

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>ii</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Quelques notions de probabilités utiles . . . . .	1
1.1.1 Processus stochastiques - définitions et généralités . . . . .	1
1.1.2 Filtration et martingale . . . . .	2
1.1.3 Mouvement Brownien . . . . .	5
1.1.4 Intégrales stochastiques. . . . .	7
1.1.5 processus de diffusion . . . . .	9
1.2 Définition relative à la finance . . . . .	11
<b>2 Introduction à la notion d'arbitrage et viabilité dans les marchés des valeurs mobilières</b>	<b>12</b>
2.1 L'aspect du marché et les préférences des agents . . . . .	13
2.2 Viabilité et Arbitrage . . . . .	15
<b>3 Martingales et modèles des marchés des valeurs mobilières</b>	<b>20</b>
3.1 Généralité sur les stratégies financières . . . . .	21
3.2 Cas fini : Modèle de Markov . . . . .	28
3.3 Cas continu : Modèle de diffusion . . . . .	30
<b>Conclusion</b>	<b>37</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>

# Introduction

La probabilité est tout ce que Nietzsche avançait dans son récit : « *Mathématiques — Nous voulons autant que cela est possible, introduire dans toutes les sciences la finesse et la rigueur des mathématiques* »<sup>1</sup> . Les outils probabilistes tels, martingale et calcul stochastique contribuent au développement des sciences économiques et tous ceux qui y sont afférents. De ce fait nous allons évoquer le long de ce document l’usage de ces outils probabilistes dans la théorie de l’arbitrage et les issues de cette dernière dans l’évaluation des prix des valeurs mobilières[17] dans les marchés financiers. Une théorie initiée par Black and Scholes [5].

Ainsi, ce mémoire a pour objectif d’évaluer les actifs conditionnels en usant du principe d’arbitrage tout en se basant du fait que le prix de ces actifs ont le comportement des processus stochastiques aussi bien en temps discret qu’en temps continu. Les idées sont alors fixées dans la mise en œuvre de ce devoir en se basant sur l’article de J. MICHAEL HARRISON and DAVID M. KREPS : « *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets* » tout en considérant le fait qu’il n’y aura pas d’opportunité d’arbitrage.

De ce fait, si dans un premier temps, nous évoquerons des rappels et compléments sur les calculs stochastiques et le processus de diffusion, ainsi que certaines définitions relatives à la finance.

Alors, dans le second chapitre, nous étudierons l’aspect des marchés et la modélisation des préférences des agents tout en évoquant aussi les notions sur la viabilité et l’arbitrage.

Enfin, dans le chapitre trois nous étudierons les différents modèles des marchés des valeurs mobilières en distinguant le cas discret où on a le modèle de Markov et le cas continu et le processus de diffusion.

---

1. Nietzsche. Le gai savoir P 246

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre nous allons donner quelques définitions de bases relatives à la notion de probabilité et du processus de diffusion qui sont nécessaires pour mener à bien notre travail. Rappelons d'abord que le triplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  désigne l'espace de probabilité où  $\Omega$  est un ensemble non vide qui constitue l'espace des épreuves,  $\mathcal{F}$  tribus des parties de  $\Omega$  qui désigne les évènements et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $\mathcal{F}$ .

### 1.1 Quelques notions de probabilités utiles<sup>[21, 14]</sup>

#### 1.1.1 Processus stochastiques - définitions et généralités.

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité.

**Définition 1.1 (Processus stochastique)** *[21] Soient  $\mathbb{T}$  un ensemble non vide,  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Un processus stochastique indexé par  $\mathbb{T}$  à valeur dans  $(E, \mathcal{E})$  est une famille de fonction mesurable  $X_t, t \in \mathbb{T}$  de l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vers  $(E, \mathcal{E})$ .  $(E, \mathcal{E})$  est appelée espace d'état et  $\mathbb{T}$  l'espace de temps.*

**Définition 1.2 (Trajectoire d'un processus)** *Pour  $\omega \in \Omega$  fixé, la trajectoire d'un processus  $X$  est l'application :  $t \mapsto X_t(\omega)$ .*

- Dans le cas où  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$  alors  $X$  est un processus stochastique à temps discret ou suite aléatoire.

- Si on a  $\mathbb{T} = [0, T]$  ou  $\mathbb{R}^+$  alors on a un processus stochastique à temps continu ou fonction aléatoire.
- Lorsque  $\mathbb{T} = \mathbb{N}^d$  ou  $\mathbb{R}^d$  alors  $X$  est un champ aléatoire.
- Un processus  $X$  est un processus aléatoire réel si  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 1.3 (Processus équivalent)** Deux processus  $X$  et  $X'$  définis respectivement sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$  à valeurs dans un même espace d'état  $(\Omega, \mathcal{E})$  sont équivalents si pour une suite finie de temps  $t_1, \dots, t_n$  et des  $A_i \in \mathcal{E}$  alors

$$\mathbb{P}[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n] = \mathbb{P}'[X'_{t_1} \in A_1, \dots, X'_{t_n} \in A_n]$$

**Définition 1.4 (Processus indistinguables)** Deux processus  $X$  et  $X'$  définis sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans un même espace d'état  $(\Omega, \mathcal{E})$  sont indistinguables si :

$$\text{pour tout } t, X_t(\omega) = X'_t(\omega) \quad p.s$$

### 1.1.2 Filtration et martingale [14, 22]

On a souvent besoin de considérer les événements relatifs à l'histoire du processus ou de calculer des quantités jusqu'à un certain temps. Pour cela, il est nécessaire de définir ce qu'on appelle filtration. Ainsi la filtration n'est autre que cette information relative au comportement du processus. On considère l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Définition 1.5 (Filtration)** [14] Une filtration sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$  est une famille croissante  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de sous tribus de  $\mathcal{F}$ . Autrement dit, pour chaque  $t$  nous avons un sous tribus  $\mathcal{F}_t$  tel que  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  si  $s < t$ .

**Définition 1.6 (Filtration naturelle)** Une filtration naturelle est la famille :

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t).$$

Celle-ci représente alors toute l'information que l'on peut en tirer du processus jusqu'à l'instant  $t$ .

- La tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information contenu dans le processus  $X$  entre 0 et  $t$ .
- Avec la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  on peut définir le quadruplet  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  comme espace de probabilité filtré.

Ainsi, la filtration est donc cette collection d'évènement qui peut se produire avant ou à l'instant  $t$ . Autrement dit, la filtration constitue ainsi l'historique d'un processus jusqu'à l'instant  $T$ .

**Définition 1.7 (Processus adapté)** *Un processus  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  si pour chaque  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.*

**Définition 1.8 (Processus prévisible)**  *$X$  est un processus prévisible s'il est adapté à  $\mathcal{F}$  et ses trajectoires sont continus à gauche.*

**Définition 1.9 (Temps d'arrêt)** *Une variable aléatoire  $T : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  est un temps d'arrêt si l'évènement  $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ , pour tout  $t$ .*

**Définition 1.10 (Martingale)** *Un processus  $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale si pour tout  $t \in T$  :*

- (i)  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable
- (ii)  $\mathbb{E}|X_t| < \infty$
- (iii)  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ , pour tout  $s < t$

Une **sur-martingale** et une **sous-martingale** sont des processus qui vérifient (i) et (ii) et pour tout  $s \leq t$  respectivement  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$  et  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ .

**Proposition 1.1** *Soit un processus  $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$  qui est  $\mathcal{F}_t$ -martingale, alors on a :*

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$$

**Preuve :** Pour tout  $t \in \mathbb{T}$  on a :  $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[X_0]$ .

■

**Proposition 1.2** Soit  $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$  un processus  $\mathcal{F}_t$ -martingale tel que  $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$  alors pour tout  $s \leq t$  on a :

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s]$$

**Preuve :** on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t^2 | \mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[X_t X_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[X_t^2 | \mathcal{F}_s] - 2X_s \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] + X_s^2 \\ &= \mathbb{E}[X_t^2 | \mathcal{F}_s] - X_s^2 \\ &= \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

■

**Définition 1.11 (Martingale locale)** Un processus  $(X_t)$  est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt  $T_n$  tendant vers l'infini p.s tel que  $(X^T) = (X_{t \wedge T_n})$  soit une martingale.

Posons  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{R}_+$ . Une famille  $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$  de sous-tribu de  $\mathcal{A}$  est une *filtration* si pour tout  $s < t$ ,  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ . Rappelons qu'une fonction numérique, continue à droite définie sur  $[0, \infty[$  est à *variation finie* si pour tout  $t > 0$ , on a :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{t_i \in \Delta_n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| \mid \Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t\} \text{ subdivision de } [0, t] \right\} < \infty$$

**Définition 1.12 (Semi-martingale)** Une semi-martingale  $X$  est un processus continu qui peut être écrit sous la forme  $X = A + M$ , où  $M$  est une martingale locale et  $A$  est un processus à variation finie.

### 1.1.3 Mouvement Brownien [22]

**Définition 1.13 (Mouvement brownien)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Pour chaque  $\omega \in \Omega$ , supposons qu'on a une fonction de  $\omega$ , continue et qui est notée  $W_t$  pour  $t \geq 0$  tel que  $W_0 = 0$ . Alors  $W_t, t \geq 0$ , est un **mouvement brownien** si pour tout  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  les variables aléatoires  $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  sont indépendantes et suivent une distribution normale avec :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] &= 0 \\ \text{Var}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] &= t_{i+1} - t_i\end{aligned}$$

Comme  $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  sont indépendantes et suivent une distribution normale alors les variables aléatoires  $W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n}$  les sont aussi. Pour chaque  $W_{t_i}$

$$\mathbb{E}[W_{t_i}] = 0$$

Ainsi pour  $s$  tel que  $0 \leq s < t$ , la covariance de  $W_s$  et de  $W_t$  est :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t W_s] &= \mathbb{E}[W_s(W_t - W_s) + W_s^2] \\ &= \mathbb{E}[W_s]\mathbb{E}[W_t - W_s] + \mathbb{E}[W_s^2] \\ &= 0 + \text{Var}[W_s] = s.\end{aligned}$$

En outre, la covariance de  $W_s$  et de  $W_t$  est :

$$\mathbb{E}[W_t W_s] = \inf(s, t).$$

**Proposition 1.3** Soit  $W_t$  un mouvement brownien, alors  $W_t$  est un martingale.

**Preuve :** Pour cela nous allons montrer que  $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s$ . Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(W_t - W_s) + W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s) | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s \\ &= W_s.\end{aligned}$$

■



**Définition 1.14 (Processus de Markov)** *Un processus de Markov est un processus aléatoire  $M_t$  tel que pour tout  $t, u \geq 0$  et  $A \in \mathcal{A}$ , on a :*

$$\mathbb{P}(M_{t+u} \in A | M_s, s \leq t) = \mathbb{P}(M_{t+u} | M_t)$$

### 1.1.4 Intégrales stochastiques.

On sait dans le domaine de la finance que les processus qui permettent la modélisation des prix des valeurs mobilières sont normalement des fonctions d'un ou plusieurs mouvements browniens. Mais, si  $X_t$  est un mouvement brownien, pour chaque  $\omega \in \Omega$ , la trajectoire de  $X_t$  n'est pas toujours différentiable par rapport au temps  $t$ . Ainsi l'intégral suivante ne peut être définie :

$$\int_0^t f(s) dX_s$$

. Le calcul qui nous permet de définir ce type d'intégral tout en considérant les mouvements browniens est « *l'intégrale stochastique.* »

**Définition 1.15 (Processus simple)** *Un processus  $(h_t)_{0 \leq t \leq T}$  qui peut s'écrire sous la forme :*

$$h_t(\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(\omega) 1_{]t_{i-1}, t_i]}(t)$$

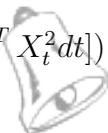
*est appelé processus simple, où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  et  $h_i$  sont des variables aléatoires  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurables.*

**Définition 1.16 (Intégrale d'Itô d'un processus simple)** *Soit  $h_t$  un processus simple et  $B_t$  un mouvement brownien. L'intégrale d'Itô de  $h$  est définie par :*

$$\int_0^t h_s dB_s = \sum_{i=1}^n h_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

*On suppose ici que chaque  $h_i \in L^2(\mathcal{F}_{t_i})$*

Notons  $\mathcal{M}_T^2 = \{X \text{ } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} | \mathbb{E}[\int_0^T X_t^2 dt] < \infty\}$ . L'ensemble  $\mathcal{E}$  des processus simples de  $\mathcal{M}_T^2$  est dense dans  $\mathcal{M}_T^2$  pour la norme :  $\|X\|_{\mathcal{M}_T^2} = (\mathbb{E}[\int_0^T X_t^2 dt])^{\frac{1}{2}}$  et l'application



$\phi \in \mathcal{E} \mapsto \mathcal{M}_T^2$  est continue . Donc on peut prolonger cette définition dans  $\mathcal{M}_T^2$  de la manière suivante :

**Définition 1.17** Soit  $X \in \mathcal{M}_T^2$ , l'intégrale d'Itô de  $X$  est définie par :

$$\int_0^T X_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T h_t^n dB_t$$

où  $(h^n)$  est une suite de processus simple tendant vers  $X$  dans  $\mathcal{M}_T^2$ .

**Définition 1.18 (processus d'Itô)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien. Un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus d'Itô s'il est solution de l'équation :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

où

- (i)  $X_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable
- (ii)  $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  sont des processus  $\mathcal{F}_t$ -adaptés.
- (iii)  $\int_0^T |K_s| ds$  et  $\int_0^T |H_s|^2 dB_s$  sont p.s finies.

Cette équation peut aussi être écrite sous une forme différentielle :

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t$$

**Proposition 1.4** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, T]$ , alors le processus :

$$M_t = \exp \left[ \int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (f(s))^2 ds \right] \text{ est une martingale continue.}$$

On rappelle qu'un processus  $X_t, t \in [0, T]$  est dit *progressivement mesurable* si pour tout  $t \in [0, T]$ , la fonction  $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega)$  est  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -mesurable.

**Proposition 1.5** Soient  $\phi, \psi$  deux processus progressivement mesurables de carrés intégrables. Si  $M_t = \int_0^t \phi(s)dB_s$  et  $N_t = \int_0^t \psi(s)dB_s$ , on a :

$$[M, N]_t = \int_0^t \phi(s)\psi(s)ds$$

**Théorème 1.1** Soit  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus Itô et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)d\langle X, X \rangle_s$$

avec

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f'(X_s)dX_s = \int_0^t f'(X_s)K_s ds + \int_0^t f'(X_s)H_s dW_s$$

De façon analogue on a :

Si  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  deux fois différentiable en  $x$  et différentiable en  $t$ , de plus les dérivées partielles sont continues en  $(t, x)$  alors la formule d'Itô devient :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s)ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s)d\langle X, X \rangle_s$$

### 1.1.5 processus de diffusion [19]

Soit l'équation intégrale stochastique :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s + \int_0^t b(X_s, s)ds \quad (1.1)$$

où  $t \in [0, T]$  et  $\sigma, b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

(i) il existe une constante  $L > 0$  tel que : pour tout  $x, y, t$ ,

$$|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| \leq L|x - y|$$

et

$$|\sigma(x, t)|^2 + |b(x, t)|^2 \leq L(1 + |x|^2)$$

(ii)  $\sigma$  et  $b$  sont continues.

Alors :

I : L'équation (1.1) admet une solution unique p.s  $X_t$ .

II :  $X_t$  vérifie :

(i)  $X_t$  est un processus de Markov,

(ii) la dérive  $b(x, t) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \mathbb{E}[X_{t+\delta} - X_t | X_t = x]$

(iii) la diffusion  $\sigma^2(x, t) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \mathbb{E}[(X_{t+\delta} - X_t)^2 | X_t = x]$

pour tout  $x, t \in \mathbb{R}$ .

III :  $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ .

Un tel processus est appelé *processus de diffusion*.

**Proposition 1.6 (Théorème de Girsanov [21])** Soit  $X_t$  un processus réel vérifiant :

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t$$

pour  $t \in [0, T]$ ,  $a, b$  sont des processus  $\mathcal{F}_t$ -adaptés et  $B_t$  un mouvement brownien. On suppose qu'il existe des processus  $\theta_t$  et  $\alpha_t$  tels que :

$$b_t \theta_t = \alpha_t - a_t \text{ et } \mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right) \right] < \infty$$

On définit la martingale sur  $[0, T]$  :

$$Z_t = \exp \left( \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

et la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  sur  $\mathcal{F}_T$  par  $d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}$ .

Alors  $\{\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \theta_s ds, t \in [0, T]\}$  est un mouvement brownien pour  $\mathbb{Q}$  relativement à la tribu  $\mathcal{F}_t$  et  $X_t$  se représente :

$$dX_t = \alpha_t dt + b_t d\tilde{B}_t$$

## 1.2 Définition relative à la finance [17, 10]

**Définition 1.19 (marché financier)**

**Définition 1.20 (titre financier)** *Un titre financier ou valeur mobilière est un instrument (certificat ou inscription en compte) représentatif d'un droit de créance et confère à son titulaire la propriété de la créance.*

**Définition 1.21 (portefeuille)** *Ensemble des valeurs mobilières détenues par une personne physique ou morale et déposées dans un compte couvert auprès des intermédiaires financiers.*

**Définition 1.22 (actif financier)** *Un actif financier est un droit, le cas échéant matérialisé par un titre à la perception future d'une ou plusieurs sommes d'argent.*

**Définition 1.23 (actif conditionnel)** *un actif conditionnel est une variable aléatoire positive définie sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*

**Définition 1.24 (produit dérivé)** *Un produit dérivé est un instrument financier qui s'achète ou se vend et dont la valeur dérive de celle d'autres actifs financiers de base. Ces actifs sont appelés actifs sous-jacent ou support du produit dérivé.*

**Définition 1.25 (marché complet)** *Un modèle a un marché strictement complet si pour tout produit dérivé  $H \in L^1(\mathcal{F}_T)$  il existe un processus prévisible  $\xi_s^H$  tel que*

$$H = a + \int_0^t \xi_s^H dY_s,$$

où  $Y$  est le processus de prix.

## Chapitre 2

# Introduction à la notion d'arbitrage et viabilité dans les marchés des valeurs mobilières

L'arbitrage est une intervention faite par certains agents dans les marchés financiers qui dans un premier sens leur permet d'obtenir un profit sans avoir à se soucier des risques qui peuvent se présenter. Comme les marchés financiers évoluent avec le temps, l'arbitrage est cette opportunité qui permet de faire augmenter certain gain au cours du temps même si au début l'investissement est identiquement nul. Il est évident de voir que les prix de certains produits dérivés diffèrent d'un temps à un autre et d'un marché à un autre. Ceci est dû à l'évolution du prix de l'actif qui les porte qu'est l'actif sous-jacent. Ainsi, l'arbitrage est cette détraction de différence de prix des actifs sur le marché et cette action de les vendre ou de les acheter tout en usant de cette différence et en espérant de tirer le maximum de profit. D'une autre manière l'arbitrage se traduit par cette faculté de créer un portefeuille autofinancé qui produit une valeur positive ou nulle et strictement positive de probabilité strictement positive. Quand cette occasion se présente c'est que dans le marché il y a de l'opportunité d'arbitrage. Dans le cas contraire où cette occasion ne se présente pas on dit qu'il y a l'absence de l'opportunité d'arbitrage et de ce fait on parle de marché viable. Ainsi un marché viable est cette plate-forme où il n'y aura pas de victoire sans peine ou de gains sans risque. Cette hypothèse sur l'absence de l'opportunité d'arbitrage fut le fondement de la théorie sur le principe de l'évaluation. Une théorie initiée par Black-Scholes[5] qui considère la dynamique des prix de certains actifs tels que les Bond-Stock . Une extension de cette notion est mise en exergue dans ce qui suit en

usant d'une notion de mathématique et en se basant sur la rationalité des acteurs dans le marché et ses préférences. Comme les prix des actifs et leurs états varient au cours du temps les définitions et théorèmes avancées dans ce paragraphe fait appel à la théorie de la probabilité et de processus stochastique et surtout les martingales dont les notions sont développées dans ce qui précède.

## 2.1 L'aspect du marché et les préférences des agents

Comme dans tout système économique, on peut distinguer les agents par leurs préférences. Ainsi l'aspect du système est dicté par la rationalité de ces agents. Sur ce il est nécessaire d'énumérer certaines hypothèses relatives aux préférences des agents de ce système. Considérons d'abord l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  où tout point  $\omega \in \Omega$  représente les états du monde. On désigne par  $\mathbb{T}$  l'ensemble tels que :  $\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$  lorsque les actions s'effectuent à temps discret, tandis que  $\mathbb{T}$  décrit tout instant dans  $[0, T]$  dans le cas où on travaille à temps continu, avec  $T \geq 0$ . La mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  représente dans ce cas l'évaluation relative à chaque état  $\omega$ . Par l'existence de  $\mathbb{P}$ , les agents ainsi que le numéraire ont l'opportunité de payer certain prix à la date 0 et le prix de l'actif contingent à la date  $T$ . Considérons alors l'ensemble  $\mathbb{R} \times X$  où  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des réels dans lequel varie le prix à la date 0,  $X$  l'espace des variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , ceci est dû au fait qu'il est incertain de définir le prix de l'actif contingent à la date  $T$ . Ainsi, si on note par  $r$  l'unité de paiement à la date 0 et  $x$  ce de  $x(\omega)$  à la date  $T$  lorsque l'état est  $\omega$ , on a défini alors sur  $\mathbb{R} \times X$  le vecteur de transaction  $(r, x)$  qui désigne le paquet de consommation que l'agent doit commercialiser afin de minimiser le risque de son investissement. Son action est dictée par ses préférences et certaines contraintes liées à ses richesses. Ainsi par ses préférences, on peut définir une relation de pré ordre qu'est « *la relation binaire.* », sous les hypothèses suivantes.

D'abord chaque agent peut faire état d'une préférence pour chaque paquet. Cela veut dire que pour deux paquets donnés, il peut toujours exprimer son choix pour l'un à l'autre

ou si les deux lui sont indifférents. Autrement dit pour tout paquet  $(r, x)$  et  $(r', x')$  on a :

*pour tout  $(r', x') \in \mathbb{R} \times X$  et  $(r, x) \in \mathbb{R} \times X$  alors  $(r', x') \succeq (r, x)$  ou  $(r, x) \succeq (r', x')$ .*

La relation est dite complète. De plus elle est transitive. Par la rationalité des agents, on peut aussi énumérer les trois hypothèses jugées importantes suivantes. Considérons encore la relation de pré ordre définie précédemment, alors on a :

- (i) Les préférences sont convexes. Selon l'aspect mathématique des faits, on peut ainsi exprimer cette hypothèse de la manière suivante.

*Soit  $(r, x) \in \mathbb{R} \times X$  alors  $\{(r', x') \in \mathbb{R} \times X / (r', x') \succeq (r, x)\}$  est convexe.* (2.1)

Donc, face à deux paquets de demande, l'agent est indifférent entre l'un et l'autre mais la consommation mélangée d'une partie de chaque paquet est possible.

- (ii) Les préférences sont continues. C'est-à-dire que, si on note par  $\tau$  la topologie produit sur  $\mathbb{R} \times X$  alors :

*Pour tout  $(r, x) \in \mathbb{R} \times X$  :  $\{(r', x') \in \mathbb{R} \times X / (r', x') \succeq (r, x)\}$   
et  $\{(r', x') \in \mathbb{R} \times X / (r, x) \succeq (r', x')\}$  sont  $\tau$  - fermés* (2.2)

- (iii) Si on note par  $X^+$  l'ensemble formé par des actifs conditionnels  $x$  qui vérifie :  $\mathbb{P}(x \geq 0) = 1$  et  $\mathbb{P}(x > 0) > 0$ . Alors les préférences sont strictement croissantes, c'est à dire, il existe toujours un panier strictement préféré par l'agent que ce qu'on lui propose. Ainsi

*Pour tout  $(r, x) \in \mathbb{R} \times X$ ,  $r' \in (0, \infty)$ ,  $x' \in X^+$ ,  $(r' + r, x) \succ (r, x)$   
et  $(r, x + x') \succ (r, x)$*  (2.3)

Notons par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des relations binaires  $\succeq$  complètes et transitives sur  $\mathbb{R} \times X$  qui



satisfont (2.1), (2.2) et (2.3). Ainsi  $\mathcal{A}$  représente la classe des agents rationnels.

## 2.2 Viabilité et Arbitrage

Considérons dans tout ce qui suit l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et donnons deux dates  $t = 0$  et  $t = T$ . Prenons l'espace  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  : espace des variables aléatoires  $\mathcal{F}$ -mesurables et qui sont de carrée intégrable, comme l'espace  $X$  des actifs conditionnels dont la maturité est à la date  $T$ . Pour la suite nous énonçons l'hypothèse suivante où « *le marché est sans friction* ». Autrement dit le marché est parfait dans le sens où les agents peuvent effectuer et réitérer une même transaction autant de fois qu'ils désirent, tout ceci sans coût ni frais aussi bien fixe que variable. Ainsi, on peut considérer « *le système de prix* » dans ce marché comme le couple  $(M, \pi)$  où  $M$  est un sous espace de  $X$  qui représente l'espace des actifs conditionnels émis sur le marché. Et  $\pi$  est une fonction linéaire définie sur  $M$  qui désigne le prix de l'actif  $m \in M$  qui évolue suivant l'unité de prix convenue à la date initiale de la consommation.

**Définition 2.1 (Système de prix viable)** *Un système de prix  $(M, \pi)$  est viable s'il existe une relation  $\succsim$  définie sur  $\mathcal{A}$  et un couple  $(r^*, m^*) \in \mathbb{R} \times X$  tels que :*

$$r^* + \pi(m^*) \leq 0 \text{ et } (r^*, m^*) \succsim (r, m) \text{ pour tout } (r, m) \in \mathbb{R} \times X / r + \pi(m) \leq 0 \quad (2.4)$$

On en déduit par cette définition qu'un agent rationnel où ces préférences sont définies dans  $\mathcal{A}$ , s'il effectue une meilleure transaction avec sa contrainte budgétaire qui est de la forme  $r + \pi(m) \leq 0$ , alors il réalise un échange optimal. Comme on a considéré l'espace  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la norme topologique sur  $\mathbb{L}^2$  et en utilisant la continuité de la fonction linéaire sur  $X$  on a :

**Définition 2.2** *Soit  $\psi$  une fonction linéaire continue sur  $X$ . La fonction  $\psi$  est dite strictement positive si  $\psi(x) > 0$  pour tout  $x \in X^+$ . On note par  $\Psi$  l'ensemble des fonctions linéaires continues et strictement positives sur  $X$ .*

**Théorème 2.1** *Soit  $M$  un sous espace de  $X$  et  $\pi$  une fonction linéaire sur  $M$ . Le système représenté par  $(M, \pi)$  est viable si et seulement s'il existe une extension de la fonction  $\pi$  sur  $X$  appartenant à  $\Psi$ .*

Si on note par  $\psi | M$  la restriction de  $\psi$  sur  $M$  alors le théorème 2.1 se reformule ainsi. Le système représenté par  $(M, \pi)$  est viable si et seulement s'il existe  $\psi \in \Psi$  tels que  $\psi | M = \pi$ .

**Preuve :** ( $\implies$ ) : Considérons le système  $(M, \pi)$  ou la fonction  $\psi \in \Psi$  définie par  $\psi | M = \pi$  existe. Montrons alors que  $(M, \pi)$  est viable.

Soit la relation  $\succsim$  définie sur  $\mathbb{R} \times X$  par :

$$(r', x') \succsim (r, x) \text{ si } r' + \psi(x') \geq r + \psi(x) \quad (2.5)$$

Montrons d'abord que la relation (2.5) est dans  $\mathcal{A}$ . Soit

$$A = \{(r', x') \in \mathbb{R} \times X / r' + \psi(x') \geq r + \psi(x) \text{ pour tout } (r, x) \in \mathbb{R} \times X\}$$

- Si  $(r_1, x_1) \in A$  alors on a :  $r_1 + \psi(x_1) \geq r + \psi(x)$  pour tout  $(r, x) \in \mathbb{R} \times X$ .
- Si  $(r_2, x_2) \in A$  alors on a :  $r_2 + \psi(x_2) \geq r + \psi(x)$  pour tout  $(r, x) \in \mathbb{R} \times X$ .

Alors pour tout  $\theta \in [0, 1]$  on a :

$$\theta r_1 + \theta \psi(x_1) \geq r + \psi(x) \text{ pour tout } (r, x) \in \mathbb{R} \times X \text{ et}$$

$$(1 - \theta)r_2 + (1 - \theta)\psi(x_2) \geq r + \psi(x) \text{ pour tout } (r, x) \in \mathbb{R} \times X.$$

$$\text{Donc } \theta r_1 + \theta \psi(x_1) + (1 - \theta)r_2 + (1 - \theta)\psi(x_2) \geq r + \psi(x).$$

$$\text{Alors } \theta(r_1, x_1) + (1 - \theta)(r_2, x_2) \in A.$$

D'où

$$A = \{(r', x') \in \mathbb{R} \times X / r' + \psi(x') \geq r + \psi(x) \text{ pour tout } (r, x) \in \mathbb{R} \times X\} \text{ est convexe.}$$

Donc la relation (2.5) vérifie (2.1).

Montrons que la relation (2.5) vérifie (2.2).

Par hypothèse on a :

$A = \{(r', x') \in \mathbb{R} \times X / r' + \psi(x') \geq r + \psi(x) \text{ pour tout } (r, x) \in \mathbb{R} \times X\}$  est  $\tau$  - fermé.

Donc la relation (2.5) vérifie (2.2). Montrons que la relation (2.5) vérifie (2.3).

D'une part, comme  $r' \in [0; +\infty[$  donc on a :  $r + r' \geq r$  De plus  $\psi$  est une fonction strictement positive donc  $\psi(x) > 0$ . Donc  $r + r' + \psi(x) \geq r + \psi(x)$  D'où  $(r + r', x) \succ (r, x)$ .

D'autre part, la linéarité de  $\psi$  permet l'écriture suivante  $\psi(x + x') = \psi(x) + \psi(x')$  Par la positivité de la fonction  $\psi$  on a :  $\psi(x) + \psi(x') \succ \psi(x)$ . Donc  $r + \psi(x) + \psi(x') \geq \psi(x) + r$  alors  $r + \psi(x + x') \geq \psi(x) + r$ . D'où

Pour tout  $(r, x) \in \mathbb{R} \times X$ ,  $r' \in (0, \infty)$ ,  $x' \in X^+$ ,  $(r' + r, x) \succ (r, x)$

et  $(r, x + x') \succ (r, x)$

Ainsi, la relation est (2.5) vérifie (2.3). C'est à dire, elle est dans  $\mathcal{A}$ . De plus en considérant  $(r^*, m^*) = (0, 0)$ , alors la relation (2.5) vérifie (2.4). Donc  $(M, \pi)$  est viable.

( $\Leftarrow$ ) : Supposons que  $(M, \pi)$  est viable, montrons qu'il existe  $\psi \in \Psi$  tels que  $\psi \mid M = \pi$ .

Comme  $(M, \pi)$  est viable, soit alors la relation  $\succ \in \mathcal{A}$  et le couple  $(r^*, m^*)$  qui vérifie (2.4).

Considérons les ensembles suivants :

$$G = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times X : (r, x) \succ (0, 0)\}$$

$$H = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times X : r + \pi(m) \leq 0\}$$

Par (2.4),  $G$  et  $H$  sont disjoints. Ils sont convexes, de plus  $G$  est ouvert par le fait que les préférences sont continues. Par suite, il existe une fonction linéaire  $\phi$  continue sur  $\mathbb{R} \times X$  tels que  $\phi(r, x) \geq 0$  pour  $(r, x) \in G$  et  $\phi(r, x) \leq 0$  pour  $(r, x) \in H$ . C'est une version du théorème de séparation par un hyperplan. Supposons qu'il existe un couple  $(r', x')$  tels

que  $\phi(r', x') > 0$  car  $\phi$  est non trivial. D'ailleurs  $\phi(1, 0) > 0$ . Comme la relation  $\succ \in \mathcal{A}$  alors on a  $(1, 0) \succ (0, 0)$ . Ainsi, par la continuité de  $\succ$ , il existe  $\lambda > 0$  suffisamment petit tels qu'on a :  $(1 - \lambda x', -\lambda x') \succ (0, 0)$ . Donc  $\phi(1 - \lambda r', -\lambda x') = \phi(1, 0) - \lambda \phi(r', x') \geq (0, 0)$ . et  $\phi(1, 0) \geq \lambda \phi(r', x') > 0$ . Redéfinissons  $\phi$  de telle sorte que  $\phi(1, 0) = 1$  et écrivons que  $\phi(r, x) = r + \psi(x)$  ou  $\psi$  est une fonction linéaire continue sur  $X$ . Pour  $x \in X^+$ , on a  $(0, x) \succ (0, 0)$ , donc, il existe  $\lambda > 0$  tels que  $(-\lambda, x) \succ (0, 0)$ . D'où  $\psi(x) - \lambda \geq 0$  alors  $\psi(x) \geq \lambda > 0$ . Donc  $\psi$  est strictement positive. Enfin, pour  $m \in M$  notons que,  $(-\pi(m), m)$  et  $(\pi(m), -m)$  sont dans  $H$ . Ainsi,  $0 = \phi(\pi(m), -m) = \phi(\pi(m)) - \phi(m) = \pi(m) - \phi(m)$  Donc  $\pi(m) = \phi(m)$  Ainsi,  $\psi \upharpoonright M = \pi$ .

■

. Ce théorème évoque une notion équivalente de la viabilité énoncée dans la définition (2.1). L'aspect général d'un marché où le système de prix est viable. Dans la définition suivante nous évoquons la notion de compatibilité de prix. Considérons un système de prix viable  $(M, \pi)$  et un actif financier  $x$ . Si  $x \in M$  alors on peut vendre et acheter  $x$  au prix  $\pi$  par la viabilité de  $(M, \pi)$ . Par contre si  $x \notin M$  et s'il se vend au prix  $p$  les agents peuvent acheter des actifs de la forme  $m + \lambda x \in \text{span}(M \cup \{x\})$  (sous espace engendré par  $M \cup \{x\}$  au prix  $\pi(m) + \lambda p$ . Considérons ainsi le système de prix  $(M', \pi')$  tels que  $M' = \text{span}(M \cup \{x\})$  et  $\pi'$  la fonction linéaire définie par  $\pi'(m + \lambda x) = \pi(m) + \lambda p$ . On a alors :

**Définition 2.3 (prix compatible)** *Le prix  $p$  de l'actif  $x$  est dit compatible avec le système viable  $(M, \pi)$  si le système de prix  $(M', \pi')$  est viable.*

**Corollaire 2.1** *Si le système des prix  $(M, \pi)$  est viable, alors pour tout  $x \in X$  il existe un certain prix qui est compatible avec  $(M, \pi)$ . D'ailleurs, pour un système de prix viable  $(M, \pi)$  l'ensemble formé par les prix de  $x$  compatible avec  $(M, \pi)$  est défini par l'ensemble suivant :  $\{\psi(x) : \psi \in \Psi \text{ et } \psi \upharpoonright M = \pi\}$ .*

**Définition 2.4 (évaluation par arbitrage)** *Soit le système de prix viable  $(M, \pi)$ . On dit que le prix  $p$  de l'actif  $x$  est l'évaluation par arbitrage de  $x$  si  $p$  est l'unique prix de  $x$  qui est compatible avec  $(M, \pi)$ . On dit aussi que le prix de  $x$  est déterminé par arbitrage à partir du système  $(M, \pi)$ .*

**Corollaire 2.2** *Si le système des prix  $(M, \pi)$  est viable, alors  $x$  est dite évalué par arbitrage dans le système  $(M, \pi)$  si et seulement si l'ensemble  $\{\psi(x) : \psi \in \Psi \text{ et } \psi|_M = \pi\}$  est réduit à un singleton.*

Dans ce cas l'unique élément qui constitue cet ensemble est l'évaluation par arbitrage de la demande  $x$ .

**Preuve :** D'une part si  $p$  est l'unique prix de  $x$  qui est compatible avec le système de prix  $(M, \pi)$  alors, par définition,  $x$  est dite évalué par arbitrage. D'autre part si  $x$  est évalué par arbitrage, soient  $p$  et  $p'$  deux prix de  $x$  compatible avec  $(M, \pi)$  alors on a d'après la définition de  $\pi'$ ,  $\pi'(m + \lambda x) = \pi(m) + \lambda p = \pi(m) + \lambda p'$  alors  $p = p'$ .

■

Pour un système des prix viable  $(M, \pi)$  donné, définissons  $\hat{M}$  tel que c'est l'ensemble de tous les actifs conditionnels  $x$  dont les prix sont déterminés par arbitrage et dont les prix sont aussi compatibles avec  $(M, \pi)$ . Dans ce cas,  $\hat{\pi}(x)$  désigne la valeur par arbitrage de  $x$ . Si  $X$  est de dimension fini (qui sera le cas si  $\Omega$  est fini), alors  $\hat{M} = M$ . Dans le cas où  $X$  est infini, alors d'après le corollaire (2.2) ,  $\hat{M}$  contient au moins la fermeture de  $M$  pour  $\tau$ .

# Chapitre 3

## Martingales et modèles des marchés des valeurs mobilières

Le long de ce chapitre on va évoquer les modèles aussi bien en temps continu que discret, qui permettent de modéliser l'évolution des prix des valeurs mobilières en fonction de temps tout en usant les notions de probabilités. Dans la réalité des marchés financiers, il est souvent difficile de prévoir l'évolution des prix de certains actifs financiers aussi bien dans les ventes ou sur les achats. Car, d'une part, ces prix évoluent avec le temps et d'autre part ils varient aussi selon les structures d'informations disponibles. Ainsi, dans ce paragraphe et pour notre modèle de marché, nous utilisons les notions mathématiques définies dans les paragraphes précédents. En terme de temps  $\mathbb{T}$ , on distingue : le temps discret si  $\mathbb{T}$  est un ensemble fini, le temps est continu si  $\mathbb{T} = [0, T]$ . Étant donné l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , les informations sont régies par une famille  $\{\mathcal{F}_t; t \in \mathbb{T}\}$  de sous tribus telle que pour  $s \leq t$  on a  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ . Ainsi  $\mathcal{F}_t$  représente les informations disponibles à l'instant  $t$ . Cette famille est la filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  dont on suppose que  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  et  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ . Le prix est un processus stochastique que l'on note  $Z$  et est adapté à  $\{\mathcal{F}_t\}$  de dimension  $K + 1$  définie comme suit  $Z = \{\mathcal{Z}(t); t \in \mathbb{T}\}$ . Le processus  $Z$  est adapté à  $\{\mathcal{F}_t\}$  dans le sens où les prix idéaux pour toutes les valeurs commercialisées font parties des informations disponibles à l'instant  $t$ . Le vecteur  $\mathcal{Z}_k(t)$  tels que  $k = 0, 1, \dots, K$  désigne les composantes du prix  $\mathcal{Z}(t)$ . Donc  $K + 1$  est le nombre des valeurs mobilières mise en transaction sur le marché. On note alors par  $\mathcal{Z}_k(t, \omega)$  le prix de la valeur mobilière  $k$  au temps  $t$  si l'état est  $\omega$ . Nous émettons ainsi les hypothèses suivantes. D'abord, nous allons supposer pour l'instant que les valeurs ne génèrent aucuns revenus tels que le dividende.

Autrement dit, on suppose que  $Z_0(t, \omega) = 1$  pour tout  $t$  et  $\omega$ . Cela signifie que là on a une valeur mobilière initiale à évolution prévisible, un actif sans risque à taux d'intérêt zéro. Toujours dans notre hypothèse, on suppose que  $\mathbb{E}(Z_k^2(t)) < \infty$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$  et  $k = 1, \dots, K$ .

**Exemple 3.1** Soient l'ensemble  $\mathbb{T} = [0, T]$  avec  $T > 0$  et l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  dans lequel est défini le mouvement Brownien standard  $\{\mathcal{W}(t); 0 \leq t \leq T\}$ . Les informations sont décrites par la filtration  $\mathcal{F}_u$  générée par  $\{\mathcal{W}(u); 0 \leq u \leq t\}$  tels que  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ . On définit alors le processus de prix comme suit :

$$\begin{cases} Z_0(t) \equiv 1 \\ Z_1(t) = \exp\{\sigma \mathcal{W}(t, \omega) + \mu t\} \quad \sigma > 0. \end{cases}$$

C'est le modèle de Black and Scholes, où  $Z_0$  désigne le prix de l'actif sans risque ou Bond tandis que  $Z_1$  fait référence au prix de l'actif risqué ou Stock, d'où le modèle Bond Stock.

### 3.1 Généralité sur les stratégies financières

**Définition 3.1 (stratégies simples)** Une stratégie simple est le processus stochastique  $\theta$  de dimension  $K + 1$  définie par  $\theta = \{\theta(t); t \in \mathbb{T}\}$  qui vérifie les 3 conditions suivantes :

- (i)  $\theta(t)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout  $t \in \mathbb{T}$ .
- (ii)  $\theta_k(t) \cdot Z_k(t) \in X$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$  et  $k = 0, 1, \dots, K$ .
- (iii) Il existe  $N < \infty$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $0 = t_0 < \dots < t_N = T$  tels que  $t_n \in \mathbb{T}$  et  $\theta(t, \omega)$  est constant dans l'intervalle  $t_{(n-1)} \leq t \leq t_n$  pour chaque état  $\omega(n = 1, \dots, N)$ .

Une stratégie simple  $\theta$  est donc cette règle qui permet d'obtenir les  $K + 1$  valeurs mobilières et  $\theta_k(t, \omega)$  dans ce cas représente la quantité de valeur mobilière  $k$  acquise à l'instant  $t$  si l'état est  $\omega$ . Ainsi, d'après (i), le portefeuille acquis à l'instant  $t$  peut seulement dépendre de l'information disponible à ce moment. Ensuite par (ii) on peut dire que la quantité des diverses valeurs mobilières mises en transaction à l'instant  $t_n$  ne varient pas trop d'une manière extravagante comme fonction de  $\omega$ . En fin, la troisième condition relative à une stratégie simple signifie que chaque agent ne peut exercer qu'à

un certain nombre fini de temps, bien que ceci puisse être arbitrairement élevé. Ceci ne nie pas la possibilité des agents d'effectuer leur transaction en temps continu. Soit  $\theta$  une stratégie simple qu'on peut exercer à  $t_0, t_1, \dots, t_N$ . Le produit  $\theta(t) \cdot \mathcal{Z}(t)$  est la variable aléatoire qui représente la valeur du portefeuille à la date  $t$ . Si on note  $t_n$  la date de l'échéance alors la valeur du portefeuille avant cette date est  $\theta(t_{n-1}) \cdot \mathcal{Z}(t_n)$ , tandis que celle après est  $\theta(t_n) \cdot \mathcal{Z}(t_n)$ .

**Définition 3.2 (Stratégies simples autofinancées)**  $\theta$  est dite une stratégie simple autofinancée si :

$$\theta(t_{n-1}) \cdot \mathcal{Z}(t_n) = \theta(t_n) \cdot \mathcal{Z}(t_n) \text{ pour } n = 0, \dots, N.$$

Un marché qui permet une stratégie simple autofinancée est **un marché sans friction**. Ainsi la valeur du portefeuille liée à une stratégie simple autofinancée varie suivant l'évolution du prix mais non pas par l'ajout ou par le retrait de l'argent entre la date 0 et la date  $T$ . La valeur est ré émise sur le marché d'une période à une autre.

**Définition 3.3 (Opportunité d'arbitrage)** Une simple stratégie autofinancée  $\theta$  est une opportunité d'arbitrage si :

$$\theta(0) \cdot \mathcal{Z}(0) \leq 0 \text{ et } \theta(T) \cdot \mathcal{Z}(T) \in X^+.$$

Une telle occasion quand elle existe représente l'opportunité de créer un profit par arbitrage. Ainsi, cette occasion permet à un agent d'augmenter sa consommation à la date zéro et d'accroître aussi avec la probabilité positive sa consommation à la date  $T$ . De cette manière l'opportunité d'arbitrage est en contradiction avec l'économie d'équilibre pour des agents issus de la classe  $\mathcal{A}$ .

**Définition 3.4** Une demande  $x$  est dite commercialisé à l'instant zéro s'il existe une stratégie simple autofinancée  $\theta$  tels que  $\theta(T) \cdot \mathcal{Z}(T) = x$  presque sûrement.

Dans ce cas on peut dire que la stratégie  $\theta$  qui produit  $x$  et  $\theta(0) \cdot \mathcal{Z}(0)$  est de façon implicite le prix de  $x$ . L'interprétation est claire. Pour un prix  $\theta(0) \cdot \mathcal{Z}(0)$  d'une unité de



consommation à la date zéro, un agent peut acheter le portefeuille  $\theta(0)$ . De plus, pour chaque  $t_1, t_2, \dots, t_N$  il peut gratuitement échanger ses avoirs de manière à ce que ceux-ci soient conforme à la stratégie  $\theta$ . A l'instant  $T$  il possède un portefeuille de valeur relative à l'état  $\omega$  :

$$x(\omega) = \theta(T, \omega) \cdot \mathcal{Z}(T, \omega)$$

Si le prix d'une demande mise au marché est bien déterminé, on devrait être sur du fait que, si deux stratégies simples autofinancées  $\theta$  et  $\theta'$  génèrent une demande  $x$  alors :

$$\theta(0) \cdot \mathcal{Z}(0) = \theta'(0) \cdot \mathcal{Z}(0)$$

Ceci est vérifié dans le cas où il n'y aura pas d'opportunité d'arbitrage. Dans ce cas, si  $M$  désigne l'ensemble des demandes mises sur le marché dont le prix est déterminé par l'application définie par :

$$\pi : M \longmapsto \mathbb{R} \text{ pour } m \in M$$

. S'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage alors  $\pi$  est une fonction linéaire sur le sous espace  $M$  de  $X$ . Ainsi pour un modèle de marché des valeurs mobilières où il n'y aura pas d'opportunité d'arbitrage, on peut lui associer le système de prix  $(M, \pi)$ .

**Définition 3.5 (Marché viable)** *Un modèle de marché des valeurs est viable s'il n'y existe pas d'opportunité d'arbitrage et si le système de prix  $(M, \pi)$  correspondant est viable.*

Ainsi, pour un modèle de marché viable donné, on peut dire que le prix de l'actif  $x$  est déterminé par arbitrage pour le modèle et la valeur par arbitrage de  $x$  est  $p$  si tels sont les cas pour le système de prix  $(M, \pi)$ .

**Définition 3.6 (Probabilité martingale équivalente)** *Soit  $\mathbb{P}^*$  une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité martingale équivalente si  $\mathbb{P}$  vérifie les trois conditions suivantes :*

- (a) *Soit  $B \in \mathbb{F}$ ,  $\mathbb{P}(B) = 0$  si et seulement si  $\mathbb{P}^*(B) = 0$*
- (b) *La densité de Radon-Nykodym  $\rho = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$  vérifie  $\mathbb{E}(\rho^2) < \infty$  ou  $\rho \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .*
- (c) *Le processus  $\mathcal{Z}$  est une martingale adaptée à la filtration  $\{F_t\}$  selon  $\mathbb{P}^*$ . On note ainsi par  $\mathbb{E}^*(.)$  l'opérateur d'espérance associé à  $\mathbb{P}^*$ . On a alors :*

$$\mathbb{E}^*(Z_k(u) | \mathcal{F}_t) = Z_k(t) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, K \text{ où } u, t \in \mathbb{T} \text{ et } t \leq u$$

**Théorème 3.1** *On admet qu'il n'y aura pas d'opportunité d'arbitrage. Alors il existe une correspondance linéaire entre  $\mathbb{P}^*$  la probabilité martingale équivalente de  $\mathbb{P}$  et la fonction linéaire  $\psi \in \Psi$  où  $\psi | M = \pi$ . Cette correspondance est donnée par la relation suivante.*

$$\mathbb{P}^*(B) = \psi(1_B) \text{ et } \psi(x) = \mathbb{E}^*(x) \quad (3.1)$$

**Remarque 3.1** *Si le modèle admet l'opportunité d'arbitrage, alors la probabilité martingale équivalente n'existe pas. Dans ce cas  $\pi$  n'est pas bien définie.*

**Remarque 3.2** On a alors les trois points suivants :

- La stricte positivité de  $\psi$  correspond au fait que les probabilités  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{P}^*$  soient équivalentes ;
- La continuité de  $\psi$  correspond à  $\mathbb{E}(\rho^2) < \infty$  ;
- La restriction sur  $M$  de  $\psi$  correspond à la propriété martingale de  $\mathbb{P}^*$ .

**Preuve :** Rappelons d'après le théorème de représentation de Riesz pour l'espace  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  qu'une fonction linéaire  $\psi$  définie sur  $X$  est continue si et seulement si  $\psi(x) = \mathbb{E}(\rho x)$  où  $\rho \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . D'abord, soit  $\mathbb{P}^*$  une probabilité martingale équivalente. Considérons  $\rho$  tels que

$$\rho = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}.$$

Définissons ainsi la fonction linéaire  $\psi$  de  $P^*$  selon la relation (3.1). Comme  $\rho \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  alors on peut dire que la fonction linéaire  $\psi$  est continue. De plus l'équivalence de  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{P}^*$  donne le fait que  $\rho$  est strictement positive. D'où  $\psi$  est strictement positive, donc  $\psi \in \Psi$ . Montrons ensuite que la restriction de  $\psi$  sur  $M$  est  $\pi$ .

Soit  $\theta$  la stratégie simple autofinancée qui produit  $m$ , avec  $m \in M$ . Considérons alors les temps  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  durant lesquels  $\theta$  peut varier. Alors pour  $n = 1, 2, \dots, N$  et par le fait que  $\theta$  est une stratégie autofinancée on a :

$$\mathbb{E}^*(\theta(t_n) \cdot \mathcal{Z}(t_n) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}) = \mathbb{E}^*(\theta(t_{n-1}) \cdot \mathcal{Z}(t_n) | \mathcal{F}_{t_{n-1}})$$

Comme le processus  $\mathcal{Z}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  alors on peut écrire que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*((\theta_{t_{n-1}}).\mathcal{Z}(t_n) \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}}) &= \theta_{t_{n-1}}.\mathbb{E}^*(\mathcal{Z}(t_n) \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}})) \\ &= \theta_{t_{n-1}}.\mathcal{Z}(t_{n-1}).\end{aligned}$$

On a, en itérant l'égalité que :

$$\mathbb{E}^*(\theta(T).\mathcal{Z}(T)) = \theta(0).\mathcal{Z}(0)$$

Donc si :

$$m = \theta(T).\mathcal{Z}(T) \text{ et si } \pi(m) = \theta(0).\mathcal{Z}(0) \text{ alors } \mathbb{E}^*(m) = \psi(m) = \pi(m).$$

Réciproquement, soit  $\psi \in \Psi$  tels que :  $\psi \mid M = \pi$ . Définissons  $\mathbb{P}^*$  à partir  $\psi$  suivant la relation (3.1). Montrons l'équivalence de  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{P}^*$ .

- D'abord, si  $\mathbb{P}(B) = 0$ , alors  $1_B \equiv 0$  dans  $X$ . Ainsi

$$(\mathbb{P}^*)^*(B) = \psi(1_B) = 0.$$

Tandis que,

$$\text{Si } \mathbb{P}(B) > 0 \text{ alors, } 1_B \in X^+ \text{ et } \psi(1_B) = \mathbb{P}^*(B) > 0.$$

- Ensuite, puisque  $\psi$  est continue, donc pour  $\rho \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  alors  $\psi(x) = \mathbb{E}(\rho x)$  ainsi,

$$\mathbb{P}^*(B) = \mathbb{E}(\rho 1_B)$$

Donc,  $\mathbb{P}^*$  est une mesure  $\sigma$ -additive, et  $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \rho$  est de carré intégrable.

Comme

$$1_\Omega \in M \text{ et } \psi(1_B) = 1 \text{ alors } \mathbb{P}^*(\Omega) = 1$$

Par conséquent  $\mathbb{P}^*$  est un mesure de probabilité.

Il reste à montrer que  $\{\mathcal{Z}_k(t), \mathcal{F}_t ; t \in \mathbb{T}\}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  pour chaque  $k$ .

D'abord, il est clair que pour  $k = 0$ ,  $\{\mathcal{Z}_0(t), \mathcal{F}_t ; t \in \mathbb{T}\}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

Pour  $k > 0$ , considérons alors  $t$  et  $u$  des éléments de  $\mathbb{T}$  tels que  $t \leq u$ , et  $B \in \mathcal{F}_t$ . Soit

alors la stratégie simple autofinancée  $\theta$  définie par :

$$\theta_k(s, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } s \in [t, u) \text{ et } \omega \in B \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

$$\theta_0(s, \omega) = \begin{cases} -\mathcal{Z}_k(t, \omega) & \text{pour } s \in [t, u) \text{ et } \omega \in B \\ \mathcal{Z}_k(u, \omega) - \mathcal{Z}_k(t, \omega) & \text{pour } s \in [u, T] \text{ et } \omega \in B \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\theta_j(s, \omega) = 0 \text{ pour tout } j \neq 0, k.$$

Ceci représente la stratégie qui permet d'acheter une part de l'action  $k$  au temps  $t$  si l'état est  $B$  et puis de la vente au temps  $u$ , utilisant la valeur mobilière nulle de telle sorte que toutes les transactions (achat original y compris, si  $t = 0$ ) sont sans frais. Cette stratégie marchande rapporte à la date  $T$  un portefeuille de valeur :

$$\theta(T) \cdot \mathcal{Z}(T) = (\mathcal{Z}_k(u) - \mathcal{Z}_k(t)) \cdot 1_B$$

Ainsi, cette réclamation est commercialisée sur le marché à prix zéro. Par la restriction de  $\psi$  sur  $M$  ( $\psi | M$ ) on a l'écriture suivante :

$$\psi(\mathcal{Z}_k(u) - \mathcal{Z}_k(t)) \cdot 1_B = 0$$

En utilisant la notation de l'espérance :  $\mathbb{E}^*(.)$  on a :

$$\mathbb{E}^*(\mathcal{Z}_k(u) - \mathcal{Z}_k(t)) \cdot 1_B = 0$$

D'où

$$\mathbb{E}^*(\mathcal{Z}_k(u) \cdot 1_B) = \mathbb{E}^*(\mathcal{Z}_k(t) \cdot 1_B) \text{ pour tout } B \in \mathcal{F}_t$$

Ainsi,  $\mathcal{Z}_k(t)$  est la version de  $\mathbb{E}^*(\mathcal{Z}_k(u) | \mathcal{F}_t)$

■

**Corollaire 3.1** (a) *Le modèle de marché des valeurs est viable si et seulement si il existe au moins une probabilité martingale équivalente.*

(b) *On admet que le modèle de marché des valeurs est viable. On note par  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ , l'ensemble des probabilités martingales équivalentes. Alors  $x \in \hat{M}$  si et seulement si  $\mathbb{E}^*(x)$  est constant pour tout  $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ . Dans ce cas, la constante n'est autre que  $\hat{\pi}(x)$ .*

(c) *On suppose que le modèle de marché des valeurs est viable. Soit alors  $x \in X$ ,  $x$  est évalué par arbitrage si et seulement si il existe une unique probabilité martingale équivalente.*

**Preuve :** (a) D'une part, par définition, si la probabilité martingale équivalente existe alors il n'y aura pas d'opportunité d'arbitrage ainsi le modèle des marché est viable. D'autre part, nous allons considérer la stratégie simple autofinancée  $\theta$  telle que :

$$\theta(T) \cdot \mathcal{Z}(T) \in X^+.$$

Comme  $\mathbb{P}^*$  est la probabilité martingale équivalente à  $\mathbb{P}$ . Alors :

$$\begin{cases} \mathbb{P}^*(\theta(T) \cdot \mathcal{Z}(T) \geq 0) = 1 \\ \mathbb{P}^*(\theta(T) \cdot \mathcal{Z}(T) > 0) > 0. \end{cases} \quad \text{et}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}^*(\theta(T) \cdot \mathcal{Z}(T)) > 0$$

D'après le théorème (3.1) on a :

$$\theta(0) \cdot \mathcal{Z}(0) = \mathbb{E}^*(\theta(T) \cdot \mathcal{Z}(T))$$

Donc,

$$\theta(0) \cdot \mathcal{Z}(0) > 0 \text{ si } \theta(T) \cdot \mathcal{Z}(T) \in X^+.$$

Donc, l'opportunité d'arbitrage n'existe pas.

(b) Comme le modèle des marchés des valeurs mobilières est viable. Donc il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, et il existe une probabilité martingale équivalente  $\mathbb{P}^*$ . De plus pour tout  $x \in \hat{M}$ ,  $\{\psi(x) : \psi \in \Psi \text{ et } \psi \mid M = \pi\}$  est réduit à un singleton. Or d'après la relation (3.1)

$$\mathbb{E}^*(x) = \psi(x)$$

Donc  $\mathbb{E}^*(x)$  est constante pour tout  $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ .

Supposons que  $\mathbb{E}^*(x)$  est constante donc  $\{\psi(x) : \psi \in \Psi \text{ et } \psi \mid M = \pi\}$  est réduit à un singleton. Ainsi le prix de  $x$  est déterminé par arbitrage d'où  $x \in \hat{M}$ .

(c) Comme le marché est viable, d'après le corollaire (3.1)(a) il existe au moins une probabilité martingale équivalente. De plus toujours d'après le corollaire (3.1)(b)  $\mathbb{E}^*(x)$  est constante pour tout  $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ . Ainsi  $\mathbb{P}^*$  est unique.

■

## 3.2 Cas fini : Modèle de Markov

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le modèle de marché des valeurs où  $\Omega$  et  $\mathbb{T}$  sont finis. L'espace  $X$  est alors constitué des fonctions définies sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et qui sont  $\mathcal{F}$  – mesurables.

**Proposition 3.1** *Le modèle de marché des valeurs mobilières est viable si et seulement si il n'y a pas opportunité d'arbitrage.*

**Preuve :** Comme le modèle est viable donc d'après le corollaire (3.1) la probabilité martingale équivalente  $\mathbb{P}^*$  existe et de plus c'est unique. Donc l'opportunité d'arbitrage n'existe pas.

■

**Proposition 3.2** *Le prix de la demande  $x$  est déterminé par arbitrage si et seulement s'il est commercialisé au temps  $t=0$ . (marketed)*

Dans ce paragraphe, considérons l'exemple illustré dans la Figure 1. On donne les neuf états du monde notés  $\omega_1, \dots, \omega_9$ , et l'ensemble  $\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$ . Soit  $\mathcal{F}_1$  la tribu engendrée par les événements définies par  $B_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ,  $B_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ , et  $B_3 = \{\omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ , et  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$  la tribu engendrée par les parties de  $\Omega$ . Autrement dit, les investisseurs connaissent à l'instant  $t = 1$  les quels des événements  $B_j$  vont se produire. De plus ils savent au moment  $t = 2$  l'état du monde. On sait alors que le prix  $Z_0(t) \equiv 1$ . Les prix  $Z_1(t)$  et  $Z_2(t)$  sont représentés dans la Figure 1 comme étant les nœuds de l'arbre où  $Z_1(t)$  est le nombre supérieur tandis que  $Z_2(t)$  est ce qui est au-dessous. Ainsi  $Z_1(0, \omega_1) = 10$ ,  $Z_1(1, \omega_1) = 11$ , et  $Z_1(2, \omega_1) = 14$ .

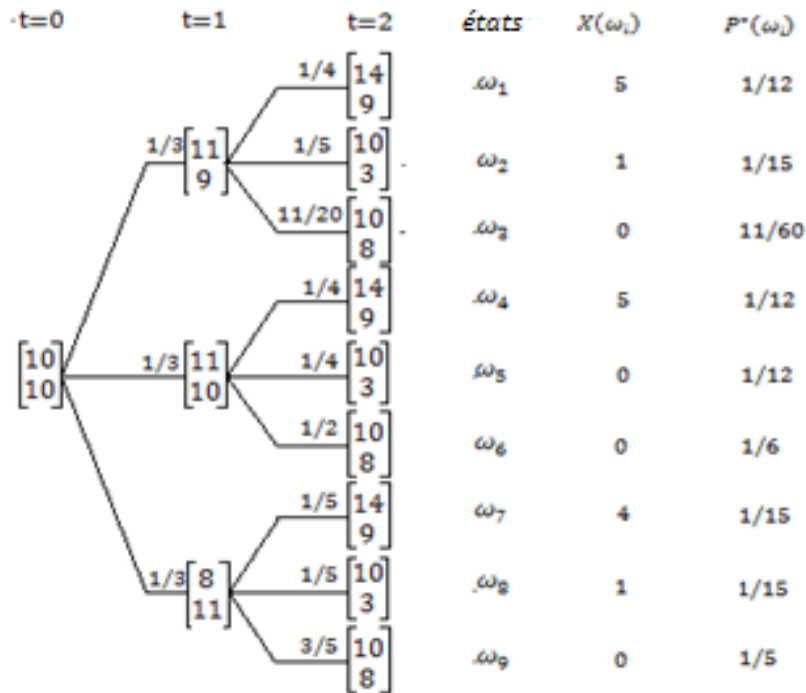


FIG. 1. Un Exemple Fini

Nous aimerions savoir si ce modèle est viable et si tel est le cas alors quelles demandes sont primées par arbitrage. Pour cela, nous allons définir l'actif conditionnel :

$$x = \{2Z_1(2) + Z_2(2) - [14 + \min_{0 \leq t \leq 2} \min(Z_1(t), Z_2(t))]\}^+$$

La valeur  $x(\omega_i)$  de cette demande est donnée pour chaque état du monde  $\omega_i$  dans la Figure 1. Déterminons maintenant l'ensemble  $\mathcal{P}$  constitué par toutes les probabilités martingales équivalentes.

- Premièrement, si  $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$  alors  $\mathbb{E}^* Z_1(1) = 10$  et  $\mathbb{E}^* Z_2(1) = 10$ . Notons par  $p$  la probabilité telle que  $\mathbb{P}^*(B_1)$  et par  $q$  la probabilité  $\mathbb{P}^*(B_2)$ . Dans ce cas :

$$11p + 11q + 8(1 - p - q) = 10 \text{ et } 19p + 10q + 11(1 - p - q) = 10$$

Ainsi on a :  $p = q = \frac{1}{3}$ . Ces sont les probabilités enregistrées dans la Figure 1.

- Ensuite,  $\mathbb{E}^*(Z_1(2) | B_1) = 11$  et  $\mathbb{E}^*(Z_2(2) | B_1) = 9$ . De la même manière, on a  $\mathbb{P}^*(\omega_1 | B_1) = 1/4$  et  $\mathbb{P}^*(\omega_2 | B_1) = 1/5$ , ensuite  $\mathbb{P}^*(\omega_3 | B_1) = 11/20$ . Un calcul similaire permet d'obtenir les probabilités conditionnelles des états de  $B_2$  et  $B_3$ .

Ainsi, comme on aperçoit que chacune des branches de probabilités est unique, alors  $\mathbb{P}^*$ , définie dans la dernière colonne de la Figure 1 est l'unique probabilité martingale équivalente. D'où la viabilité du modèle, Ceci implique que le modèle est viable,  $x$  est ainsi évaluée par arbitrage et on a :

$$\hat{\pi}(x) = \mathbb{E}^*(x) = \sum_{i=1}^9 x(\omega_i) \mathbb{P}^*(\omega_i) = 1.2333$$

### 3.3 Cas continu : Modèle de diffusion

Dans ce cas, nous allons étudier le modèle où  $\mathbb{T} = [0, T]$  et le processus  $\mathcal{Z}$  est un vecteur de diffusion. Considérons alors le vecteur de diffusion  $Y$  de dimension  $K$  tels que  $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$  et donnons le processus  $\mathcal{Z}$  défini par  $Z_k(t) = Y_k(t)$  pour tout  $k = 1, \dots, K$  et  $Z_0(t) \equiv 1$ . On admet aussi le mouvement Brownien standard  $\mathcal{W}$  de dimension  $K$  défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  par :  $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(t); 0 \leq t \leq T\}$ . Les vecteurs composantes  $\mathcal{W}_1(t), \dots, \mathcal{W}_K(t)$  de  $\mathcal{W}$  sont des mouvements Brownien unidimensionnels indépendants de dérivés nulles, de variance unitaire et que  $\mathcal{W}_k(0) = 0$ .

Soit  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}\{\mathcal{W}(s); 0 \leq s \leq t\}$  pour  $0 \leq t \leq T$  et que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ . On considère les



fonctions continues en  $x$  et  $t$  définie par :

$$\sigma(x, t) : \mathbb{R}^K \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^{K \times K} \quad \text{et} \quad \mu(x, t) : \mathbb{R}^K \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^{K \times K}$$

On admet que la matrice  $\sigma(x, t)$  de dimension  $K \times K$ , est non singulière de manière à ce qu'il existe une fonction  $\alpha(x, t)$  telle que :

$$\sigma(x, t) \cdot \alpha(x, t) + \mu(x, t) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^K \text{ et } t \in [0, T]. \quad (3.2)$$

(Avec  $\alpha(x, t)$  et  $\mu(x, t)$  sont des vecteurs colonnes).

Soit  $Y$  le processus adapté à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}$  et défini par l'intégrale stochastique d'Itô :

$$Y_k(t) = Y_k(0) + \sum_{j=1}^K \int_0^t \sigma_{kj}(Y(s), s) d\mathcal{W}_j(s) + \int_0^t \mu_k(Y(s), s) ds \quad (3.3)$$

Pour  $k = 1, \dots, K$  et  $0 \leq t \leq T$ , ou  $Y(0)$  est un vecteur constant de dimension  $K$ .

Nous réécrivons l'équation (3.3) de la manière simple suivante :

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(Y(s), s) d\mathcal{W} + \int_0^t \mu(Y(s), s) ds \quad (3.4)$$

Nous allons maintenant définir le processus des prix  $Z$  en termes de  $Y$  comme ce qui sont énoncés ci dessus. Pour terminer l'affirmation, supposons qu'il existe un processus continu  $Y^*$  de dimension  $K$  tel que :

$$Y^* = \{Y^*(t); 0 \leq t \leq T\}$$

qui satisfait :

$$Y^*(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(Y^*(s), s) d\mathcal{W}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.5)$$

On peut définir ainsi le processus  $\mathcal{Z}^*$  de dimension  $K + 1$  comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{Z}^*(0) \equiv 1 \\ \mathcal{Z}_k^*(t) = Y_k^*(t) \quad \text{pour } k \geq 1 \end{cases}$$

Pour la suite nous énonçons d'abord une proposition préliminaire nécessaire pour le ré-

sultat suivant. Soit alors l'espace  $\mathcal{C}[0, T]$ , espace de fonction continue de  $[0, T]$  vers  $\mathbb{R}^K$ , muni de la topologie de la convergence uniforme. Dire qu'une fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathcal{C}[0, T] \mapsto \mathbb{R} \quad (3.6)$$

est mesurable signifie qu'elle est mesurable pour la tribu borélienne de  $\mathcal{C}[0, T]$ . On a alors la proposition suivante.

**Proposition 3.3** *Pour chaque  $t$  tel que  $0 \leq t \leq T$ , la filtration  $\mathcal{F}_t$  est engendrée par  $\{\mathcal{Z}(s); 0 \leq s \leq t\}$ . Ainsi chaque actif conditionnel  $x$  est de la forme  $x = f(Z)$  pour une fonctionnelle mesurable  $f$  définie par la relation (3.6)*

**Remarque 3.3** *Par cette proposition, en permettant à des investisseurs de former des portefeuilles basés sur la structure de l'information  $\mathcal{F}_t$ , on leur donne l'accès seulement à l'information des prix du passé et du présent pour chaque instant  $t$ . En outre, avec le fait que  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$  chaque actif conditionnel peut être exprimé en fonction des vecteurs prix sur l'intervalle  $[0, T]$ .*

**Preuve :** Dans un premier temps, nous allons montrer que  $\mathcal{F}_t$  est égale à la tribu  $\mathcal{G}_t$  qui est engendrée par  $\{Y(s); 0 \leq s \leq t\}$ . Soit le processus  $V$  adaptée à  $\mathcal{G}_t$  définie par :

$$V(t) = Y(t) - Y(0) - \int_0^t \mu_k(Y(s), s) ds = \int_0^t \sigma_{kj}(Y(s), s) dW_j(s)$$

Pour un temps  $t$  fixé tel que  $t > 0$  définissons la relation :

$$\mathcal{W}_N(t) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \{\sigma(Y(t_n), t_n)\}^{-1} [V_{t_{n+1}} - V_{t_n}]; \text{ pour tout entier } N \text{ où } t_n = \frac{nt}{2^N}$$

Le fait que  $\sigma$  soit une matrice inversible donne un sens à cette écriture.

Ainsi  $\mathcal{W}_N(t)$  est  $G_t$  - mesurable et la continuité de  $\mu$  et de  $\sigma$  permet de dire que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_N(t) = W(t) \quad p.s$$

Donc  $W(t)$  est  $G_t$  - mesurable alors  $\mathcal{F}_t \subseteq G_t$ . Comme  $Y$  est un processus adapté à  $\mathcal{F}_t$  alors  $G_t \subseteq \mathcal{F}_t$ . D'où le résultat. ■

**Théorème 3.2** *L'ensemble  $\mathcal{P}$  des probabilités martingales équivalentes est non vide si et seulement si :*

$$(a) \int_0^T \alpha^2(Y(t), t) dt < \infty \quad p.s$$

$$(b) \mathbb{E}(\rho^2) < \infty \quad \text{ou } \rho = \exp\left\{ \int_0^T \alpha(Y(t), t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \alpha^2(Y(t), t) dt \right\}$$

$$(c) Y^* \text{ est un martingale sous } \{\mathcal{F}_t\}$$

Ainsi  $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$  est l'unique probabilité martingale équivalente de  $\mathbb{P}$ , et  $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \rho$  et la distribution de  $Z$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$  coïncide avec celle de  $Z^*$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Preuve :** Notons par  $\Phi$  l'ensemble constitué par le processus  $\phi$  de dimension  $K$  défini par :

$$\phi = \{\phi(t); 0 \leq t \leq T\}.$$

Chaque composante  $\phi_k(t, \omega)$  pour  $k = 1, \dots, K$  est à la fois mesurable par rapport à  $t$  et par rapport à  $\omega$ . Ainsi,  $\phi$  est adapté à la tribu brownien  $\mathcal{F}_t$  et de plus  $\left( \int_0^T \phi^2(t) dt \right) < \infty$ . Les éléments  $\phi$  sont des fonctions non anticipées. L'intégrale stochastique  $\int \phi(s) dB(s)$  est défini pour  $\phi \in \Phi$ . Soit  $\mathbb{P}^*$  une mesure de probabilité martingale équivalente avec  $d\mathbb{P}^* = \zeta d\mathbb{P}$ . Alors  $\zeta$  est strictement positive et de carré intégrable par définition, de plus le processus  $\{\zeta(t); 0 \leq t \leq T\}$  définie par  $\zeta(t) = \mathbb{E}(\zeta | \mathcal{F}_t)$  est une martingale strictement positive sous  $\mathcal{F}_t$  avec :

$$\zeta(T) = \zeta \text{ et } \mathbb{E}(\zeta(t)) = \mathbb{E}(\zeta) = 1 \text{ pour tout } t$$

Par l'inégalité de Jensen on peut dire que  $\zeta(t)$  est de carré intégrable pour chaque  $t$ . Et une telle martingale, d'après la section 4, peut se mettre sous la forme :

$$\zeta(t) = 1 + \int_0^t \gamma(s) d\mathcal{W}(s) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.7)$$

Avec  $\gamma \in \Phi$  et satisfait :  $\int_0^T \mathbb{E}(\gamma^2(t)) dt < \infty$ . Par la relation (3.7) on peut dire que  $\zeta(\cdot)$  est continue presque sûrement. De plus  $\zeta_k(\cdot, \omega)$  qui n'est autre que la  $k^{\text{ème}}$  composante du processus, est lié à partir de 0 pour presque chaque  $\omega$ . Considérons ainsi la fonction de non anticipation de dimension  $K$ , telle que :

$$\phi_k(t) = \gamma_k(t)/\zeta(t) \text{ pour } k = 0, \dots, K.$$

Par le lemme d'Itô et par la formule (3.7) on a :

$$\ln \zeta(t) = \int_0^t \phi(s) d\mathcal{W} - \frac{1}{2} \int_0^t \phi^2(s) ds. \quad 0 \leq t \leq T.$$

En particulier nous avons :

$$\zeta = \exp \left\{ \int_0^T \phi(s) d\mathcal{W} - \frac{1}{2} \int_0^T \phi^2(s) ds \right\} \quad (3.8)$$

Ainsi d'après Kunita et Watanabe il est facile de voir que chaque variable aléatoire  $\zeta$  strictement positive, de carré intégrable peut se mettre sous forme (3.8). Après avoir réalisé cette représentation pour le  $\zeta$  dérivée de Radon-Nikodym, nous pouvons employer le théorème Girsanov [10] pour prouver que la fonction  $\phi(t)$  mentionnée dans (3.8) n'est en fait autre que  $\alpha(Y(t), t)$ . Soit

$$\mathcal{W}^*(t) = \mathcal{W}(t) - \int_0^t \phi(s) ds \quad 0 \leq t \leq T$$

Le théorème fondamental de Girsanov affirme que  $\mathcal{W}^*(t)$  est un mouvement Brownien standard de dimension  $K$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$  où  $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \zeta$  et  $Y$  satisfait l'équation différentielle

stochastique

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(Y(s), s) dW^*(s) + \int_0^t \mu^*(s) ds \quad (3.9)$$

sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$  où  $\mu^*(t) = \mu(Y(t), t) + \sigma(Y(t), t)\phi(t)$ . Supposons pour le moment que  $\sigma(x, t)$  est une fonction de liaison. Alors l'intégrale stochastique du côté droit de (3.9) est une martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ . Puisque  $Y$  est une martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ , alors la composante absolument continue  $\int_0^t \mu^*(s) ds$  doit également être une martingale et cela est vrai si et seulement si  $\mu^*(t) \equiv 0$  pour presque chaque  $T$ . Il faut noter aussi le fait que  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité martingale équivalente. Pour le cas général de  $\sigma$  la même conclusion peut être tirée par un argument d'arrêt, utilisant le fait que ce  $\sigma(\cdot, \cdot)$  est définie sur les ensembles liés. Soit  $b > 0$ , l'inégalité peut être au sens large, et  $\tau$  le premier instant  $t$  tel que  $Y_k(t) = \pm b$  pour un certain  $k$ , avec  $\tau = T$  si un tel évènement n'existe pas. Si  $Y$  est une martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ , alors le processus arrêté  $Y(t \wedge \tau)$  l'est aussi et de ceci on peut dire que  $\mu^*(t) \equiv 0$  pour  $0 \leq t \leq \tau$ . Mais, comme  $b \mapsto \infty$  alors  $\tau \mapsto T$  presque sûrement. Ainsi le suit que le  $\mu^*(t) \equiv 0$  pour tout  $t$ . En conclusion, on observe que  $\mu^*(t) = 0$  si et seulement si  $\phi(t) = \alpha(Y(t), t)$  presque sûrement. Ainsi, nous avons maintenant établi que  $\zeta$  peut être la densité de Radon-Nikodym d'une mesure de probabilité martingale équivalente  $\mathbb{P}^*$  seulement si  $\zeta$  satisfait (3.8) avec  $\phi(t) = \alpha(Y(t), t)$  pour tout  $t$ , donc  $\zeta = \rho$ . Ainsi  $\mathcal{P}$  est non vide seulement si le  $\rho$  est bien défini et de carré intégrable. Ceci signifie que les états (a) et (b) du théorème (3.2) sont nécessaires pour que  $\mathcal{P}$  soit non vide.

Supposons maintenant que (a) et (b) du théorème (3.2) sont vérifiés. Ceci implique bien évidemment que  $\mathbb{E}(\rho) = 1$ , voir. Gihman et Skorohod [9, p.82], de ce fait  $\rho$  est une densité de Radon-Nikodym. Avec  $d\mathbb{P}^* = \rho d\mathbb{P}$ . Nous allons argumenter exactement comme ci-dessus pour établir que :

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(Y(s), s) ds. dW^*(s) \text{ sur } (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*). \quad (3.10)$$

Puisque  $Y^*$  satisfait uniquement la relation (3.5) sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ , nous concluons que  $Y$  satisfait à son tour l'équation (3.10) sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$  et que sa distribution coïncide avec

celle de  $Y^*$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ . Ainsi, en ayant (a) et (b) du théorème (3.2), un état nécessaire et suffisant pour que  $\mathbb{P}^*$  soit une mesure de probabilité martingale équivalente (c).

■

**Corollaire 3.2** *Le modèle de marché des valeurs est viable si et seulement si (a) – (c) sont vérifiées. Dans ce cas-ci, chaque actif conditionnel  $x$  a le prix indiqué par arbitrage de valeur  $\hat{\pi}$  tels que :*

$$\hat{\pi}(x) = \mathbb{E}(f(\mathcal{Z}^*)) = \mathbb{E}^*(f(Z)) \quad \text{où } x = f(Z).$$

**Preuve :** Comme le modèle est viable alors d’après (3.1) la probabilité martingale équivalente  $\mathbb{P}^*$  existe et c’est unique. Donc d’après le théorème (3.2) l’ensemble est non vide. Or d’après le théorème (3.1) on a :

$$\mathbb{E}^*(f(Z)) = \psi(f(Z)) \quad \text{avec } x = f(Z)$$

Comme le modèle est viable, alors  $\psi(f(Z))$  est l’unique prix avec lequel l’actif conditionnel  $x$  puisse être évalué par arbitrage donc

$$\psi(f(Z)) = \hat{\pi}(x) = \mathbb{E}^*(f(Z))$$

■

# CONCLUSION

La réalisation de ce travail permet d'une part de confirmer l'importance des outils probabilistes à l'image des martingales dans les sciences relatives à l'ingénierie financière. Dans notre cas, on s'intéresse à la modélisation de l'évolution des prix des marchés des valeurs mobilières, qui sont considérés comme des processus stochastiques. Cette dynamique des prix est donc d'ordre temporel. Ainsi pour les évolutions à temps discret on a le modèle de Markov. L'extension au temps continu réside sur des résultats plus intéressants de modélisation de ce processus, on a le Processus de diffusion.

D'autre part avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et les outils précédents on peut déterminer le prix  $\hat{\pi}$  qui est l'évaluation par arbitrage d'un certain bien contingent tout en usant de la dynamique de ses prix. Nous avons considéré cette hypothèse de non existence d'opportunité d'arbitrage à cause de la rationalité des agents économiques.

# Bibliographie

- [1] K. J. ARROW, *The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing*, The Review of Economic Studies, Vol. 31, No. 2. Apr., 1964,91-96.
- [2] R. ANNEDANA, MONIQUE JEANBLANC, *Financial Markets in Continuous Time*, Springer Finance, 1998.
- [3] R. ASH, F. GARDNER, *Topics in Stochastic Processes*, Academic Press, New York,1975.
- [4] B. BOUCHARD, *Introduction à l'évaluation d'actifs financiers par absence d'opportunité d'arbitrage*, Notes de Cours Université Paris Daupiné Edition 1, 2006.
- [5] F. BLACK AND M. SHOLES, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, J. Poli. Econo. 81 (1973), 637 - 659.
- [6] N. BOULEAU, *Financial Markets and Martingales*, Springer, 1998.
- [7] P. BERNARD, *La décision dans l'incertain préférences, utilité et probabilités*
- [8] T. BJÖRK, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2ème Edition.,OXFORD University Press,2003.
- [9] C. COX, A. ROSS, *The Valuation of option for alternative stochastic processes*, J. Financial Econ. 3,1976, 145-166.
- [10] F. CAMPILLO, *Processus de Diffusion et Application en Finance*, DEA Mathématiques Appliquées Université de Provence, 1994.
- [11] M.CHUNG, *Acourse in Probability Theory*, Academic Press, New York, 2è édition 1974. 1987.
- [12] DARRELL DUFFIE, *Security Markets Stochastic Models*, Academic Press INC,1988.



- 
- [13] HARISON V.,
- [14] M. JEANBLANC, M. YOR, MARC CHESNEY , *Cours Fondement Mathématique de la Finance*, Cours AEA économétrie, Université d'Antananarivo, 2012.
- [15] I. KARATZAS AND STEVEN E. SHREEVE, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag,3è édition , 1982.
- [16] D. LAMBERTON, BERNARD LAPEYRE, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*,Chapman/Hall CRC,1996.
- [17] J. MARC TALLON, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin, 3ème édition, 1999.
- [18] J. MICHAEL HARRISON, , *Brownian Motion And Stochastic Flow Systems.* ,Krieger Publishing Company Malabar, FLORIDA,1985.
- [19] R. C. MERTON, *Theory of rationnal option pricing*, J.Econ. Manag.(1973) 141-183.
- [20] PIERRE PRIOURET, *Introduction aux Processus de Diffusion*, Notes de Cours pour les étudiants M2 Option : Probabilité et Finance, Université Pierre Marie Curie,2004. *Equilibre général Une introduction.*
- [21] D. REVUZ AND M. YOR, *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer, 2009.
- [22] STEVEN E.SHREVE, *Calcul Stochastic for finance I - II*, Springer - Verlag, 2003.
- [23] STEWART N. ETHIER THOMAS G. KURTZ , *Markov Processes Characterizationand Convergence* , Wiley Interscience, 1986.

**Impétrant :** RATSIMIHETRISOA Hasina Hasoferana

**e-mail :** rhhm10@yahoo.fr

**Tél :** (+261) 33 17 036 59

**Tél :** (+261) 34 03 173 37

**Titre :** MARTINGALE ET ARBITRAGE DANS LES MARCHES DES VALEURS MOBILIÈRES EN MULTIPERIODE

**Résumé :** Ce présent mémoire est mis en œuvre afin d'établir une modélisation des marchés des valeurs mobilières tout en usant les outils mathématiques d'optimisations et de probabilités et tous ceux qui y sont afférents. On part du fait que les agents sont rationnels d'une part et d'autre part il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage malgré la dynamique des prix. Ainsi dans un premier temps on a le modèle de Markov dans le cas où les prix évoluent à temps discret et dans le cas continu on utilise le modèle de diffusion.

**Mots clés :** opportunité d'arbitrage, rationalité des agents, temps discret, temps continu, modèle de Markov, modèle de diffusion.

**Abstract :** This present report is implemented in order to establish a modeling of securities markets while using the mathematical tools of optimizations and probabilities and all those which are related there. One leaves owing to the fact that the agents are rational on the one hand and on the other hand there is no free lunches in spite of the dynamics of the prices. Thus, initially, there is the model of Markov in the case or the prices evolve at discrete time and in the continuous case one uses the model of diffusion.

**Keywords :** no free lunches, rationality appropriateness of the agents, discrete time, continuous time, models of Markov, model of diffusion.

**Encadreur :** Mr HARISON Victor  
Professeur Titulaire  
Département de Mathématiques et Informatiques  
Facultés des Sciences  
Université d'Antananarivo