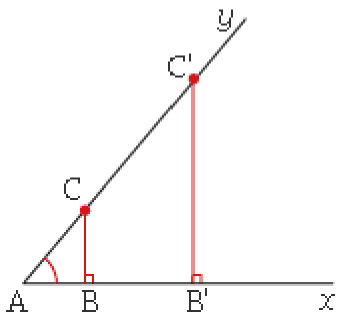


Figure 1

On a un angle aigu : Â. Les triangles ABC et AB′C′ sont rectangles respectivement en B et B′.

Les droites (BB′) et (CC′) étant parallèles, on reconnaît une situation de Thalès.

On a donc $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Si on échange AB et AC', on obtient $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$.

On voit donc que le rapport AB/AC ne dépend pas de la position de C sur la demi-droite [Ax). Ce qui fait qu'on peut le calculer dans n'importe quel triangle ABC rectangle en B avec C sur [Ax) et B sur [Ay).

On convient de l'appeler le cosinus de l'angle aigu *x*Â*y*.

2. Propriétés

Le cosinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1, car l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus grand des trois côtés.

Voici quelques valeurs particulières :

Angle $\hat{A}$	0°	30°	45°	60°
Cos $\hat{A}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. Applications

2.1. Calculer des longueurs

Énoncé : soit RST un triangle rectangle en R. L'unité de longueur étant le centimètre, ST = 7. De plus $\hat{S}$ = 35°. On veut calculer une valeur approchée de RS, puis de RT à 0,1 cm près.

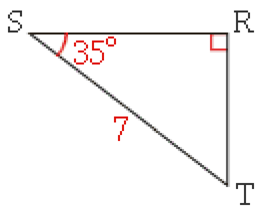


Figure 2

Résolution : le triangle RST est rectangle en R. On peut donc écrire :

$\cos \hat{S} = \frac{SR}{ST}$. Soit en remplaçant : $\cos 35° = \frac{SR}{7}$. En multipliant chaque membre par 7, il vient : SR = 7 × cos 35°.

Avec une calculatrice scientifique :

- – on vérifie d'abord, qu'elle est bien en mode degré ;
- – on tape ensuite la séquence : 7 $\boxed{\times}$ 35 $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ (ou 7 $\boxed{\times}$ $\boxed{\cos}$ 35 $\boxed{=}$). L'affichage indique 5,73…

Finalement, arrondi à 0,1 cm près, le segment [SR] mesure **5,7 cm**.

Pour calculer RT, on pourrait utiliser la propriété de Pythagore mais ce serait maladroit car on ne connaît qu'une valeur approchée de SR.

Il vaut mieux calculer l'angle $\hat{T}$. En effet $\hat{S}$ et $\hat{T}$ sont complémentaires donc $\hat{T}$ = 90° – 35° = 55°.

Pour la même raison que ci-dessus, on a

$\cos \hat{T} = \frac{RT}{ST}$, soit $ST = 7 \times \cos 55°$. ·

Finalement, à 0,1 cm près [ST] mesure **4,0 cm**. (On laisse parfois le 0 pour rappeler que le résultat est à 0,1 près).

Calcul des angles

Énoncé : FGH est un triangle rectangle en G. L'unité de longueur étant le centimètre, FG = 8 et FH = 11. On veut calculer la mesure (arrondie à 0,1 près) de $\hat{F}$.

Résolution : FGH est rectangle en G. On peut donc écrire

$\cos \hat{F} = \frac{FG}{FH}$. Soit en remplaçant $\cos \hat{F} = \frac{8}{11}$. Le problème revient donc à trouver un angle connaissant son cosinus.

Avec une calculatrice scientifique :

- – on vérifie d'abord, qu'elle est bien en mode degré ;
- – on tape ensuite la séquence : (8 $\boxed{\div}$ 11) $\boxed{\text{inv}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$(ou $\boxed{\text{inv}}\boxed{\cos}$(8 $\boxed{\div}$ 11) $\boxed{=}$).

L'affichage indique 43,34…

Finalement, arrondi à 0,1° près, l'angle 0007d609 mesure **43,3°**.

Remarques :

- – sur certaines calculatrices, la touche $\boxed{\text{inv}}$ est remplacée par $\boxed{2^{nd}}$;
- – sur d'autres, les deux touches $\boxed{\text{inv}}$et $\boxed{\cos}$(ou $\boxed{2^{nd}}$et $\boxed{\cos}$) sont remplacées par une seule $\boxed{\cos^{-1}}$.

Triangle rectangle et cercle : démontrer qu'un triangle est rectangle

On sait qu'un triangle rectangle possède des propriétés relatives à ses angles, à ses longueurs et qu'il peut s'inscrire dans un cercle. Comment peut-on utiliser ces propriétés pour démontrer qu'un triangle est rectangle ?

Le triangle a deux angles complémentaires

1. Propriété

Si un triangle a deux angles complémentaires (donc si la somme de leurs ouvertures est égale à 90°), alors il a un angle droit.

2. Exemple

Énoncé : ABCD est un parallélogramme. La bissectrice de l'angle BÂD coupe la bissectrice de l'angle A $\hat{D}$C en I. On veut démontrer que le triangle ADI est rectangle.

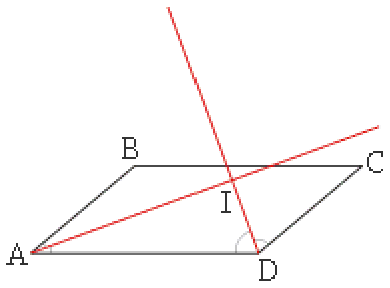


Figure 1

Résolution : on sait que, dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires.

Donc BÂD + A $\hat{D}$C = 180°.

De plus BÂD = 2IÂD et A $\hat{D}$C = 2I $\hat{D}$A.

On en déduit que 2IÂD et 2I $\hat{D}$A = 180°, soit en simplifiant IÂD + I $\hat{D}$A = 90°.

Les angles IÂD et I $\hat{D}$A sont donc complémentaires.

Le triangle IAD, qui a deux angles complémentaires (IÂD et I $\hat{D}$A), est rectangle en I.

Remarque :si on trace les quatre bissectrices du parallélogramme ABCD, le quadrilatère déterminé par les quatre points d'intersection des bissectrices est un rectangle.

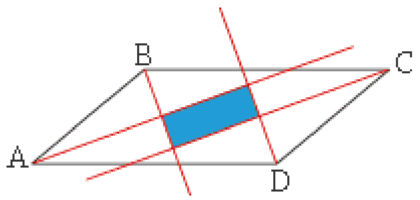


Figure 2

Le triangle est inscrit dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle

1. Propriété

Si un triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [BC], alors ABC est rectangle en A.

2. Exemple

Énoncé : soit un cercle *C* de centre O. Soit A un point extérieur au disque limité par ce cercle. Le cercle de diamètre [OA] coupe *C* en D et E. On veut démontrer que le triangle OAD est rectangle.

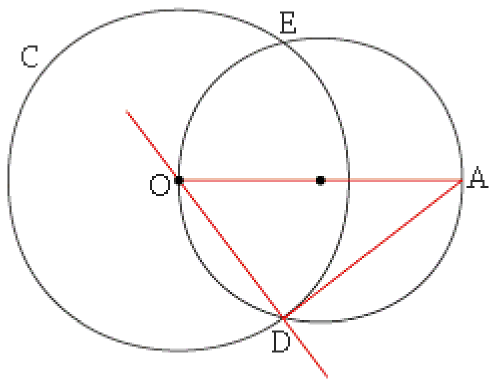


Figure 3

Résolution : le triangle OAD est inscrit dans le cercle de diamètre [AO], qui est un de ses côtés. Il est donc rectangle en D.

Remarques : la droite (AD) est perpendiculaire en D au rayon [OD]. La droite (AD) est donc la tangente à *C* au point D.

On peut démontrer de même que le triangle AEO est rectangle en E, donc la droite (AE) est tangente à *C* au point E.

Le triangle vérifie la réciproque de la propriété de Pythagore

1. Propriété

Soit ABC un triangle. Si les longueurs de ces côtés vérifient la relation : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle est rectangle en A.

2. Exemple

Énoncé : soit un triangle DEF. L'unité de longueur étant le centimètre, DE = 9, EF = 21 et DF = 19. Ce triangle est-il rectangle ?

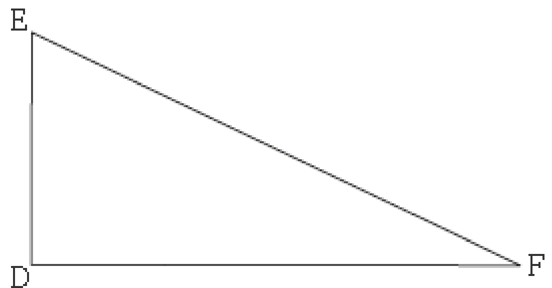


Figure 4

Résolution : le côté le plus long est [EF]. Comparons donc EF^2 et $DE^2 + DF^2$.

$EF^2 = 21^2 = 441$ et $DE^2 + DF^2 = 9^2 + 19^2 = 81 + 361 = 441$

On a bien : $EF^2 = DE^2 + DF^2$.

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, ce triangle est rectangle en D.

Triangle rectangle et cercle : déterminer la distance d'un point à une droite

On cherche à tracer un segment le plus court possible joignant un point à une droite. Faut-il utiliser une équerre et, si oui, pourquoi ?

1. La distance d'un point à une droite

Propriété

Soit une droite *d* et A un point du plan. Soit H le pied de la perpendiculaire à *d* passant par A. H est le point de *d* le plus proche de A.

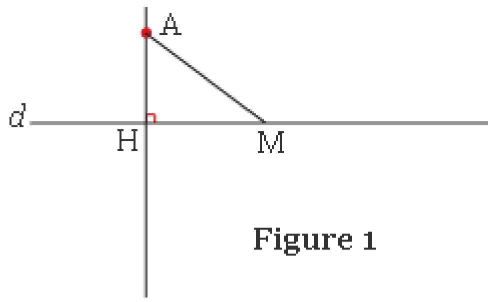


Figure 1

On voit sur la figure que, si M est un point de la droite distinct de H, alors AM > AH.

Démonstration

Notons d'abord que la propriété est vraie si A est sur *d*. En effet, dans ce cas de figure, H = A donc AH = 0 et si M est distinct de H (et donc de A), alors AM > 0.

Considérons ensuite le cas où A n'appartient pas à *d*. Reprenons la figure 1 et construisons le symétrique A′ de A par rapport à *d*.

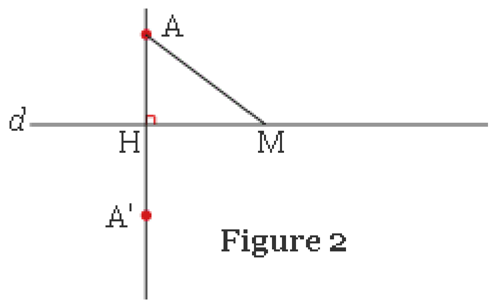


Figure 2

Par construction, la droite (AA′) est perpendiculaire à *d*. Les points A, H et A′ sont donc alignés et H est le milieu du segment [AA′]. On a donc AA′ = 2AH. (1)

De plus M est sa propre image par la symétrie axiale d'axe *d* et comme une symétrie axiale conserve les longueurs, A′M = AM. (2)

Considérons les trois points A, A′ et M. L'inégalité triangulaire permet d'écrire :
AA′ ≤ AM + MA′.

En utilisant les égalités (1) et (2), il vient : 2AH ≤ 2AM, d'où en simplifiant par 2 : AH ≤ AM.

Ce que l'on voulait démontrer.

Définition

Soit une droite *d*. Soit A un point et H le pied de la perpendiculaire à *d* passant par A.

La longueur AH s'appelle la distance du point A à la droite *d*.

On a vu dans le paragraphe 1.1. que c'est la plus petite distance entre A et un point de *d*.

Conséquences

L'hypoténuse du triangle rectangle

Propriété : soit un triangle ABC rectangle en A, l'hypoténuse [BC] est le côté le plus long.

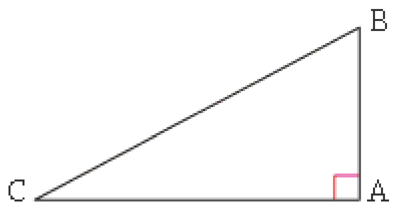


Figure 3

En effet :

• – la distance de B à la droite (AC) est BA donc BC > BA ;
• – de même : BC > AC.

Ce qui montre bien que l'hypoténuse est plus longue que chacun des deux autres côtés.

L’ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite donnée

Propriété : soit une droite *d* et *r* un réel positif. L'ensemble des points qui se trouvent à la distance *r* de *d* est constitué de deux droites parallèles à *d*.

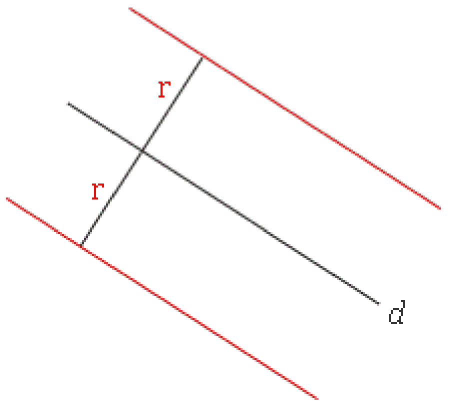


Figure 4

Application : soit *d* et *d'* deux droites sécantes. Trouver les points se trouvant à 2 cm de *d* et à 3 cm de *d'*.

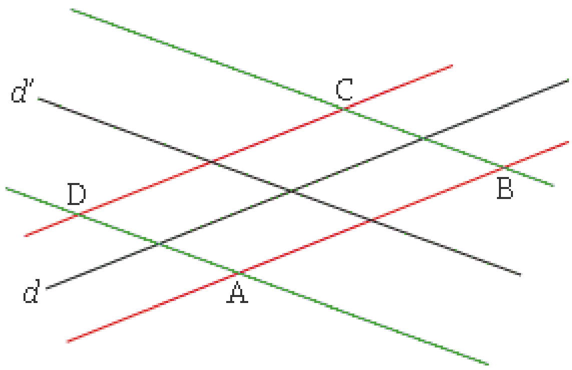


Figure 5

On a tracé en rouge l'ensemble des points situés à 2 cm de *d* et en vert l'ensemble des points situés à 3 cm de *d'*.

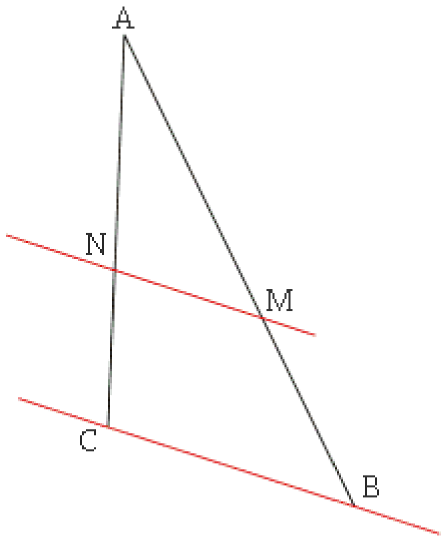
Ces quatre droites se coupent en A, B, C et D.

Ces quatre points se trouvent à 2 cm de *d* et à 3 cm de *d'*. Ils répondent donc au problème posé.

Triangles : appliquer le théorème de Thalès :

1. Énoncé du théorème

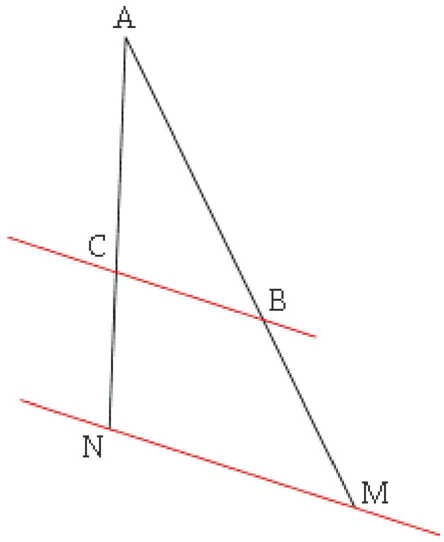
Ce théorème permet de calculer des longueurs dans certaines configurations.



Dans la figure 1, ABC est un triangle. M se trouve sur le segment [AB] et N sur le segment [AC]. D'après le théorème de Thalès, si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors on a l'égalité :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ *Remarques* :

• – Le théorème reste vrai dans le cas de la figure 2.

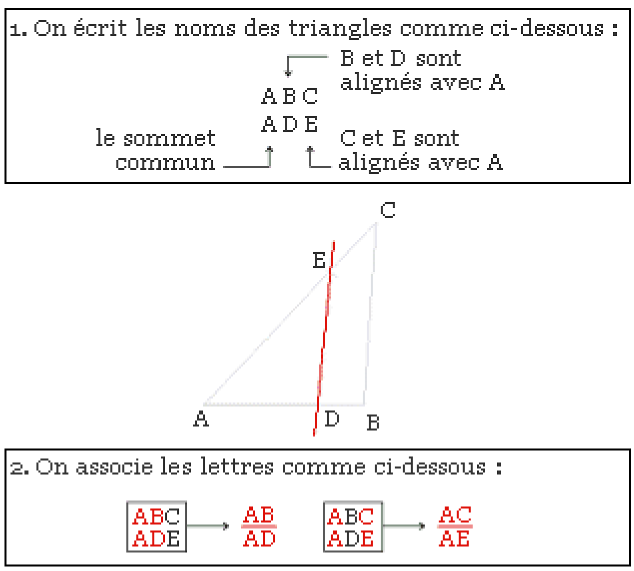


•

– On a aussi $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$. • – Le théorème 2 de la droite des milieux est un cas particulier de ce théorème.

• – Voici un moyen pratique pour se souvenir de ce théorème (avec d'autres points) :

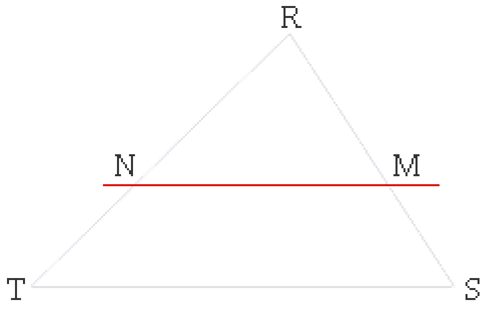
•



2. Applications du théorème

2.1. Calculer des longueurs

Énoncé : considérons la figure 4.



RST est un triangle. RS = 5 cm ; RT = 6 cm et ST = 7 cm. Le point M est sur le segment [RS] et RM = 3 cm. La parallèle à (ST) passant par M coupe le segment [RT] en N. On veut calculer les longueurs RN et MN.

Résolution : M est sur le segment [RS], N sur le segment [RT] et les droites (MN) et (ST) sont parallèles. On reconnaît donc une situation de Thalès.

On a les égalités : $\frac{RM}{RS} = \frac{RN}{RT} = \frac{MN}{ST}$. En remplaçant, on obtient : $\frac{3}{5} = \frac{RN}{6} = \frac{MN}{7}$.

L'égalité $\frac{3}{5} = \frac{RN}{6}$ donne : $RN = \frac{6 \times 3}{5} = 3{,}6$.

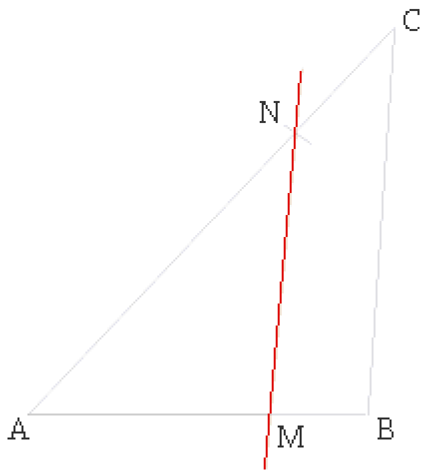
L'égalité $\frac{3}{5} = \frac{MN}{7}$ donne $MN = \frac{7 \times 3}{5} = 4{,}2$.

En conclusion : RN mesure 3,6 cm et MN mesure 4,2 cm.

2. 2. Vérifier que des droites sont ou non parallèles

Dans la figure ci-dessous AB = 7 cm, AC = 11 cm, AM = 5 cm et AN = 8 cm.

Les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ?



Sur le dessin, les droites (MN) et (BC) paraissent parallèles. Le sont-elles vraiment ?

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors on a une situation de Thalès et on doit avoir :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Cette égalité est-elle vraie ?

comparons les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$:

$\frac{AM}{AB} = \frac{5}{7}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{8}{11}$

Or $5 \times 11 \neq 8 \times 7$. Donc : $\frac{5}{7} \neq \frac{8}{11}$, ce qui entraîne : $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$.

Les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ ne sont pas égaux : les deux

droites (MN) et (BC) ne peuvent donc pas être parallèles.

Triangles : appliquer les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle

Quand on s'intéresse aux deux théorèmes relatifs aux milieux des côtés d'un triangle, on considère non seulement les milieux de deux côtés d'un triangle, mais aussi la droite qui les relie. Ces théorèmes permettent de démontrer que des points sont les milieux de segments ou que des droites sont parallèles entre elles.

1. La droite des milieux d'un triangle

1.1. Théorème 1

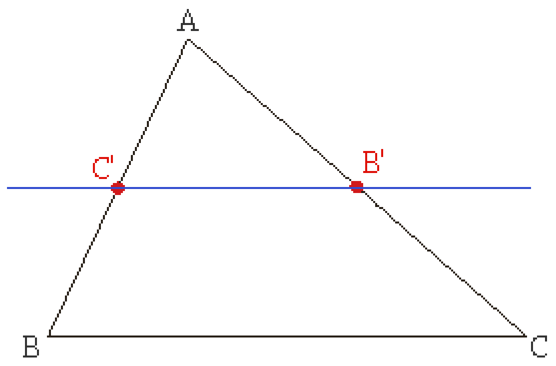


Figure 1

Dans un triangle ABC, la droite **passant par les milieux** B′ de [AC] et C′ de [AB] est **parallèle** au troisième côté [BC]. De plus, la longueur B′C′ est égale à la moitié de la longueur BC.

Remarque : la droite (B′C′) s'appelle la droite des milieux dans le triangle ABC.

1.2. Exemple

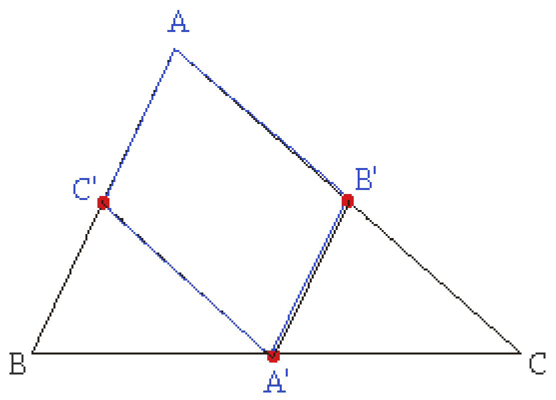


Figure 2

Énoncé : soit ABC un triangle. A′ est le milieu du côté [BC], B′ celui de [AC] et C′ celui de [AB]. On veut démontrer que le quadrilatère AB′A′C′ est un parallélogramme.

Démonstration : la droite (A′B′) passe par les milieux de [BC] et de [AC]. Elle est donc parallèle à la droite (AB). Pour la même raison, (A′C′) est parallèle à (AC). Le quadrilatère AB′A′C′, qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux, est bien un parallélogramme.

2. Une application du théorème 1 : un problème d'alignement

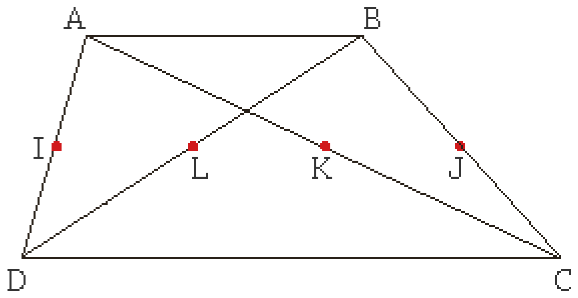


Figure 3

Énoncé : ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD]. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AD], [BC], [AC] et [BD]. On veut démontrer que les quatre points I, J, K et L sont alignés.

***Démonstration* :** dans le triangle ABD, la droite (IL) est une droite des milieux donc (IL) est parallèle à (AB). De même, dans le triangle BCD, la droite (LJ) est parallèle à (DC) et donc aussi à (AB). Les droites (IL) et (LJ) sont parallèles car chacune d'elles est parallèle à (AB) ; elles ont un point en commun : L. On en déduit qu'elles sont confondues. Cela prouve que les points I, L et J sont alignés.

En étudiant, de la même façon, les triangles ABC et ACD on peut aussi démontrer que les points K, I et J sont alignés. En conclusion, les points I, J, K et L appartiennent à la même droite (IJ) ; ils sont donc alignés.

3. la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un côté

3.1. Théorème 2

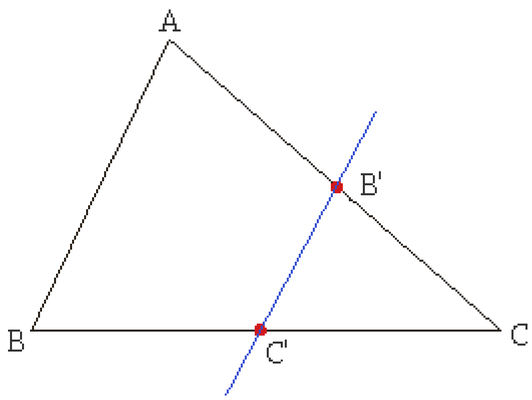


Figure 4

Dans un triangle ABC, la droite **passant par le milieu** B′ du côté [AC] et **parallèle** au côté [AB] **passe par le milieu** C′ du troisième côté [AC]. Bien sûr, on a encore : B′C′ = □ BC.

3.2. Exemple

Énoncé : dans la figure 5, AI = JB et D est le symétrique de B par rapport à C. La parallèle à la droite (DI) passant par C coupe le segment [AB] en J. On veut démontrer que J est le milieu du segment [IB] et que AI = IJ = JB.

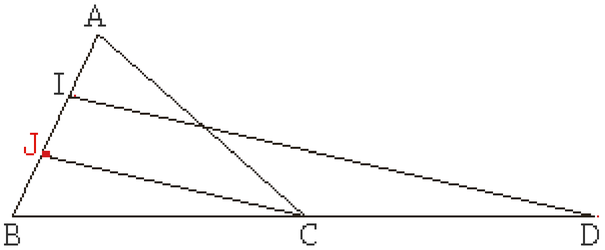


Figure 5

Démonstration : on remarque tout d'abord que IB = JA, donc IB = 2AI et C est le milieu du segment [BD]. Considérons maintenant le triangle IDB. La droite (CJ) passe par le milieu du côté [BD] et est parallèle au côté [DI]. Le théorème 2 permet d'affirmer qu'elle coupe le troisième côté en son milieu. J est donc le milieu du segment [IB] et on a IJ = JB . Or comme IB = 2AI, on a bien : AI = IJ = JB.

.

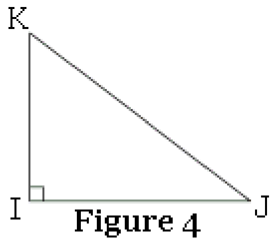


Figure 4

2. Compléments

2.1. Démontrer la formule

La figure 5 explique sur un exemple la formule du calcul de l'aire.

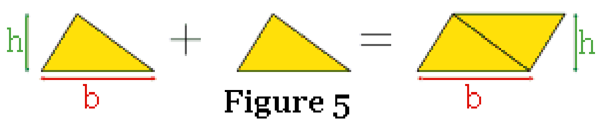


Figure 5

L'aire du parallélogramme est égale à $b \times h$. L'aire de chaque triangle est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme, c'est-à-dire : $\frac{b \times h}{2}$

2.2. Calculer une hauteur

ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 4 cm, BC = 5 cm et AC = 3 cm. On veut calculer la hauteur AH.

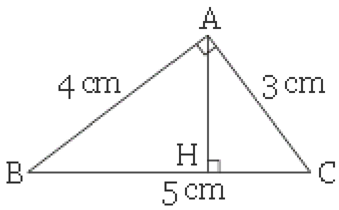


Figure 6

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ cm².

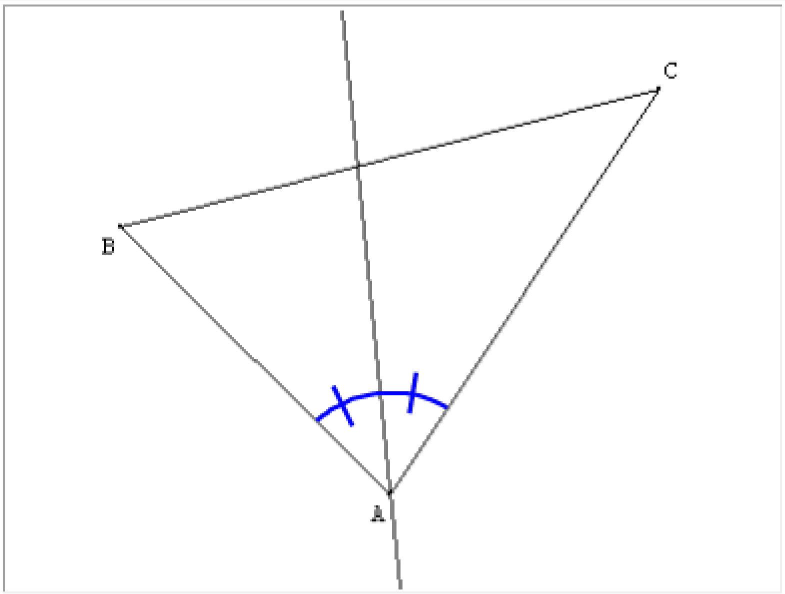
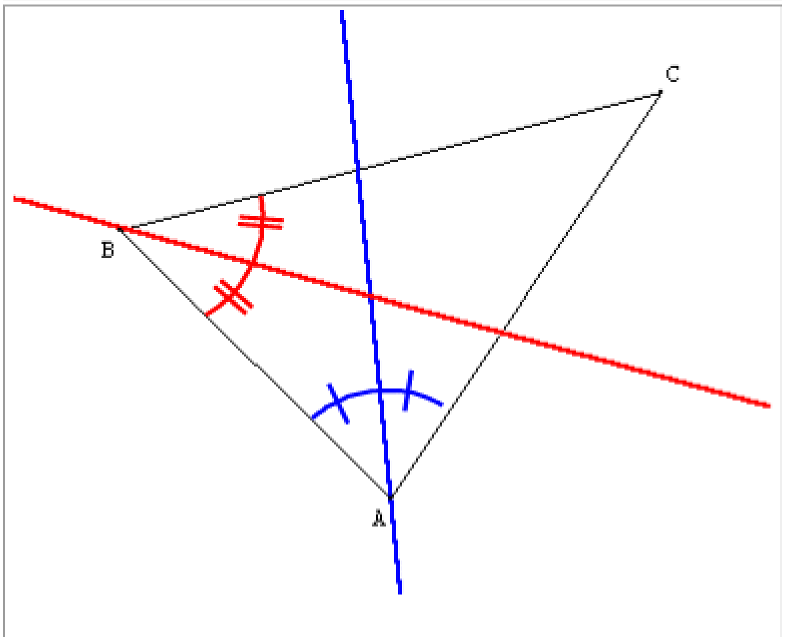
Cette aire est aussi égale à $\frac{5 \times h}{2}$ d'où $\frac{5 \times h}{2} = 6$; $5 \times h = 12$ et $h = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

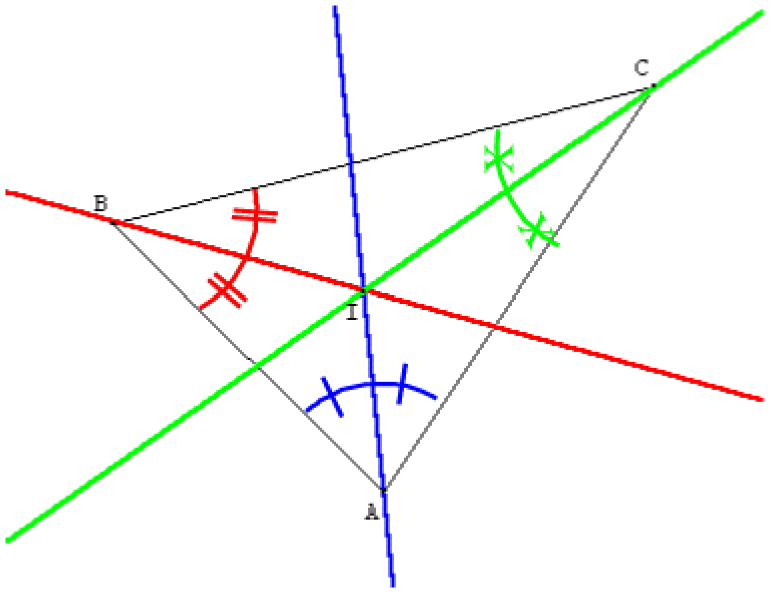
La hauteur AH est égale à **2,4 cm**.

B/ Etudier les cercles :

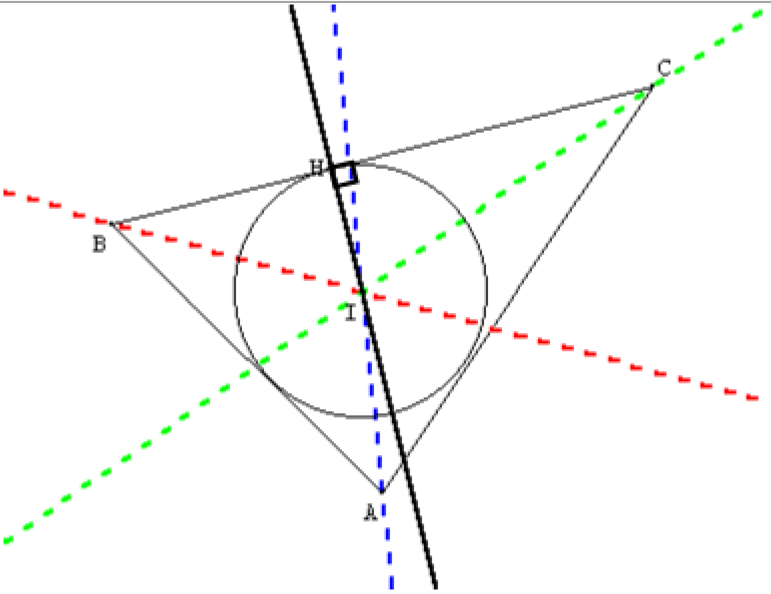
1- *Le cercle inscrit*

Définition : ***Le cercle inscrit est le cercle tangent aux côtés du triangle. Son centre est situé à l'intersection des bissectrices.***

	Construire la bissectrice du premier angle.
	Construire la bissectrice du deuxième angle.



Tracer la bissectrice du dernier angle.
Les trois bissectrices sont concourantes en I.



Le point d'intersection est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

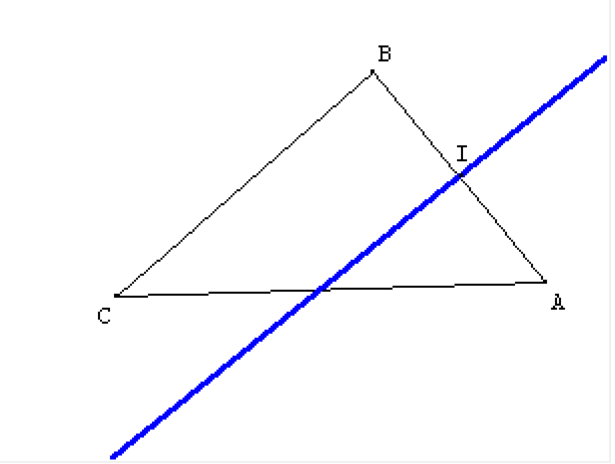
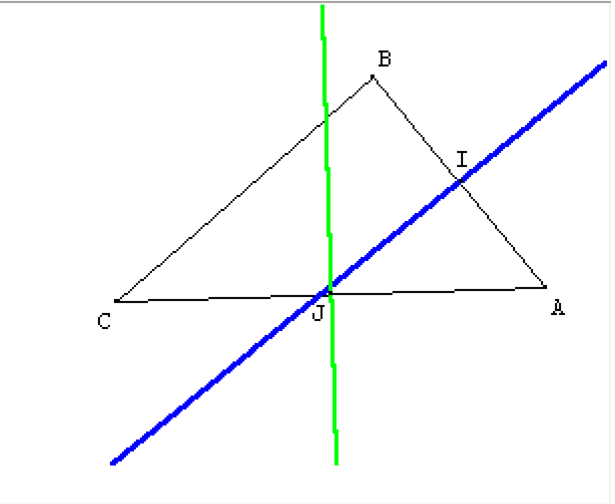
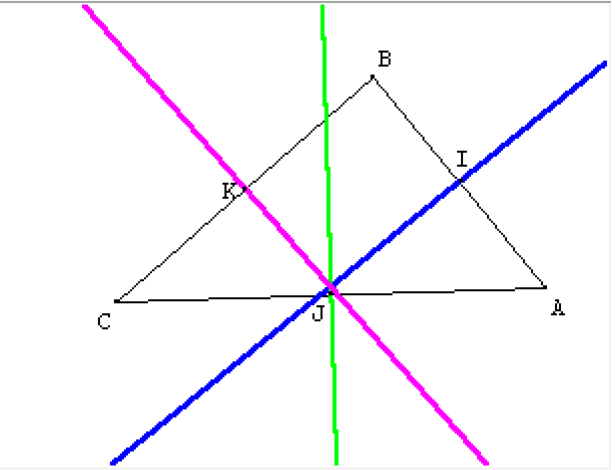
Pour trouver le rayon, il faut tracer la perpendiculaire à l'un des côtés passant par I.

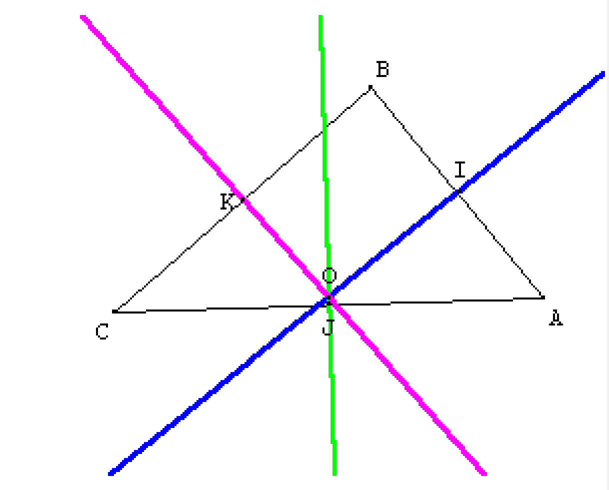
Cette perpendiculaire coupe le côté en un point H.

Le rayon du cercle inscrit est [IH]

2- *Le* cercle circonscrit :

Définition : ***Le cercle circonscrit est le cercle passant par les trois sommets du triangle. Son centre est situé à l'intersection des médiatrices.***

	Tracer la médiatrice du segment [AB]. Elle passe par le milieu de [AB] noté I
	Tracer la médiatrice du segment [AC]. Elle passe par le milieu de [AC] noté J
	Tracer la médiatrice du segment [BC]. Elle passe par le milieu de [BC] noté K.



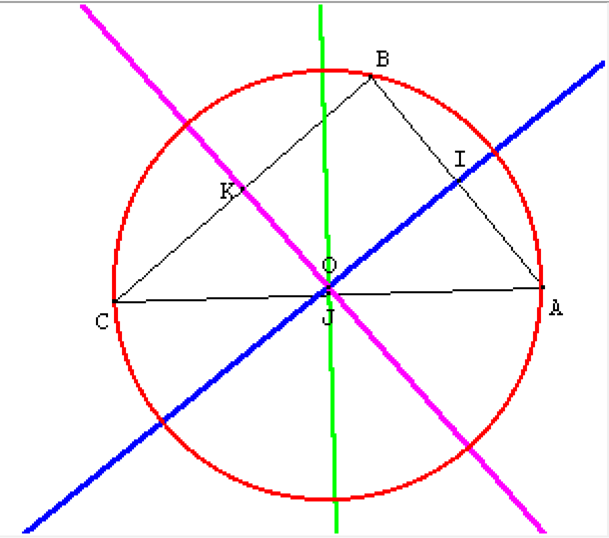
Donc O est point d'intersection des trois médiatrices du triangle ABC.

- (OI) est la médiatrice de [AB], donc A et B sont équidistants de O : OA = OB
- (OJ) est la médiatrice de [AC], donc A et C sont équidistants de O : OA = OC
- (OK) est la médiatrice de [BC] , donc B et C sont équidistants de O : OB = OC

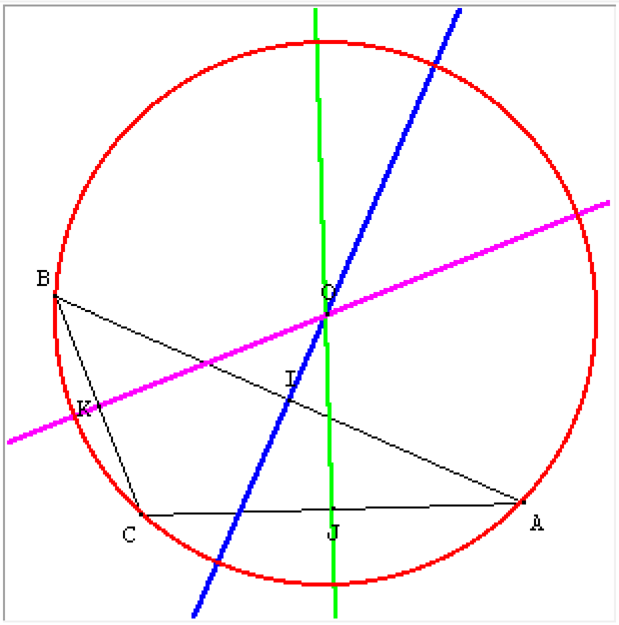
Finalement OA = OB = OC.

Donc les trois points A, B et C appartiennent au même cercle que l'on appellera cercle circonscrit au triangle ABC

Il suffit de prendre le compas, placer la pointe sur O et mesurer la distance de O à A pour tracer le cercle.



Cas N°1 : Si les trois angles sont aigus.



Cas N°2 : Si un des angles est obtu.

Propriété :

Les trois médiatrices d'un triangle sont **concourantes**. Leur point de concours est à la même distance des trois sommets du triangle et c'est le seul point ayant cette propriété.

Il est donc le centre du cercle passant par les trois sommets du triangle.

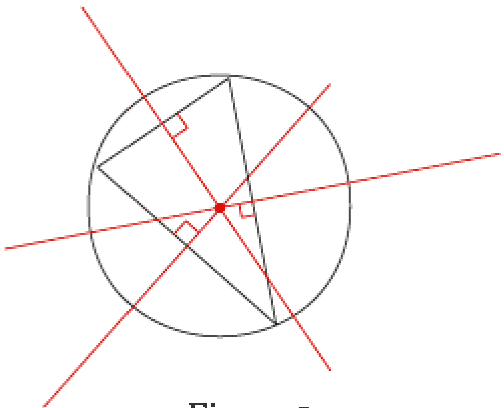


Figure 2

***Remarques* :**

• – ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle. On dit quelquefois : le triangle est inscrit dans le cercle ; le mot *circonscrit* vient du latin et signifie : « écrit autour » (de même, *inscrit* signifie : « écrit dans ») ;

• – en pratique, il suffit de construire deux médiatrices pour trouver le centre du cercle circonscrit.

- Position du centre du cercle circonscrit

Dans la figure 2, le centre du cercle circonscrit se trouve à l'intérieur du triangle. En revanche, si on observe la figure 3, il est à l'extérieur du triangle.

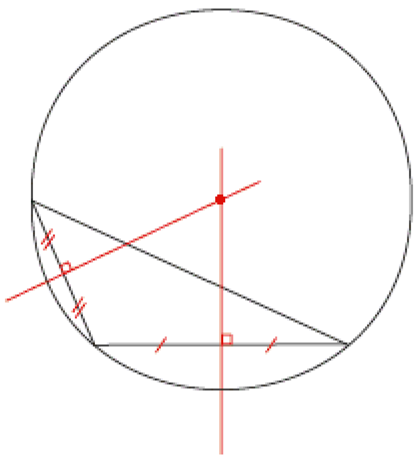


Figure 3

Dans la figure 4, le centre du cercle circonscrit est le milieu du côté [BC]. On peut vérifier que le triangle est rectangle en A.

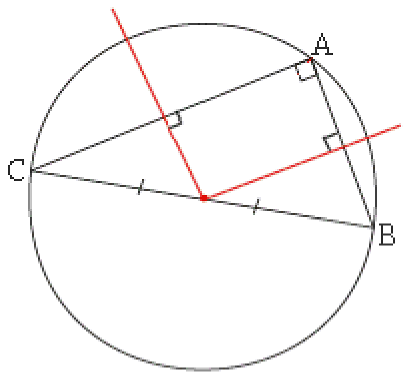


Figure 4

***En résumé* :**

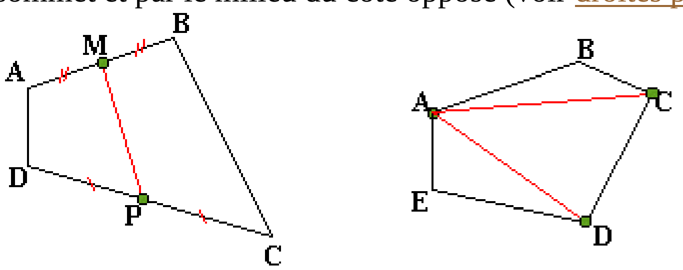
• – si le triangle a tous ses angles aigus, le centre du cercle circonscrit est à l’intérieur du triangle ;

• – si le triangle a un angle droit, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse ;
• – si le triangle a un angle obtus, le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle.

C/Etudier les polygones

1-Définitions :

Un polygone est constitué d'au moins trois côtés.
Un polygone est *régulier* si ses côtés ainsi que ses angles ont même mesure.
Une diagonale d'un polygone est une droite (ou un segment) qui passe par deux sommets **non consécutifs**.
Une médiane d'un polygone qui a quatre sommets (quadrilatère) est une droite (ou un segment) qui passe par les milieux de deux côtés **opposés**. Si le polygone a trois sommets alors il s'agit d'un triangle et la médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé (voir droites particulières).



Sur la figure de gauche ci-dessus :
A, B, C, … sont des sommets ; les sommets A et B sont consécutifs ; [AB] et [DC] sont des côtés opposés (pas d'extrémités communes) alors que [AB] et [BC] sont des côtés consécutifs (une extrémité commune qui est B). ABCD est un quadrilatère, [MP] est l'une des deux médianes (l'autre passe par les milieux de [AD] et [BC]).
Sur la figure de droite :
ABCDE est un polynôme, [AD] et [AC] sont deux des quatre diagonales (les deux autres sont [BE] et [BD]).

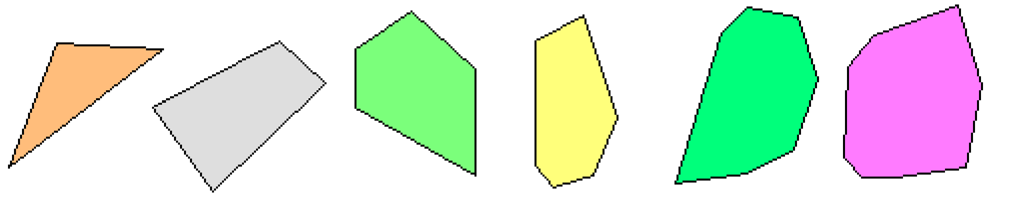
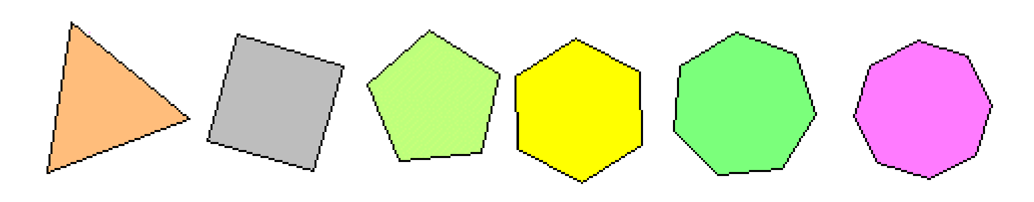
Cas particuliers :

Un triangle est un polygone à 3 côtés. Le triangle équilatéral est régulier (le triangle isocèle ne l'est pas : ses côtés n'ont pas tous la même mesure).
Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés. Le carré est un quadrilatère régulier (le losange ne l'est pas : ses angles ne sont pas tous de même mesure).

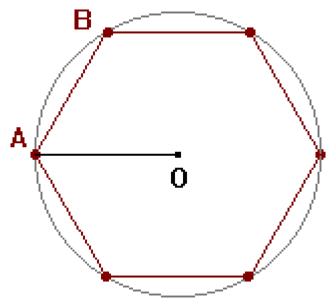
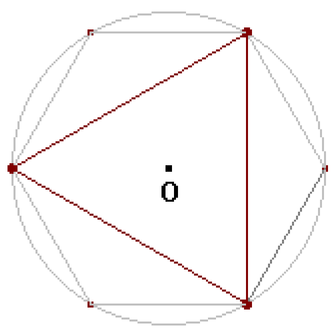
Exemples :

Dans l'ordre croissant du nombre de côtés (ou d'angles) :

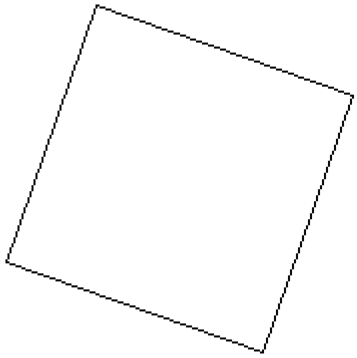
Polygones	Triangle	Quadrilatère	Pentagone	Hexagone	Heptagone	Octogone

Irréguliers	
Réguliers	

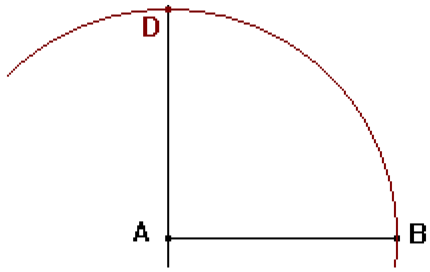
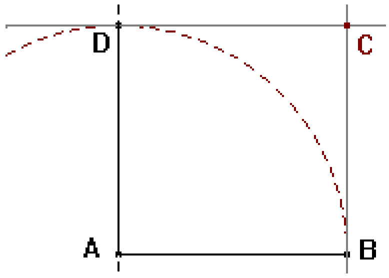
2-Polygones réguliers

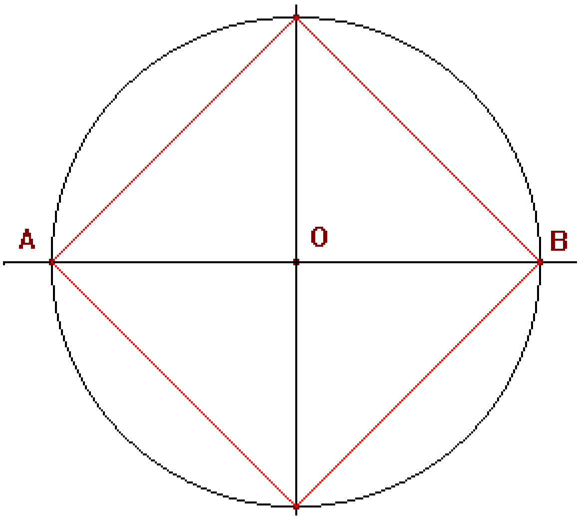
Construction exacte du triangle équilatéral **Triangle équilatéral :** polygone à 3 côtés de même longueur et 3 angles au sommet de 60°	
Le triangle équilatéral aurait aussi pu s'appeler "trigone régulier".	
Rappel de la construction de l'hexagone régulier **:** Tracer un cercle de centre O et de rayon OA. Reporter la longueur OA sur le cercle à partir de A. Le polygone obtenu est un hexagone régulier, inscrit dans le cercle.	
Construction du triangle équilatéral à partir de l'hexagone régulier : Il suffit de relier les sommets de l'hexagone deux à deux. Le polygone obtenu est un triangle équilatéral, inscrit dans le cercle.	

Constructions exactes du carré

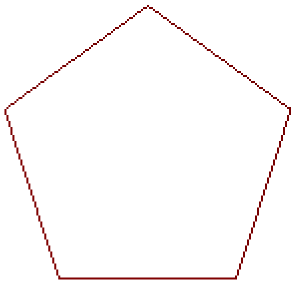


Carré :
polygone à 4 côtés de même longueur
et 4 angles au sommet égaux à 90°

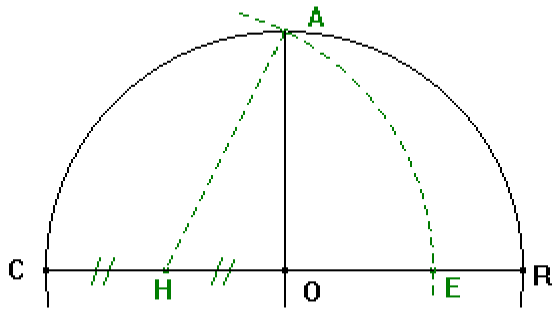
Construction du carré à partir d'un de ses côtés	
Un segment [AB] étant donné, tracer la perpendiculaire à (AB) en A. Puis tracer le cercle de centre A et de rayon AB. Soit D le point d'intersection entre le cercle et la perpendiculaire.	
La perpendiculaire au segment [AB] en B et la perpendiculaire au segment [AD] en D se coupent en C. La figure ABCD obtenue est le carré de côté AB.	

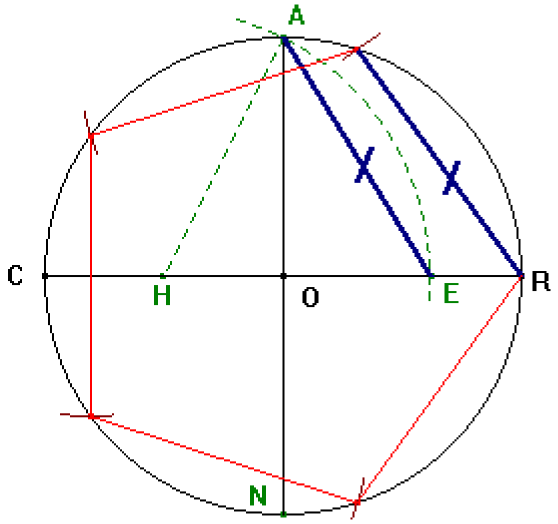
Construction du carré inscrit dans un cercle	
Deux points O et A étant donnés, tracer le cercle de centre O et de rayon OA. Tracer le diamètre [AB], puis la médiatrice de [AB]. Les quatre points d'intersection avec le cercle forment un **carré inscrit dans ce cercle**.	

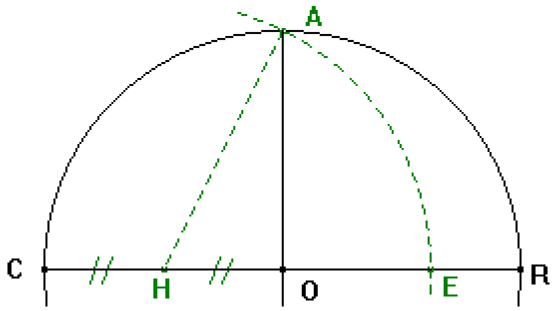
Constructions exactes du pentagone régulier



Pentagone régulier : polygone à 5 côtés de même longueur et 5 angles au sommet égaux à 108°
C'est une structure essentielle en art, fortement symbolique.

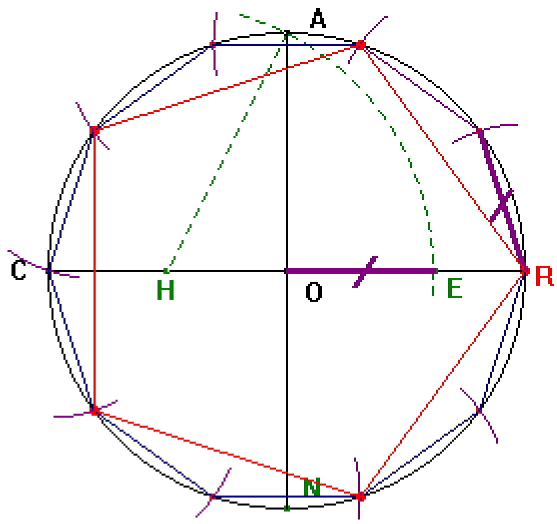
Une construction du pentagone régulier à partir d'un rectangle d'Or :	
Tracer un cercle de centre O et de diamètre [CR]. Soit H le milieu de [OC]. La médiatrice de [CR] coupe le cercle en A et N. Le cercle de centre H et de rayon HA coupe [OR] en E. OA et CE représentent donc la largeur et la longueur d'un rectangle d'Or.	

Reporter la longueur AE sur le cercle à partir du point R pour obtenir les sommets du pentagone régulier.	

Une autre construction du pentagone régulier à partir d'un rectangle :	
Tracer un cercle de centre O et de diamètre [CR]. Soit H le milieu de [OC]. La médiatrice de [CR] coupe le cercle en A et N. Le cercle de centre H et de rayon HA coupe [OR] en E. OA et CE représentent donc la largeur et la longueur d'un rectangle d'Or.	

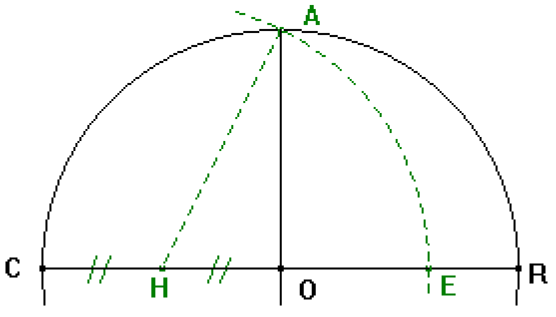
Reporter la longueur OE sur le cercle à partir du point R pour obtenir les sommets d'un décagone régulier.

Il suffit alors de relier les points deux à deux pour obtenir un pentagone régulier.



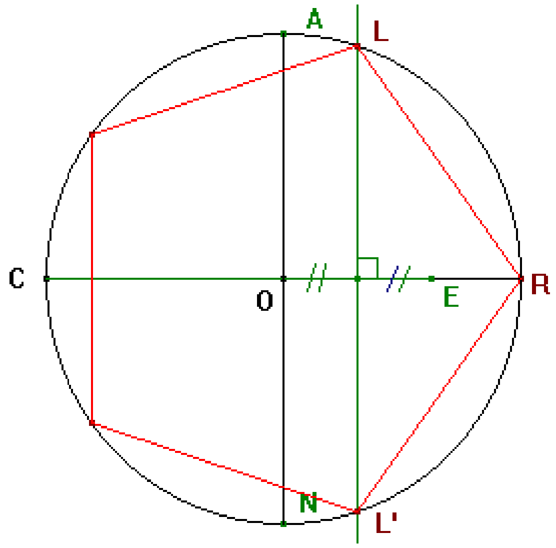
Une troisième construction du pentagone régulier :

Tracer un cercle de centre O et de diamètre [CR].
Soit H le milieu de [OC].
La médiatrice de [CR] coupe le cercle en A et N.
Le cercle de centre H et de rayon HA coupe [OR] en E.
OA et CE représentent donc la largeur et la longueur d'un rectangle d'Or.

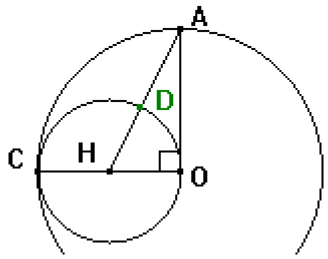
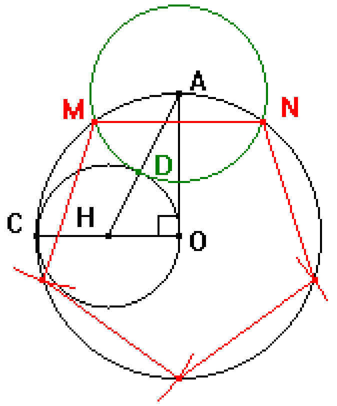


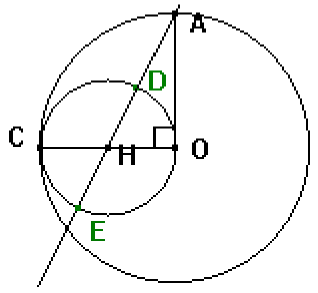
La médiatrice de [OE] coupe le cercle en L et L'.
[RL] et [RL'] sont deux côtés consécutifs d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle.

Reporter la longueur LR sur le cercle à partir de L pour obtenir les autres sommets du pentagone régulier.



Une construction du pentagone régulier :

Tracer un cercle Γ de centre O, puis deux rayons perpendiculaires en O, [OA] et [OC]. Soit H le milieu de [OC]. Construire le cercle Γ ' de centre H et de rayon HO. Le segment [AH] coupe Γ ' en D.	
Le cercle de centre A et de rayon AD coupe le cercle Γ en M et N. [MN] est un des côtés du pentagone régulier inscrit dans le cercle Γ . Il suffit donc de reporter la longueur MN sur le cercle Γ à partir de M. On obtient ainsi un pentagone régulier.	

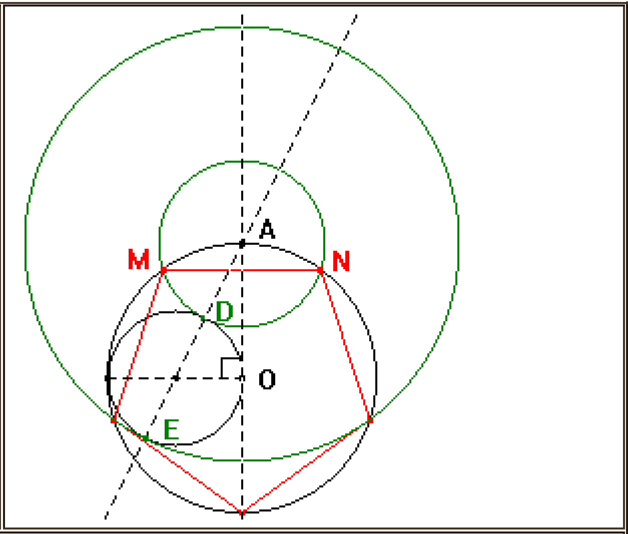
Une construction du pentagone régulier, d'après Maurice Starck :	
Tracer un cercle Γ de centre O, puis deux rayons perpendiculaires en O, [OA] et [OC]. Soit H le milieu de [OC]. Construire le cercle Γ ' de centre H et de rayon HO. La droite (AH) coupe Γ ' en D et E.	

Le cercle de centre A et de rayon AD coupe le cercle Γ en M et N. [MN] est un des côtés du pentagone régulier inscrit dans le cercle Γ .

Le cercle de centre A et de rayon AE fournit deux autres sommets du pentagone.

Le cinquième sommet du pentagone est le point diamétralement opposé à A.

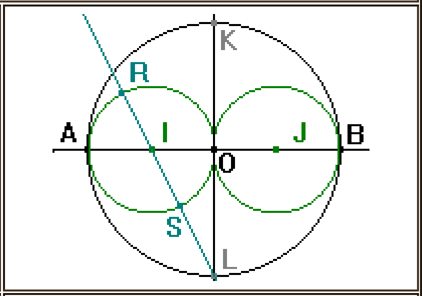
On obtient ainsi un pentagone régulier.



Une construction égyptienne du pentagone régulier :

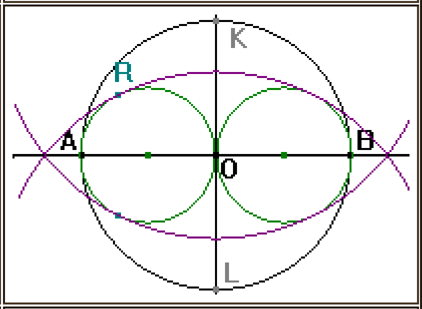
Tracer un cercle de centre O et de diamètre [AB].
Tracer le cercle de diamètre [OA], puis celui de diamètre [OB].La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe le premier cercle en K et L.

Soit I le centre du cercle de diamètre [OA]. La droite (LI) coupe ce cercle en R et S.



Tracer le cercle de centre L et de rayon LR, puis son symétrique par rapport à la droite (AB).

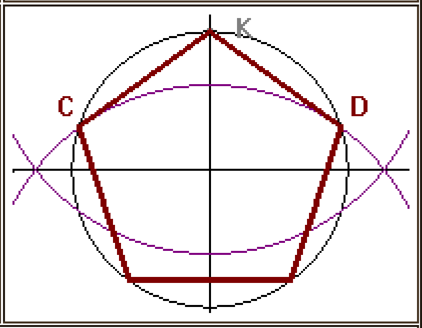
Cette figure est la représentation de l'œil d'Amon vue par les égyptiens.
Les deux arcs de cercle de couleur mauve forment ce que les mathématiciens appellent une lentille.



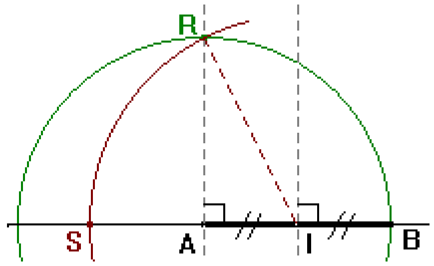
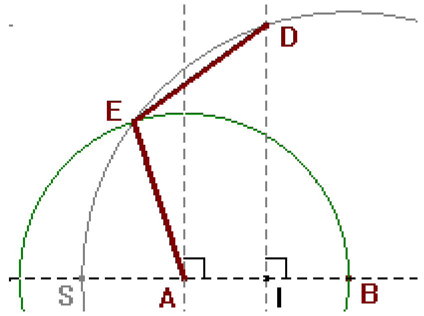
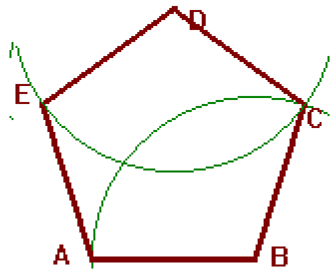
L'arc de cercle supérieur de la lentille coupe le premier cercle en deux points C et D.

[KC] et [KD] sont deux côtés consécutifs du pentagone régulier inscrit dans le premier cercle.

Il suffit de reporter la longueur KC sur le cercle pour obtenir tous les côtés du pentagone régulier.



Une construction d'architecte du pentagone régulier :

Tracer le cercle de centre A et de rayon AB, puis la perpendiculaire à (AB) passant par A. Soit R un des points d'intersection entre le cercle et la droite. Soit I le milieu de [AB]. Le cercle de centre I et de rayon IR coupe la demi-droite [BA) en S.	
Le cercle de centre B et de rayon BS coupe le cercle de centre A et de rayon [AB] en E. Il coupe aussi la médiatrice de [AB] en D. Les segments [BA], [AE], [ED] sont trois côtés consécutifs du pentagone régulier que nous avons commencé à tracer.	
Tracer le cercle de centre D et de rayon DE, puis celui de centre B et de rayon BA. Ces deux cercles possèdent deux points d'intersection. Seul le point C permet d'obtenir un polygone convexe. ABCDE est un pentagone régulier.	

Construction exacte de l'hexagone régulier

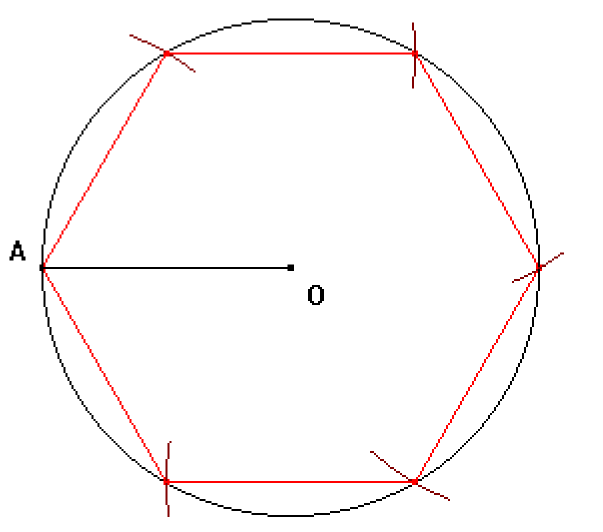
Hexagone régulier : polygone à 6 côtés de même longueur et 6 angles au sommet de 120°

L'hexagone régulier est un des polygones les plus utilisés dans les tracés d'architecture. C'est aussi un des plus faciles à construire.

Tracer un cercle de centre O et de rayon OA.

Reporter la longueur OA sur le cercle à partir de A.

Le polygone obtenu est un **hexagone régulier**, inscrit dans le cercle.

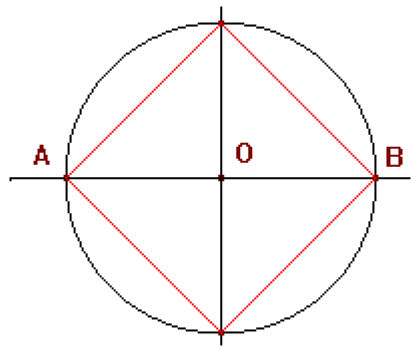


Construction exacte de l'octogone régulier

Octogone régulier : polygone à 8 côtés de même longueur et 8 angles au sommet de 135°

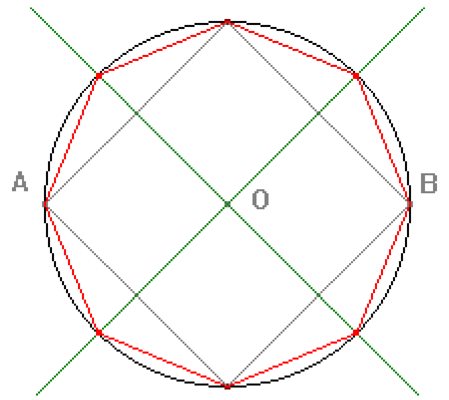
Rappel de la construction du carré :

Tracer un cercle de centre O et de rayon OA.
Tracer un diamètre [AB], puis la médiatrice de [AB].
Les quatre points d'intersection avec le cercle forment un carré inscrit dans le cercle.

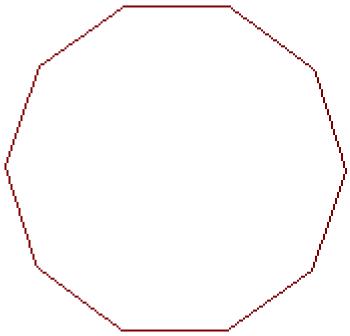


La médiatrice de chaque côté du carré coupe le cercle en deux points.

Il ne reste qu'à relier les **huit points** obtenus sur le cercle.
Le polygone obtenu est un **octogone régulier**, inscrit dans le cercle.

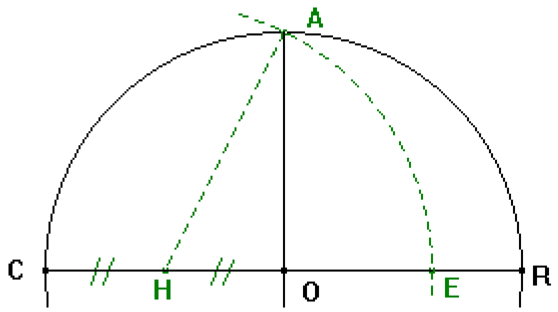
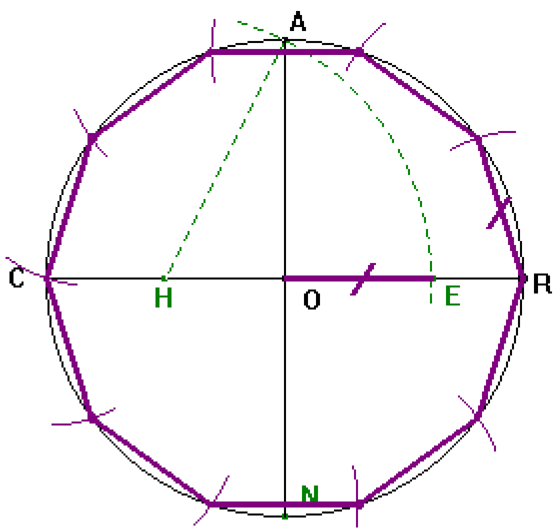


Constructions exactes du décagone régulier

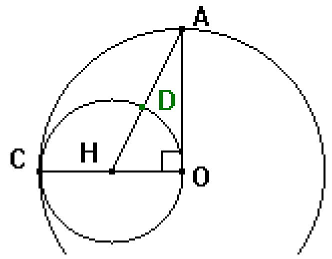
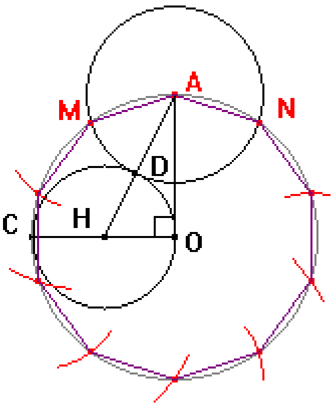


décagone régulier : polygone à 10 côtés de même longueur et 10 angles au sommet égaux à 144°

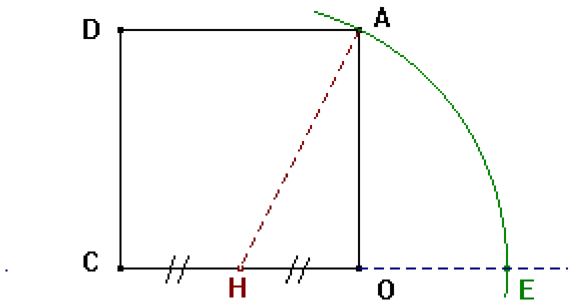
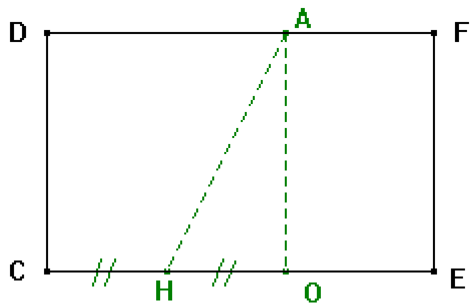
La construction rigoureuse repose sur le rectangle

Une construction du décagone régulier à partir d'un rectangle d'Or :	
Tracer un cercle de centre O et de diamètre [CR]. Soit H le milieu de [OC]. La médiatrice de [CR] coupe le cercle en A et en un deuxième point N. Le cercle de centre H et de rayon HA coupe [OR] en E. OA et CE représentent donc la largeur et la longueur d'un rectangle d'Or.	
Reporter la longueur OE sur le cercle à partir du point R pour obtenir les sommets d'un décagone régulier.	

Une autre construction du décagone régulier :

Tracer un cercle Γ de centre O, puis deux rayons perpendiculaires en O, [OA] et [OC]. Soit H le milieu de [OC]. Construire le cercle Γ ' de centre H et de rayon HO. Le segment [AH] coupe Γ ' en D.	
Le cercle de centre A et de rayon AD coupe le cercle Γ en M et N. [MA] est un des côtés du décagone régulier inscrit dans le cercle Γ . Il suffit donc de reporter la longueur MA sur le cercle Γ à partir de M. On obtient ainsi un décagone régulier.	

Construction d'un rectangle d'Or

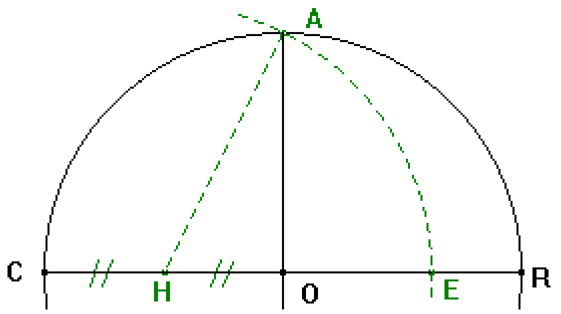
Tracer un carré COAD. Soit H le milieu de [CO]. Construire le cercle de centre H et de rayon HA. Il coupe la demi-droite [CO) en E.	
Soit F le quatrième sommet du rectangle DCEF. DCEF est un rectangle d'Or. Cela signifie que le rapport de la longueur par la largeur est égal au nombre d'Or. (le nombre d'Or est noté Φ) Φ ≈ 1,618 donc DF/DC ≈ 1,618	

Le rectangle d'Or est utilisé dans la construction du pentagone régulier, du décagone régulier, de l'icosagone régulier, du polygone régulier à 40 côtés.

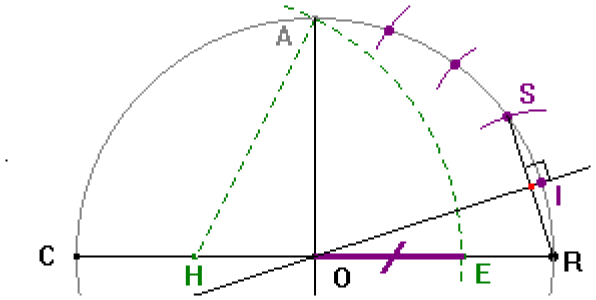
Construction de l'icosagone régulier à partir du rectangle d'Or

Icosagone régulier : polygone à 20 côtés de même longueur et 20 angles au sommet de 162°

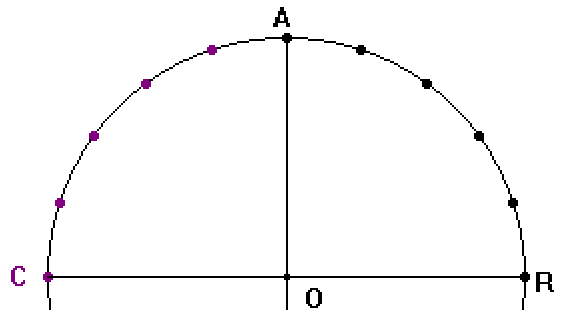
Tracer un cercle de centre O et de diamètre [CR]. Soit H le milieu de [OC].
La médiatrice de [CR] coupe le cercle en A et en un autre point N.
Le cercle de centre H et de rayon HA coupe [OR] en E.
OA et CE représentent donc la largeur et la longueur d'un rectangle d'Or.



En reportant la longueur OE sur le cercle à partir du point R, on obtient le point S.
La médiatrice de [SR] coupe le cercle en I.
L'arc RI est la vingtième partie du cercle.
Autrement dit, le segment [RI] est un côté de l'icosagone régulier inscrit dans le cercle.
Reporter cinq fois cette longueur sur le cercle, afin d'aboutir au point A.

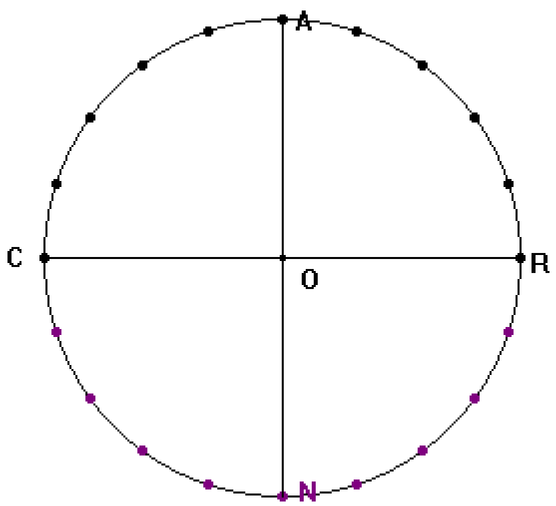


Construire le symétrique des cinq points précédemment obtenus par rapport à la droite (AO).



La construction du symétrique des dix points précédemment obtenus par rapport à la droite (CR) permet d'obtenir la division du cercle en vingt parties égales. L'icosagone peut être tracé en joignant ces vingt points.

Cette construction est utilisée pour le tracé d'une coupole à 20 caissons, que l'on retrouve dans la chapelle Nord du Panthéon de Soufflot, à Paris.



D/ Calcul des surfaces et des volumes des pièces géométriques

1- Les Périmètres

Définitions:

Un périmètre mesure le contour d'une figure.

L'unité de mesure est le **mètre** (**m**).

Les polygones:

Les triangles, les rectangles, les parallélogrammes sont des polygones.

Le périmètre d'un polygone est égal à la somme des longueurs de ses côtés.

Remarques:

Pour un triangle équilatéral il est plus simple de calculer: **P=3.c** où **c** est la longueur d'un côté.

Pour un parallélogramme (ainsi que le cas particulier du rectangle) vous utiliserez la formule: **P=(L+l).2** où **L** est la longueur, **l** est la largeur. Notez que L+l est appelé *demi-périmètre*.

Pour un losange (donc pour un carré aussi) la formule est: **P=4.c** où **c** est la longueur d'un côté.

Les cercles:

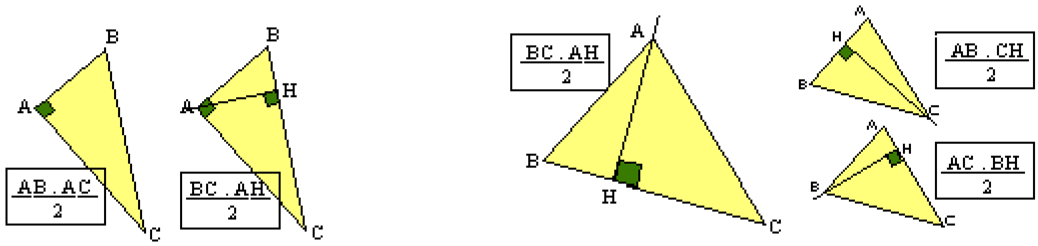
La formule est: **P=2.π.R** où π vaut environ 3,14 et **R** est la mesure d'un rayon.

2-Les Aires

Définitions:

Une aire mesure une surface.

L'unité de mesure des aires est le **mètre carré** (**m^2**).



Les triangles:

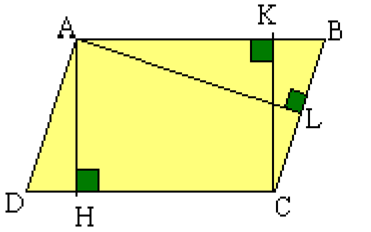
Quelconques:

Dans la formule le côté [BC] est considéré comme la base. La droite perpendiculaire à cette base et passant par le sommet opposé A est la hauteur relative à cette base.

Il y a trois côtés dans un triangle et donc trois bases possibles avec leur hauteur relative. D'où trois formules.

Triangle rectangle:

Nous pouvons bien sûr utiliser l'une des formules du triangle quelconque, à condition d'avoir les éléments nécessaires (longueurs de côté, de hauteur). Il est souvent plus facile d'utiliser le fait que le triangle rectangle est la moitié d'un rectangle. La formule utilise les longueurs des côtés de l'angle droit ..



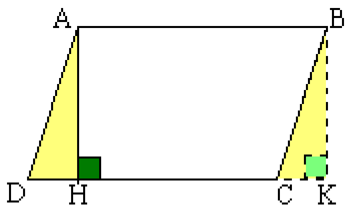
AB . AH ou AB . CK ou BC . AL

Remarque:

Les aires des triangles isocèles et équilatéraux se calculent comme pour les triangles quelconques. Certains triangles isocèles sont aussi rectangles...

Les quadrilatères:

Les parallélogrammes:



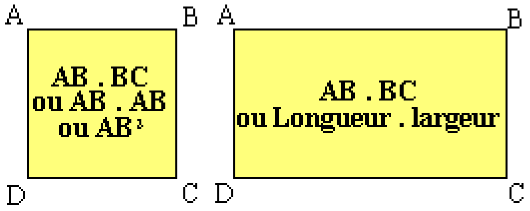
Il y a plusieurs façons de calculer l'aire d'un parallélogramme. Tout dépend des dimensions connues. Il est nécessaire de connaître la longueur d'un côté (pris comme base) et la hauteur qui lui est relative. Par exemple: si AB est connu il faut connaître la hauteur qui passe par A (comme [AH]) ou par B, par C ou par D ou encore par n'importe quel point du côté (DC) ou (AB). Toutes ces hauteurs sont égales.

La formule générale est: **Base x Hauteur**

Le calcul de l'aire d'un parallélogramme est déduit de celui de l'aire d'un rectangle.

Sur la figure ci-contre: les triangles AHD et BKC sont superposables de même aire. Calculer l'aire de ABCD revient à calculer l'aire du rectangle ABKH: AB*AH.

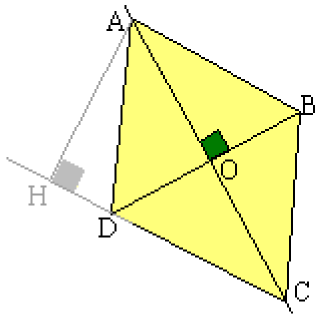
Cas particuliers: les rectangles.



Cas particulier: ***le losange.***

Si nous connaissons la longueur de ses diagonales, nous pouvons découper un losange en quatre triangles rectangles superposables (dans un losange, les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu).

Sur la figure ci-contre: l'aire du losange ABCD est égale à quatre fois l'aire de AOB. Soit:



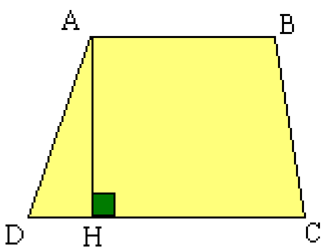
4x(OAxOB)/2 ou 2(OAxOB)

ou encore: ACxOB (car 2OA=AC).

Bien entendu, rien ne vous empêche d'utiliser la formule générale des parallélogrammes si vous en connaissez les éléments (une base et sa hauteur relative)

Les trapèzes :

Quelque soit le type de trapèze (quelconque, isocèle ou rectangle) la formule à utiliser est toujours la même.



$$\frac{(AB + CD).AH}{2}$$

[AB] et [DC] sont appelées petite base (**b**) et grande base (**B**).
[AH] est une hauteur (**h**). La formule est:

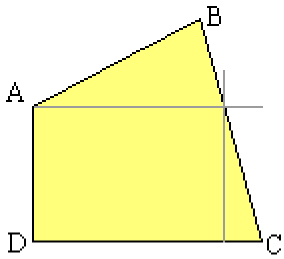
(B+b)xh/2

La distance entre les deux bases (hauteur du trapèze) n'est pas forcément toujours donnée par la mesure du seul [AH] comme pour toute distance entre deux droites parallèles.

Les quadrilatères quelconques :

Dans ce cas il est nécessaire de découper la surface en surfaces de base.

Sur l'exemple ci-contre



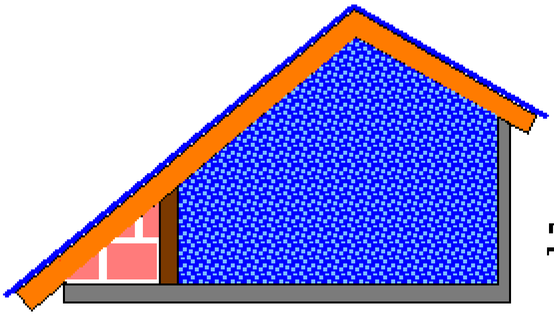
deux droites parallèles à deux côtés du quadrilatère (la première à être tracée est celle qui passe par A) permettent de partager le quadrilatère en un rectangle, un triangle rectangle et un triangle quelconque.

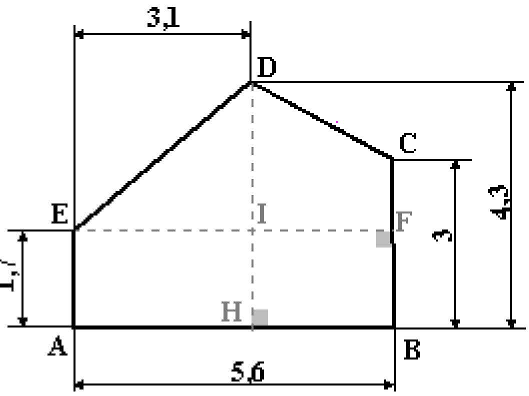
Une autre façon serait de tracer une droite parallèle à (AD) et passant par B.

Pour les calculs il est évidemment nécessaire de connaître certains éléments généralement donnés par le contexte du problème.

Les polygones:

Les polygones sont des figures planes ayant plus de deux côtés (les triangles et les quadrilatères sont des polygones). Nous donnons ici un exemple de polygone à 5 côtés. Pour en calculer l'aire il est nécessaire de partager sa surface en polygones dont nous connaissons une formule (tels que: triangles, quadrilatères).





Pour enduire d'un produit bleu le mur de cette mansarde il est d'abord nécessaire d'en connaître l'aire afin de calculer la quantité de produit à acheter. Nous avons les dimensions en mètres et nous savons que les angles en A et B sont droits.

Nous pouvons décomposer la surface de différentes manières (tracés en gris):

1° En un rectangle ABFE, un triangle rectangle EID et un trapèze rectangle CDIF.

2° En un rectangle EIHA, un trapèze rectangle BCDH et un triangle rectangle EID.

3° En deux rectangles EIHA et IFBH, un triangle rectangle EID et un trapèze rectangle CDIF.

4° En un trapèze rectangle AHDE, un rectangle BFIH et un trapèze rectangle CDIF.

5° En deux trapèzes rectangles AHDE et BCDH.

Avec les données du problème nous pouvons utiliser n'importe quelle manière, la plus simple étant préférable! Les dimensions manquantes sont calculées par soustraction. Par exemple pour calculer l'aire du triangle rectangle EID: EI=3,1m et ID=HD-HI soit ID=4,3-1,7=2,6m. Et aire EID=(IE*ID):2. Nous trouvons 4,03m^2.

En utilisant la cinquième manière nous trouvons:

Aire AHDE=(AE+HD)*AH/2 soit 9,3 m^2

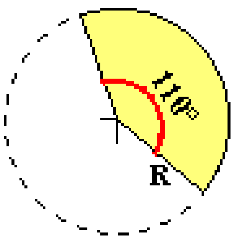
Aire BCDH=(CB+DH)*HB/2 soit 9,125 m^2

Aire du mur à enduire=9,3+9,125=**18,425 m^2**

Un conseil: si vous n'êtes pas à l'aise avec ces calculs d'aires, entraînez vous en effectuant les calculs avec les autres manières. Vous devez trouver exactement la même aire bien sûr.

Disques et secteurs:

L'aire d'un disque est donnée par la formule $\pi x R^2$ où π est souvent pris égal à 3,14 (pour plus de précision voir la touche correspondante de votre calculatrice) et R est la mesure du rayon du disque.



Aire du secteur (cm^2)	Mesure de l'angle (°)
πR^2	360
s	110°

Un secteur de disque est déterminé par un angle au centre (le sommet de l'angle est au centre du disque). Un demi-disque, un quart de disque sont des cas particuliers de secteurs de disque. Leur aire est respectivement **$\pi.R^2/2$** et **$\pi.R^2/4$**. Voici un exemple de calcul de l'aire d'un secteur de disque dont l'angle au centre mesure 110° et le rayon 3cm:

L'aire du secteur est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre. Pour le disque complet l'aire est π $*R^2$ et correspond à un angle au centre de 360°. Si s est l'aire du secteur correspondant à l'angle au centre de mesure 110° alors les produits en croix permettent d'écrire:

$$\pi * R^2 * 110 = 360 * s$$
$$\text{et } s = (\pi * R^2 * 110)/360$$

Si le rayon R mesure 3cm alors s=8,64cm^2 environ (à 1/100 de cm^2 près ou 1mm^2 près).
Si au lieu de 110° nous avons un angle de mesure quelconque **a** alors la formule de l'aire du secteur circulaire d'angle au centre **a** et de rayon **R** est:

(π .R2.a)/360.

Aires latérales :

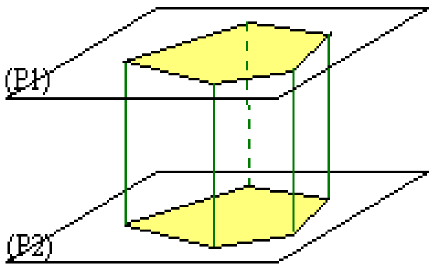
Définition:

L'aire latérale d'un solide est la somme des aires des faces qui ne sont pas les bases.

L'aire totale des faces d'un solide est la somme de l'aire latérale et des aires des bases. Si il n'y a pas de base (cas de la sphère) l'aire latérale est l'aire totale.

3-Volumes :

L'unité de mesure d'un volume est **le mètre cube** (**m^3**)

Les prismes 

droits:

Définitions: Un prisme droit est un solide qui possède deux bases parallèles (contenues dans deux plans parallèles sur la figure ci-dessous) et dont les faces latérales sont des rectangles.

Le prisme est droit lorsque ses arêtes latérales (en vert sur le dessin) sont perpendiculaires aux deux bases.

La hauteur d'un prisme est la distance entre les deux plans de base. Pour un prisme droit la hauteur est égale à la longueur d'une arête latérale.

Exemples:

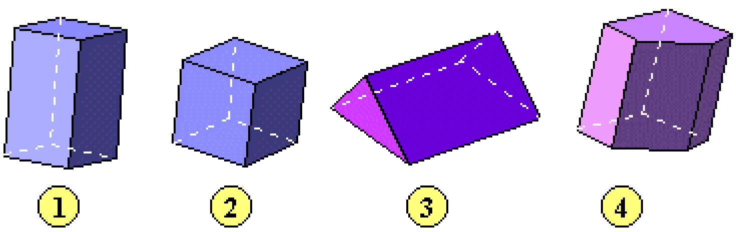


Fig 1: le parallélépipède rectangle (ou pavé droit)

Fig 2: le cube

Fig 3: prisme droit à base triangulaire.

Fig 4: prisme droit à base quelconque.

Calcul de l'aire latérale:

Il suffit d'ajouter toutes les aires des faces latérales. Ces aires se calculent à l'aide de la formule de l'aire du rectangle.

Pour le cube il s'agit d'aires de carrés.

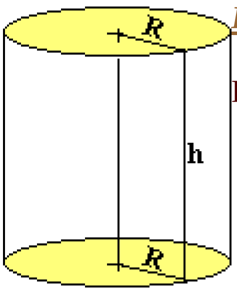
Pour le pavé droit, les faces latérales sont de même aire deux à deux.

Calcul du volume :

Quelque soit le prisme son volume se calcule avec la formule: **V=B.h** où **B** est l'aire de la base (qui est calculée à l'aire des formules sur les polygones comme le triangle, le rectangle,..), **h** est la hauteur du prisme.

Pour le cube, la formule devient: **V=c**^{3} où **c** est la longueur d'une arête.

Pour le pavé droit, la formule s'écrit: **V=L.l.h** où **L** est la longueur, **l** est la largeur et **h** est la hauteur du pavé droit.



***Le cylindre droit*:**

Les bases sont des disques de même rayon **R**.

La face latérale se "déroule" en formant un rectangle dont la largeur est la hauteur **h** du cylindre et la longueur le périmètre de l'un des disques **2.π.R**. L'aire de cette face latérale est donc:

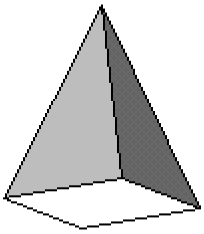
$$A=2\pi .R.h$$

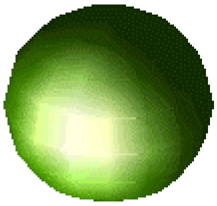
d'après la formule utilisée pour l'aire d'un rectangle.

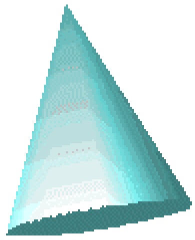
Le volume se calcule avec la formule: $V=\pi.R^2.h$

Remarque: $\pi.R^2$ est l'aire de la base, donc la formule du volume d'un cylindre peut s'écrire comme la formule du volume d'un prisme: V=B.h

D'autres solides:







Les pyramides: les faces latérales sont des triangles. L'aire latérale se calcule en ajoutant les aires de ces triangles.

Le volume d'une pyramide est calculé avec:

$$V=1/3.B.h$$

où **B** est l'aire de la base (triangle, rectangle,..) et **h** la hauteur de la pyramide.

Les sphères: l'aire de la sphère est donnée par la formule:

$$4x\ \pi\ xR^2$$

où R est le rayon de la sphère.

Pour le volume d'une boule, utilisez:

$$V=4/3.\pi.R^3$$

Les cônes: l'aire latérale d'un cône est donnée par la formule:

$$\pi \text{ x } R \text{ x } h$$

ou R est le rayon du disque de base et h la longueur d'une génératrice.

La formule, pour le volume d'un cône est la même que la formule pour le volume d'une pyramide, bien que le calcul de l'aire de la base soit totalement différent:

$$V=1/3.B.h$$

où **B** est l'aire de la base (toujours un disque) et **h** la hauteur du cône.

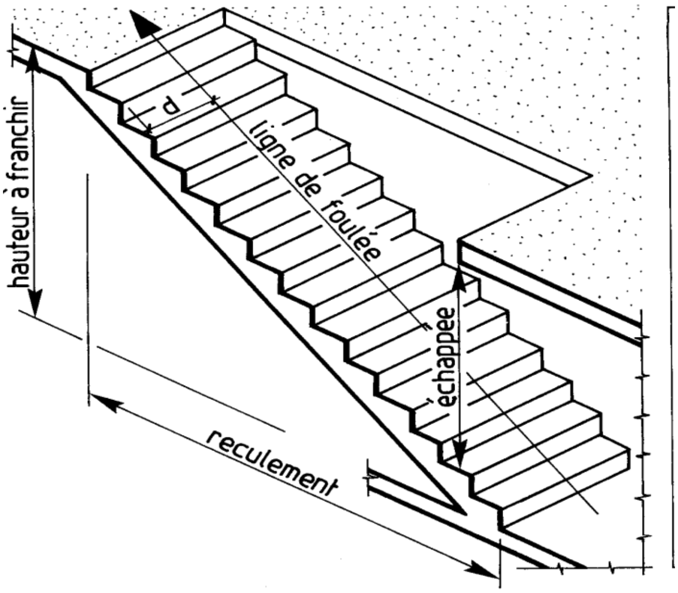
E/ Balancement des escaliers

1-Terminologie des différentes parties:

La marches: masse de béton formant le découpement supérieur de l'escalier et qui permet de franchir les différents niveaux.
La contre marche: partie verticale de la marche. (dans un escalier rapide, cette partie peut être inclinée pour faciliter le dégagement du pied).
La paillasse: épaisseur de béton comprise entre l'angle rentrant de la marche et la sous face de l'escalier.
Le limon: ossature qui supporte les charges de l'escalier et les transmet aux points d'appui. (assise de départ).
La cage: c'est l'emplacement où se développe l'escalier, en hauteur, largeur, longueur.
Les paliers: ce sont des planchers placés de distance en distance pour limiter le parcours d'un escalier; on distingue deux sortes de paliers:

- palier principaux: correspondant aux différents étages.
- palier de repos: se situe entre deux étages

La volée: partie comprise entre deux paliers.
Enmarchement:c'est la longueur de la marche comprise entre le mur et le limon où entre deux limons.
Hauteur: la différence de niveau de deux marches consécutives.
La ligne de foulée: c'est une ligne imaginaire qui se trouve à une distance constante du jour de l'escalier et qu'il est nécessaire de tracer pour éffectuer l'épure des escaliers balancés. Elle correspond à la trajectoire suivie par une personne se déplaçant dans l'escalier en se maintenant à une distance normale de la rampe soit 0,50 m.
Le giron: c'est la largeur de la marche mesurée sur la ligne de foulée, cette largeur est identique pour toutes les marches.
Le collet: c' est la plus faible largeur d'une marche dans l'escalier balancé.
Le jour: c'est le vide à l'intérieur de la cage entre les extrémités des marches, il peut être limité par le limon.
L échappée: c'est la hauteur libre au dessus d'une marche, cette hauteur étant prise à l'arête de la marche, l'échappée ne doit jamais être inférieure a 1,90m.



RECULEMENT :

Longueur de la volée d'escalier projetée sur le sol.

HAUTEUR A FRANCHIR **:**

Hauteur franchie par l'escalier.

Elle est égale à la hauteur sous plafond + l'épaisseur du plancher.

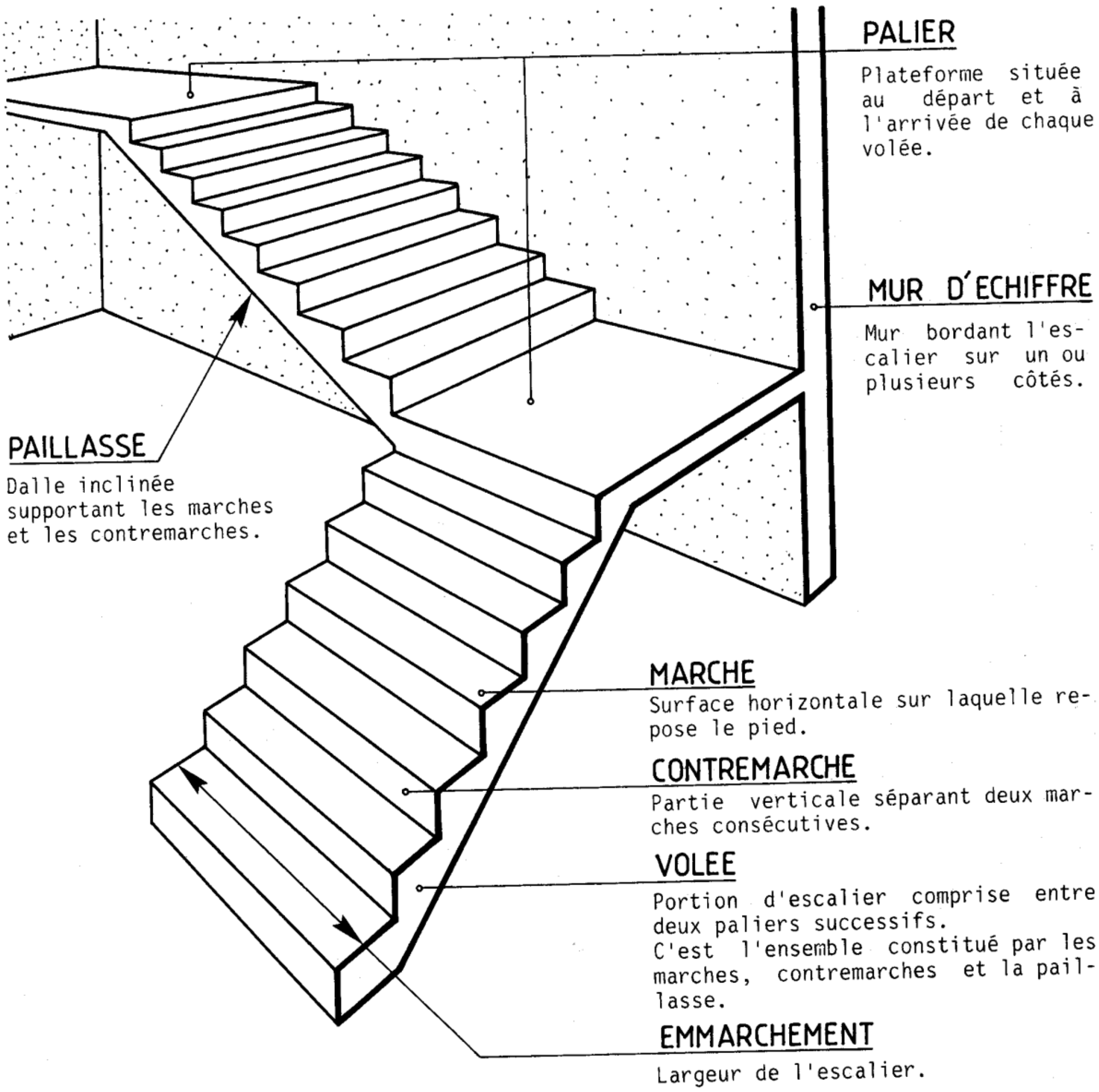
ECHAPPEE :

Hauteur minimum de passage /2,00 m

LIGNE DE FOULLE :

C'est le trajet théorique emprunté par l'utilisateur.

- ❖ Pour emmarchements < 1.00 m :
  d = moitié de l'emmarchement.
- ❖ Pour emmarchements /1.00 m :
  d = 50 cm (mesuré à partir de la rampe d'escalier).



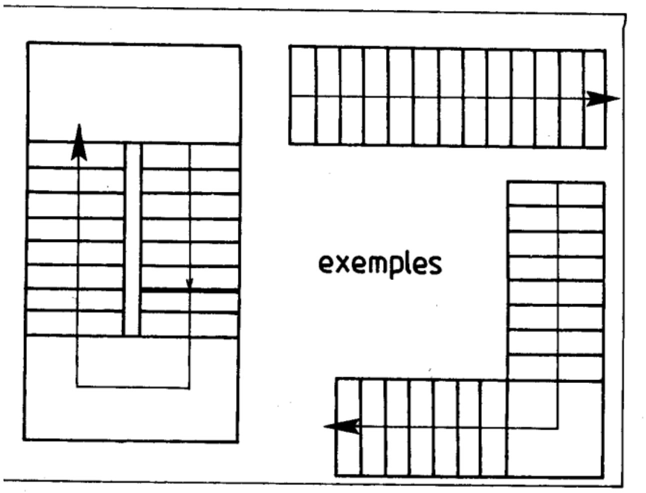
2-Tracé escalier droit:

La hauteur à donner aux marches, varie de 0,16 a 0,18m suivant que l'on veut obtenir un escalier plus ou moins doux.

- "H" est la hauteur de plancher à plancher. (les hauteurs normalisées des étages sont des multiples du module 100mm ou au moins de ses sous multiples 50 ou 25 mm).
- "h" la hauteur de la marche choisie." H : h = n" nombre de marches.

Il est nécessaire d'obtenir pour "n" un nombre entier, cela oblige parfois à modifier "h" en appliquant la formule: "h = H : n" .
Un escalier commode et normalement conçu, satisfait à la relation: "g + 2h = 0,64m".

- "g" étant le giron et "h" la hauteur de la marche. Souvent l'on oublie cette relation.



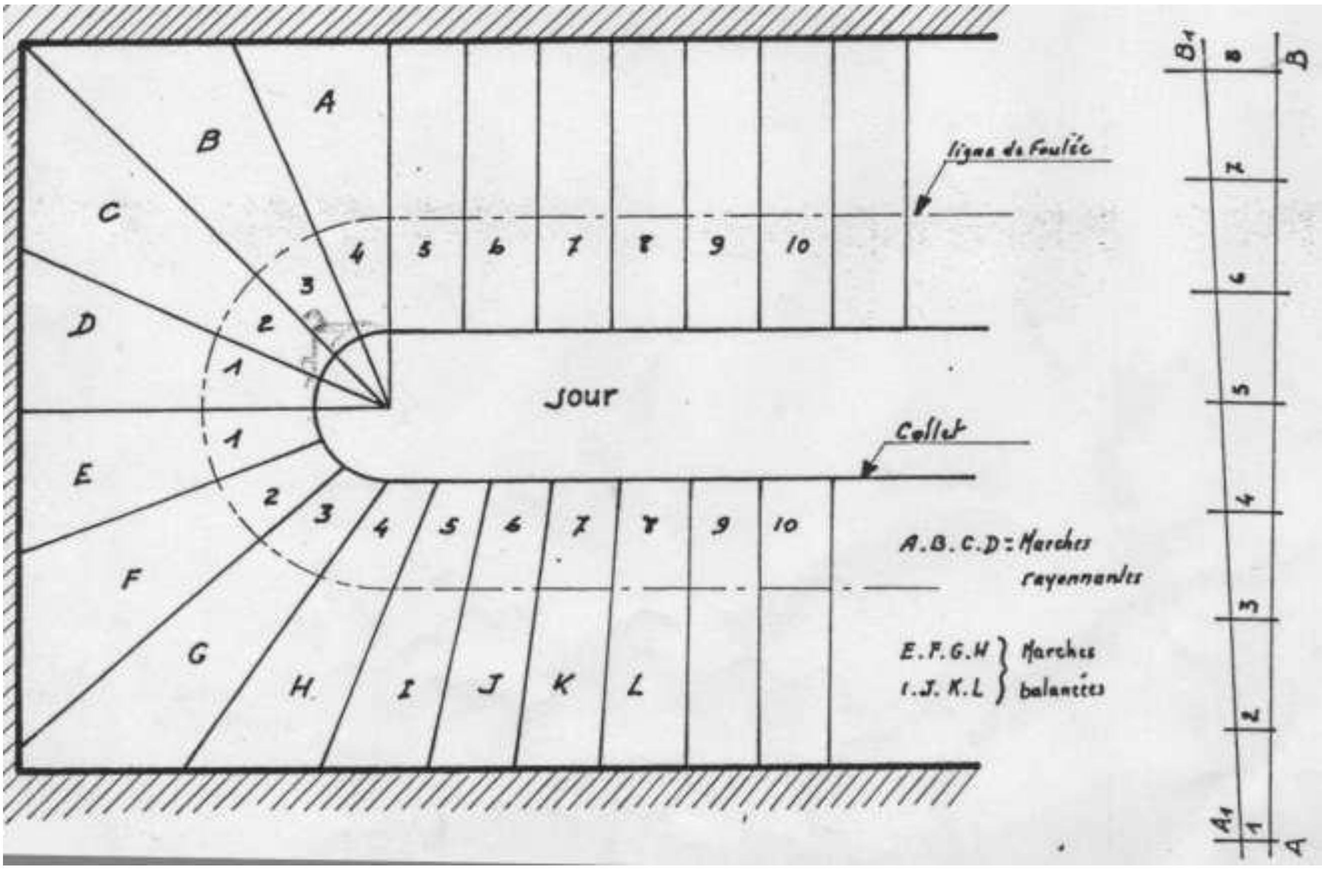
3-1er tracé escalier balancé: (voir dessin ci-dessous).
Plusieurs tracés permettent de déterminer le balancement des marches. Nous n'indiquerons ici que deux tracés choisis comme étant les plus simples et les plus faciles à exécuter.

- Indiquez en plan la ligne de collet et la ligne de foulée, marquez sur celle- ci des divisions égales au giron.
- Tracez les arêtes droites et rayonnantes.

On constate que les marches droites ont au collet une largeur égale au giron, alors que les rayonnantes ont un collet très étroit. Le but du balancement est d'atténuer cette différence en passant progressivement de la largeur réduite à la largeur normale.
Si d'un coté de l'axe, on a 4 marches rayonnantes, on prend 8 marches sur lesquelles on fera porter le balancement.
La largeur au collet varie en progression arithmétique.
Les différentes largeurs au collet peuvent être déterminées ainsi:

- Tracez un segment de droite "AB" de longueur quelconque et le partager en 7 parties égales.
- Elevez de "A" une perpendiculaire de longueur égale au collet des marches rayonnantes, de "B" une perpendiculaire égale au giron.
- Joindre "A1, B1".

Les perpendiculaires élevées des différents points, nous donnent les collets successifs des marches balancées.



4- 2eme tracé escalier balancé: (voir dessin ci- dessous).
Soit à tracer l'épure d'un escalier, d'emmarchement de 1,00m et de giron 0,32m.

- Tracez la cage d'escalier et la ligne de foulée.
- De l'arrivée porter le pas 0,32 afin d'obtenir les points," 19, 18, 17".
- Tracez la diagonale" BD" du quartier tournant, l'intersection avec la ligne de foulée nous donne le point" M".

Le balancement peut porter sur 12 marches, 6 de part et d'autre de "BD".
Le tracé est fait à l'aide de construction appelés herses de balancement.

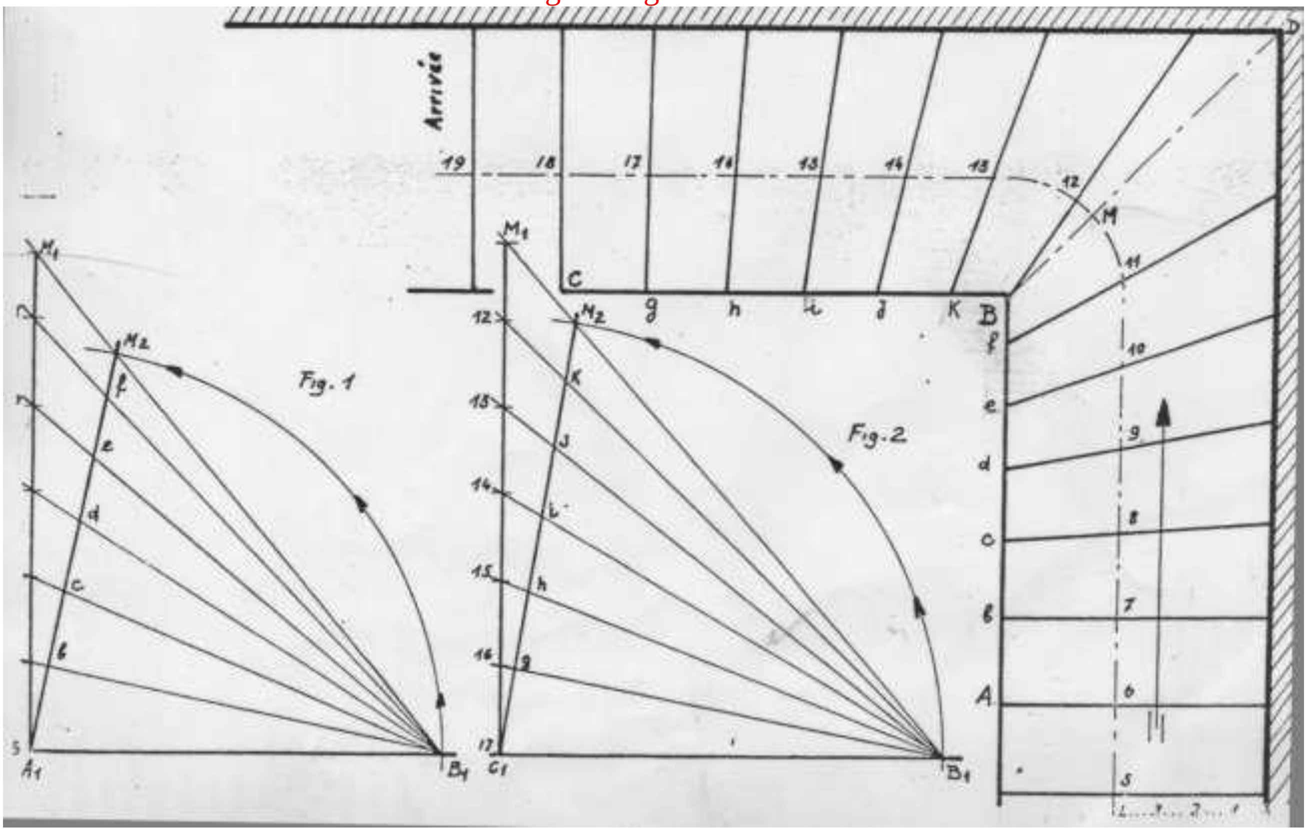
- 1) Balancement de la marche 6 au point "M".(fig 1).

Tracez 2 lignes perpendiculaires. Sur l'horizontale portez la longueur "A1, B1" égale a "AB". Sur la verticale la longueur "A1, M1" égale à la ligne de foulée "6M". Sur "A1, M1" on porte 5 fois le pas on obtient les points "7, 8, 9, 10 et 11". Joindre ensuite ces divers points au point "B1".
De "A1" comme centre, rabattre "B1" en "M2" et tracer "AM2". On a ainsi les points "b, c, d, e, f". Les portions de droite "Ab, bc, cd, de, ef, fM2", nous donnent les largeurs au collet, il ne reste plus qu'à les porter sur le dessin et les joindre aux points "7, 8, 9, 10, 11".

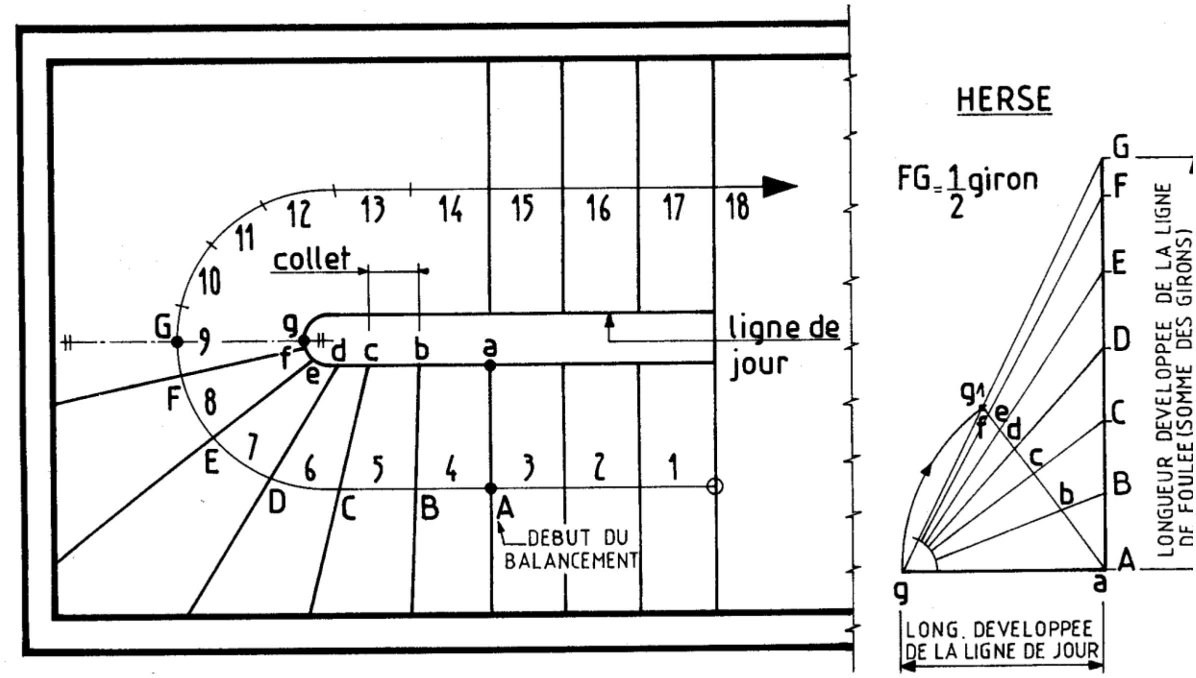
- 2) Balancement de la marche 16 au point "M".(fig 2).

Tracez 2 perpendiculaires, sur l'horizontale portez "C1 et B1 (la dimension est égale à CB)", sur la verticale "C1 et M1 (la dimension est égale à 17M)". Sur "C1, M1", portez 5 fois le pas pour obtenir les points "16, 15, 14, 13 et 12". Joindre ces points à "B1".
De "C1" comme centre rabattre "B1" en "M2" . Les portions de droite "C1g, gh, hi, ij, jk" nous donnent les largeurs au collet.
Les porter sur le dessin et les joindre aux points "16, 15, 14, 13 et 12".

fig 1 et fig 2.



TRACE D'UN ESCALIER PAR LA METHODE DE LA HERSE :



<u>Marche à suivre :</u>

- Calculer G, H et le nombre de marches.
- Représenter la cage d'escalier et la ligne de jour.
- Tracer la ligne de foulée et reporter les girons sur celle-ci
- Tracer les marches droites, les autres seront balancées (habituellement, on « balance » 5 à 6 marches avant et après chaque changement de direction.

<u>TRACE DE LA HERSE :</u>

- Porter sur un segment horizontal la longueur « ag » de la ligne de jour dans la zone où les marches sont à balancer (pour une moitié de l'escalier).
- Porter sur un segment vertical les girons des marches à balancer : AB, BC, CD,…
- Joindre les points A, B, C,…. Au point g
- Tracer un arc de cercle (de rayon « ag » et de centre A) pour obtenir le pt « gl »
- Joindre les points « gl » et A pour obtenir les largeurs des collets(ab, bc,…)
- Sur le plan, reporter au compas, ces largeurs à partir de « a » et tracer les marches.

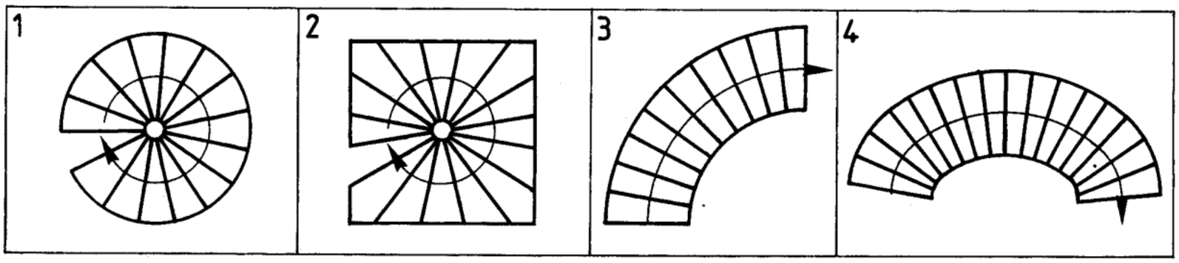
Autres types d »escaliers :

1- ESCALIERS HELICOIDAUX OU A VIS :

Les marches sont fixées sur un noyau central (ou fût) et se développent en spirale.
Exemple : escalier à cage circulaire (figure 1), à cage carrée (figure 2).
Voir escalier préfabriqué page suivante.

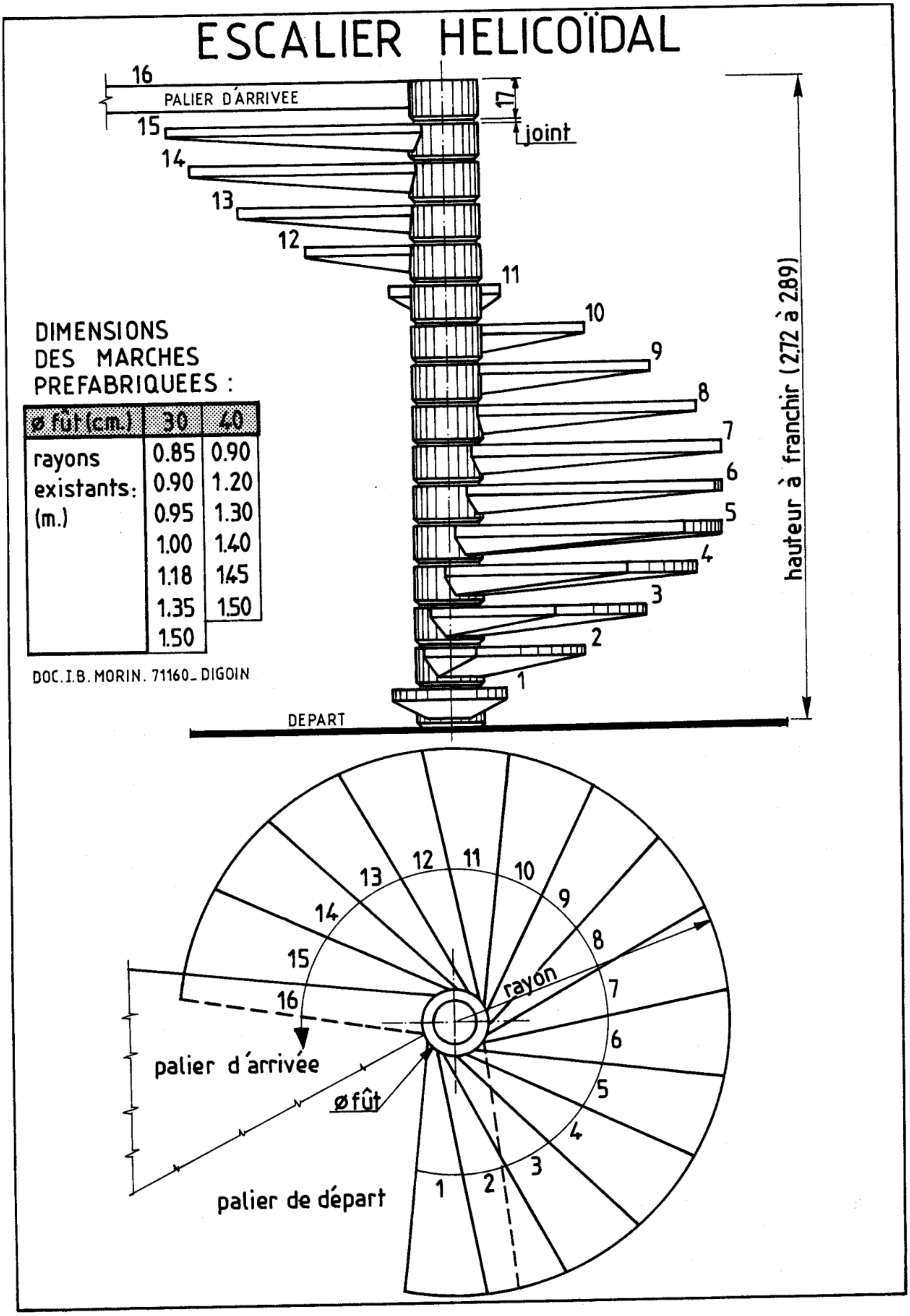
2- ESCALIERS INCURVES :

exemples : escalier incurvé suivant un arc de cercle (figure 3), suivant une anse de panier (figure 4).



1
2
3
4

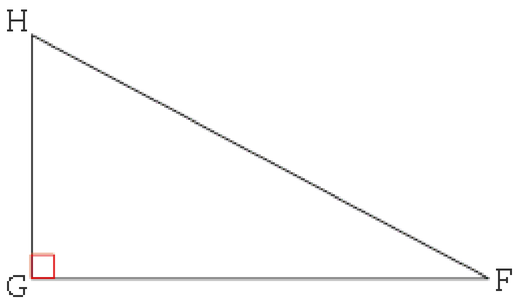
ESCALIER HELICOÏDAL



ø fût (cm.)	30	40
rayons existants: (m.)	0.85	0.90
	0.90	1.20
	0.95	1.30
	1.00	1.40
	1.18	1.45
	1.35	1.50
	1.50	

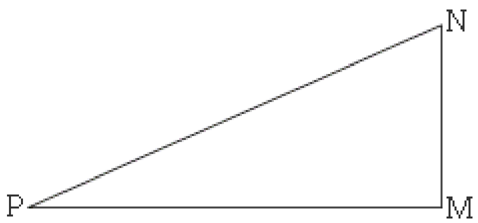
Evaluation de fin de module

***Énoncé* 1**: FGH est un triangle rectangle en G. L'unité de longueur étant le centimètre, on a GH = 8 et GF = 15. On veut calculer FH.



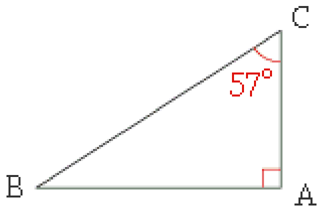
***Énoncé* 2:** soit PHR un triangle rectangle en P tel que HP = PR = 1 cm. Ce triangle étant isocèle et rectangle, on sait que $\hat{H} = \hat{R}$ = 45°. On veut calculer les valeurs exactes du sinus, du cosinus et de la tangente de ces angles de 45°.

***Énoncé3* :** soit un triangle MNP. L'unité de longueur étant le mètre, MN = 152, NP = 377 et MP = 345. Ce triangle est-il rectangle ?



Énoncé4 : En quoi consiste la propriété de Pythagore , expliquer par un exemple

***Énoncé5* :** on veut calculer l'angle $\hat{E}$du triangle ABC rectangle en A représenté sur la figure 3.



Énoncé 6

OBSERVER LE PLAN CI-CONTRE.
IL REPRESENTE L'EMPRISE D'UN
ESCALIER A UN QUARTIER TOURNANT.

- DONNEES :
  Hauteur à monter = 2.80 m
  Nombre de contremarches = 17
  Giron = 28 cm (mesuré sur la ligne de foulée).
  6 marches droites au départ.
  1 marche droite à l'arrivée.

  REPRESENTER, SUR FORMAT A4 VERTICAL, A L'ECHELLE 1 :25, L'ESCALIER CI-CONTRE.
  EMPLOYER LA METHODE DE LA HERSE POUR LE TRACE DES MARCHES BALANCEES.