

Table des matières

Introduction	3
1 Fluides newtoniens et non newtoniens	4
1.1 Généralités	4
1.1.1 Viscosité	4
1.1.2 Expérience de Newton	4
1.1.3 Tenseur de taux des déformations	5
1.2 Fluides newtoniens	6
1.2.1 Loi de Newton	7
1.2.2 Loi de mouvement	7
1.2.3 Fluide incompressible	7
1.2.4 Classe d'écoulements	7
1.2.5 Les théorèmes locaux	9
1.3 Fluides non newtoniens	9
1.3.1 Viscosité des fluides non newtoniens	10
1.3.2 Différents types des fluides non newtoniens	10
1.3.3 Comment savoir le type d'un fluide non newtonien ?	11
1.3.4 Frottement à la paroi et Coefficient de traîné	12
2 Couche Limite	13
2.1 Nombre de Reynolds	13
2.1.1 Nombre de Reynolds et le régime d'écoulement	13
2.1.2 Signification physique du nombre de Reynolds	14
2.2 Écoulement réel	14
2.3 Changement de vitesse	15
2.4 Définition de la couche limite	15
2.5 Condition d'existence de la couche limite	15
2.6 Paramètre caractéristique de la couche limite	16
2.6.1 L'épaisseur de la couche limite	16
2.6.2 L'épaisseur de déplacement	16
2.6.3 L'épaisseur de quantité de mouvement	17
2.6.4 L'épaisseur de l'énergie cinétique	17
2.7 Équation de la couche limite dynamique isovolume	17
2.7.1 Modèle de Navier Stokes incompressible	17
2.7.2 Modèle de Prandtl	18
2.7.3 Solutions particulières	22

3	Couche limite de l'écoulement du fluide de Reiner- Philippoff	29
3.1	Hypothèses	29
3.2	Équations de la couche limite de fluide non newtonien incompressible	30
3.2.1	Équations gouvernantes	30
3.2.2	Formulation du problème	30
3.3	Cas particulier : Couche limite du fluide de Reiner - Philippoff	31
3.3.1	Solution auto-similaire	32
3.3.2	Solution non auto-similaire	37
	Annexe	49
	Bibliographie	51

Introduction

Le problème de couche limite des fluides non newtoniens a été analysé depuis plusieurs années. Des travaux de ce type sont donnés dans les références [1]- [13]. Ce travail est basé sur un article publié par **Hansen et Na** [4]. Dans lequel ils ont prouvé que sur la classe générale des fluides non newtoniens, la solution autosimilaire de l'équation de couche limite existe seulement pour le cas d'un écoulement autour d'un obstacle d'angle au sommet 90° . Les équations différentielles sont non linéaires mais la solution peut être réduite à la solution d'une équation différentielle ordinaire non linéaire. Le problème est difficile parce que, en plus de la difficulté naturelle dans la solution de la couche limite, qui est une équation différentielle non linéaire, (3.10) la combinaison non linéaire de la contrainte de cisaillement avec le taux des contraintes de plusieurs modèles posent des problèmes.

(3.3.2) Dans ce mémoire, nous considérons le cas plus général de la couche limite de l'écoulement du fluide de Reiner-Philippoff pour d'autres obstacles. (3.3.2) Une formulation générale est donnée pour la résolution des équations de couche limite associée au divers types d'obstacles. On utilise la méthode des différences finies. Nous prendrons Comme exemple, la solution classique de la couche limite de l'écoulement sur une plaque plane, connue comme la solution de Blasius.

Nous avons étudié ce modèle non newtonien particulier car il représente correctement cette classe de fluide et [14] les résultats obtenus pourraient être étendus aux autres modèles non newtoniens. En d'autre terme, l'analyse présent introduit une méthode de formulation qui peut être appliquée à la couche limite de tout fluide non newtonien sur toute forme d'obstacle dans laquelle le gradient de vitesse est exprimé explicitement comme une fonction de contrainte de cisaillement.

Ce mémoire est organisé comme suit. Dans le chapitre 1, nous présentons les notions de fluide newtonien et non newtonien. Dans le chapitre 2, nous exprimons les équations gouvernantes de la couche limite des fluides incompressibles, en particulier le modèle de stockes et celui de Prandtl. Les équations de Blasius et Falkner - Skan seront aussi exposées et enfin, nous consacrons le dernier chapitre à formulation du modèle et la résolution du problème de la couche limite du fluide de Reiner- Philippoff.

Chapitre 1

Fluides newtoniens et non newtoniens

1.1 Généralités

Un fluide est un liquide ou un gaz qui se déforme de manière continue sous l'action de la moindre force de cisaillement. Il n'a pas de forme propre : si on place un liquide dans un récipient, il prend la forme de ce dernier. Un fluide est synonyme de substance dont les éléments constitutants se mettent en mouvement. C'est pourquoi, un fluide s'écoule.

Un fluide est visqueux s'il n'a pas de liberté totale lors du mouvement.

Ici, on s'intéresse au mouvement des fluides autour d'un dièdre d'angle au sommet $\pi\beta$

1.1.1 Viscosité

[8] La viscosité μ est un des principaux paramètres mesurés lors de l'étude de l'écoulement des fluides. Certains fluides s'écoulent plus facilement que l'autre : ainsi, un récipient rempli d'eau se vide facilement qu'un récipient rempli de miel. Le miel est donc plus visqueux que l'eau. Les fluides fortement visqueux nécessitent donc plus de force pour se déplacer.

La viscosité exprime le degré de rigidité d'un fluide aux forces qui lui sont appliquées (contraintes). Elle traduit la difficulté à faire s'écouler ou s'étaler.

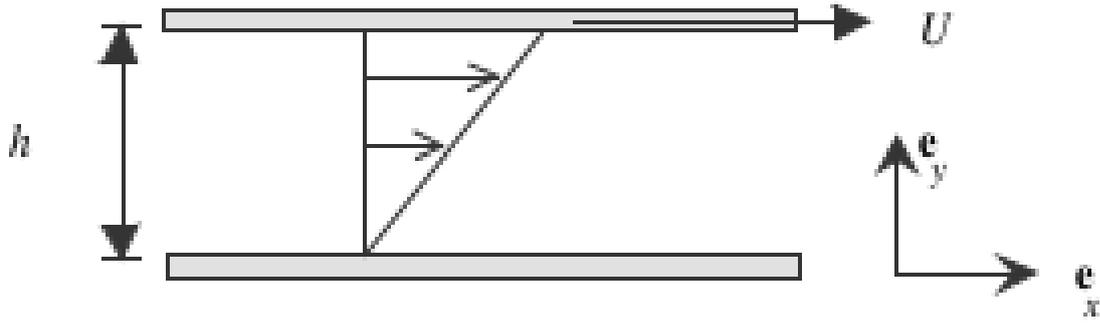
1.1.2 Expérience de Newton

[?] Pour mieux comprendre la viscosité d'un fluide, Isaac Newton suggère une expérience pour mesurer la résistance de fluide au mouvement. Dans l'expérience, on considère l'écoulement entre l'espacement de deux plaques planes parallèles de même aire \mathcal{A} séparées par une petite distance h . La plaque inférieure est fixée et l'autre mobile dans son propre plan à une vitesse \vec{U} sous l'action d'une force de cisaillement F_x . On observe pour des nombreux fluides tels que l'air et l'eau que la vitesse entre les plaques varie linéairement de zéro à U d'une plaque à l'autre :

$$u(y) = \left(\frac{y}{h}\right)U. \quad (1.1)$$

Cet expérience suggère que la force de cisaillement F_x qu'il faut nécessaire pour maintenir la plaque supérieure en mouvement est proportionnelle à la vitesse U ainsi que l'aire \mathcal{A} de la plaque et inversement proportionnelle à la distance h :

$$\frac{F_x}{\mathcal{A}} = \mu \left(\frac{U}{h}\right) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.2)$$



Le coefficient de proportionnalité μ est appelé viscosité dynamique, elle dépend en générale de la température.

La contrainte de cisaillement (ou force par unité de surface) est donnée par :

$$\tau_{xy} = \frac{F_x}{\mathcal{A}} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.3)$$

1.1.3 Tenseur de taux des déformations

Un fluide étant un milieu continu déformable, on va exprimer les déformations des particules fluides au cours de leurs mouvements. Soit au même instant, dans un plan, une particule fluide située en $M(x, y)$ et une autre située en un point très voisin $M'(x + dx, y + dy)$. Soit O un point de référence, le vecteur position de M' s'écrit :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + d(\overrightarrow{OM}). \quad (1.4)$$

Le vecteur vitesse en M' a pour expression :

$$\overrightarrow{V'}(M', t) = \overrightarrow{V}(M, t) + d\overrightarrow{V}. \quad (1.5)$$

Ses composantes sont :

$$v'_i = v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x} dx + \frac{\partial v_i}{\partial y} dy \quad i = x, y. \quad (1.6)$$

Matriciellement on aura :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

En introduisant le tenseur gradient du champ des vitesses $\overline{\overline{gradV}}$, on a :

$$\overrightarrow{V'}(M', t) = \overrightarrow{V}(M, t) + \overline{\overline{gradV}} d\overrightarrow{OM}. \quad (1.8)$$

Pour comprendre les différentes causes du mouvement relatif des deux particules, il est commode de décomposer le tenseur $\overline{\overline{gradV}}$ en une somme d'un tenseur symétrique $\overline{\overline{D}}$ et d'un tenseur antisymétrique $\overline{\overline{\omega}}$, en écrivant que :

$$\overline{\overline{gradV}} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.9)$$

Les composantes de ce deux tenseurs sont exprimées respectivement par :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec } i = x, y. \quad (1.10)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec } i = x, y \quad (1.11)$$

la relation (1.8) devient :

$$V(M', t) = V(M, t) + \overline{\overline{D}}.dOM + \overline{\overline{\omega}}.dOM. \quad (1.12)$$

La vitesse de la particule située en M' est donc la somme de trois termes représentant respectivement un mouvement de translation d'ensemble des particules fluides, un mouvement dû à la déformation du fluide et un mouvement de rotation. Le tenseur symétrique $\overline{\overline{D}}$ (où $D_{ij} = D_{ji}$) est appelé tenseur des taux de déformation et définit par :

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

1.2 Fluides newtoniens

Un fluide Newtonien est un fluide où le tenseur de contrainte est une fonction affine du tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}}$:

$$\sigma = f(\overline{\overline{D}}). \quad (1.14)$$

Pour les fluides Newtoniens, le tenseur de contrainte est défini par :

$$\sigma = 2\mu \overline{\overline{D}} + (\lambda \text{tr}(\overline{\overline{D}}) - p) G \quad (1.15)$$

avec G est la matrice unité définie par :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Le fluide parfait est un cas particulier d'un fluide Newtonien où les coefficients de viscosité μ et λ sont nuls. Ainsi l'équation (1.15) devient :

$$\sigma = -pG \quad (1.17)$$

où G est la matrice unité.

1.2.1 Loi de Newton

[8] On appelle fluide Newtonien, tout fluide qui obéit la loi de Newton :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.18)$$

Il existe des fluides newtoniens dont le comportement est différent et peuvent supporter une contrainte de cisaillement τ_0 avant de se mettre en mouvement tels que les fluides dénommés fluides de Bingham. La variation des contraintes de cisaillement est linéaire avec le gradient de vitesse et décrite par :

$$\tau_{xy} = \tau_0 + \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.19)$$

1.2.2 Loi de mouvement

[3] Pour un fluide Newtonien, l'équation du mouvement dans le cas général est :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}}(p) + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{V}) + \mu \Delta \vec{V} \quad (1.20)$$

$$\text{avec } \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(V^2) + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \wedge \vec{V}. \quad (1.21)$$

\vec{f} : densité volumique des forces extérieures

$\frac{d\vec{V}}{dt}$: terme instationnarité.

1.2.3 Fluide incompressible

Un fluide est incompressible si :

$$\text{div}\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ainsi, La trace du tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}} = D_{ii} = 0$.

1.2.4 Classe d'écoulements

Considérons un écoulement bidimensionnel muni de la vitesse $\vec{V}(u, v)$. Cet écoulement peut vérifier certaines propriétés comme : l'irrotationalité, la stationnarité et l'incompressibilité.

1.2.4.1. Écoulement irrotationnel

Un écoulement est irrotationnel si :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = 0. \quad (1.22)$$

La particule fluide ne tourne pas sur elle-même au cours du mouvement. L'irrotationalité de l'écoulement engendre un potentiel de vitesse ϕ défini, en coordonnée cartésien par :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi = \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}. \quad (1.23)$$

1.2.4.2. *Écoulement permanent*

On dit que l'écoulement d'un fluide est permanent si :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0.$$

Ainsi, l'équation (1.21) gouvernante du mouvement de fluide Newtonien devient :

$$\frac{d \vec{V}}{dt} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(V^2) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V}. \quad (1.24)$$

1.2.4.3. *Écoulement isovolume*

Un écoulement isovolume vérifie la condition :

$$\text{div} \vec{V} = 0.$$

Le volume de la particule reste constant mais sa forme peut changer, pour cette classe d'écoulement, il existe une fonction potentielle vecteur ψ vérifiant :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} \psi. \quad (1.25)$$

En dimension deux, il existe une fonction de courant φ telle que :

$$\vec{\psi} = \varphi \vec{k}. \quad (1.26)$$

où \vec{k} est un vecteur orthogonal au plan de mouvement. L'équation (1.25) devient :

$$\vec{V} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{rot}} (\varphi \vec{k}) = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \wedge \vec{k}. \quad (1.27)$$

Dans le système des coordonnées cartésiennes bidimensionnel, On a par définition :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \wedge \vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

L'équation (1.26) et (1.27) nous donnent alors :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}. \quad (1.29)$$

1.2.5 Les théorèmes locaux

Pour des fluides newtoniens, les inconnues dans l'équation de la loi de comportement sont la vitesse et la pression, ces sont les inconnues natives. Voici quelques théorème qui nous permettent d'écrire des relations entre ces deux grandeurs :

Théorème 1.2.5.1. : Premier théorème de Bernoulli

Si un écoulement est irrotationnel, isovolume et les forces des volumes dérivant d'un potentiel alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathcal{F} = \text{Constante} \quad \text{en tout point} \quad (1.30)$$

où ϕ est le potentiel vitesse défini par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = u \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = v \end{cases} .$$

Théorème 1.2.5.2. : Deuxième théorème de Bernoulli

Maintenant, on suppose que l'écoulement est incompressible, mouvement stationnaire d'un fluide parfait à forces volumiques dérivants d'un potentiel. On aura dans ce cas :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathcal{F} = \text{constante} \quad \text{sur toute le ligne de courant en tout instant.} \quad (1.31)$$

Théorème 1.2.5.3. : Théorème de Saint Venant

On considère un écoulement bidimensionnel de vitesse $\vec{V}(u, v)$ d'un fluide parfait. Si le comportement est isotrope c'est à dire $p = C\rho^\gamma$ alors :

$$\frac{v^2}{2} + u + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = C^{te}. \quad (1.32)$$

1.3 Fluides non newtoniens

Définition 1.3.1.

Un grand nombre de fluides suit la loi de newton :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Mais dès que le comportement d'un fluide diverge de ce modèle, il est alors regroupé dans une autre catégorie appelée « modèle non newtonien ».

Définition 1.3.2.

Un fluide est non newtonien si le tenseur de contrainte n'est plus une fonction affine du tenseur des taux de déformations. Ces fluides n'obéissent pas à la loi de Newton. Dans notre quotidien, il existe des fluides non newtoniens à l'état solide et à l'état liquide comme les miels, les boues, ainsi que les poudres comme les sels ou les sables.

Définition 1.3.3.

Les fluides non newtoniens ne sont pas prévisibles, leur viscosité, qui est la tendance des fluides à s'écouler plus ou moins facilement, est parfois dépendante de la force appliquée.

1.3.1 Viscosité des fluides non newtoniens

[21] Lorsque on fait augmenter la force qu'on agit sur un fluide non newtonien, sa viscosité va diminuer ou augmenter. On distingue deux types de fluide non newtonien : les fluides rhéofluidifiants et les fluides rhéoépaississants.

1.3.1.1. *Fluides rhéofluidifiants*

Ces sont des fluides dont la viscosité diminue lorsque la force auquel il est soumis s'accroît. Le dentifrice est un exemple de ce fluide : il sort lorsqu'on presse le tube qui le contient, cela montre la diminution de sa viscosité.

1.3.1.2. *Fluides rhéoépaississants*

Par contre, la viscosité des fluides rhéoépaississants augmente quand la force soumis s'accroît. C'est le cas d'une argile verte. Elle se solidifie si on la presse.

1.3.2 Différents types des fluides non newtoniens

Les fluides non newtoniens se divisent en deux catégories principaux :

1.3.2.1. *Fluides non newtoniens au caractère dépendant du temps*

Les fluides non newtoniens dont la viscosité change à tout instant lorsqu'ils sont soumis à une contrainte constante sont : les fluides thixotropes, les fluides antithixotropes et les fluides viscoélastiques.

1.3.2.0.1. *Fluides thixotropes :*

Si on exerce une contrainte constante à ces fluides, à tout instant, leur viscosité diminue . Si on retire la contrainte, c'est à dire à l'arrêt du cisaillement, leur viscosité augmente avec le temps. Ce qui traduit la réversibilité du phénomène. C'est le cas du sauce tomate concentré. Si on applique une contrainte constante sur ce sauce, il se fluidifie et si on enlève la contrainte il reprend son état initial.

1.3.2.0.2. *Fluides anthixotropes :*

Ce n'est pas le cas pour les fluides antixotropes. Ces sont des fluides qui ont une viscosité qui augmente lorsqu'une force constante lui est appliquée sans être retirée.

1.3.2.0.3. *Fluides viscoélastiques :*

Un solide ou un fluide viscoélastique présente des changements consécutifs d'un état à un autre lorsqu'il est soumis à une contrainte constante. Sous cisaillement, ces matériaux subissent une déformation instantanée comme un solide élastique, puis continuent à se déformer de manière continue comme un liquide visqueux. A l'arrêt du cisaillement, les matériaux reprennent en partie ses formes.

1.3.2.2. *Fluides dont la viscosité dépend du taux de cisaillement*

Il existe des fluides non newtoniens dont la viscosité varie en fonction du taux de cisaillement : ces sont les fluides rhéofluidifiants, les fluides rhéoépaississants et les fluides à seuil.

1.3.2.0.4. *Les fluides rhéofluidifiants*

La viscosité de certains fluides non newtoniens diminue lorsque le taux de cisaillement augmente, comme exemple, le sang : il se fluidifie quand la contrainte appliquée sur lui augmente.

1.3.2.0.5. *Les fluides rhéoépaississants*

Contrairement, la viscosité des fluides rhéoépaississants augmente avec le taux de cisaillement. L'amidon de maïs est un exemple de fluide de ce type. En effet, lorsque la contrainte qui s'exerce sur lui augmente, il se solidifie.

1.3.2.0.6. *Les fluides à seuil*

Ces derniers sont des fluides qui ne coulent qu'à partir d'une certaine contrainte seuil. C'est le cas des dentifrices. Tout le monde a déjà remarqué que lorsqu'on retourne un tube de dentifrice, rien ne tombe. On peut en déduire que lorsque on applique une certaine contrainte σ au dentifrice, il se fluidifie, c'est à dire, sa viscosité diminue et donc il sort de son tube. Afin de mieux comprendre ces classifications, voici un tableau récapitulatif :

Fluides à caractère dépendant de la contrainte			Fluides à caractère dépendant du temps	
Rhéofluidifiants	Rhéoépaississants	A seuil	Thixotrope	Antithixotrope

1.3.3 Comment savoir le type d'un fluide non newtonien ?

1.3.3.1. *Modèle d'Oswald :*

[11] Le modèle d'Oswald nous permet de savoir de quel type de fluide non newtonien il s'agit. En effet, si on insère la formule :

$$\sigma = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n$$

dans la définition de la viscosité :

$$\mu = \frac{\sigma}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

on obtient la formule suivante :

$$\mu = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1}. \quad (1.33)$$

1.3.3.2. *Interprétation*

La valeur de n indique la caractéristique du fluide.

- Si $n < 1$: la viscosité μ diminue avec le taux de cisaillement C'est donc un fluide rhéofluidifiant.
- Si $n > 1$: La vitesse μ augmente avec le taux de cisaillement. Donc cela correspond au caractère de fluide rhéoépaississant.
- Si $n = 1$: La viscosité $\mu = K =$ constante donc on a un fluide Newtonien.

1.3.4 Frottement à la paroi et Coefficient de traîné

On note par τ_ω la contrainte de frottement visqueux à la paroi. On rappelle que la contrainte de frottement à la paroi s'écrit sous la forme :

$$\tau_\omega(x) = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}^n. \quad (1.34)$$

La contrainte τ_ω dépend de x . Comme le gradient de vitesse évolue le long de la plaque plane, on adimensionnalise la contrainte locale à la paroi par $\frac{1}{2}\rho U^2$. Sur une plaque plane, le coefficient de frottement est défini par :

$$C_f(x) = \frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2}\rho U^2}. \quad (1.35)$$

$$C_f(x) = \frac{K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}^n}{\frac{1}{2}\rho U^2}. \quad (1.36)$$

Chapitre 2

Couche Limite

2.1 Nombre de Reynolds

Considérons un écoulement de vitesse caractéristique U sur un obstacle de dimension L , d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité μ . Le nombre de Reynolds de cet écoulement est le nombre sans dimension :

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}. \quad (2.1)$$

2.1.1 Nombre de Reynolds et le régime d'écoulement

Le nombre de Reynolds caractérise un écoulement. En effet, à partir de la connaissance de la valeur de ce nombre, on peut savoir la nature du régime d'écoulement :

2.1.1.1. *Régime laminaire*

Un régime laminaire correspond à un nombre de Reynolds inférieur à une valeur critique environ 3×10^5 . Pour ce régime d'écoulement, les lignes de courants sont bien identifiées. Plus on s'éloigne de la paroi, plus l'effet de la viscosité diminue et les vitesses du fluide tendent à s'homogénéiser.

2.1.1.2. *Régime turbulent*

A partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds, il se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des déformations. Les instabilités augmentent au point de donner naissance au phénomène de la turbulence.

Les écoulements turbulents sont caractérisés par cinq propriétés : ces sont des écoulements instationnaires, non linéaires, diffusifs, dissipatifs et imprédictibles.

2.1.1.0.7. *Phénomène instationnaire et non linéaire :*

Les écoulements turbulents sont fortement instationnaires avec des variations irrégulières. Les équations de Navier Stokes qui gouvernent les écoulements de fluide présentent des termes non linéaires.

2.1.1.0.8. *Phénomène dissipatif*

La dissipation de l'énergie cinétique se produit à cause de la viscosité du fluide. L'énergie cinétique se transforme en énergie interne (élévation de température)

2.1.1.0.9. *Phénomène diffusif* :

Les écoulements turbulents ont la propriétés d'avantager le mélange par diffusion de quantité de mouvement, de chaleur et de masse.

2.1.1.0.10. *Phénomène imprédictible* :

Il est difficile de prédire le comportement d'une solution des équations de Navier Stokes quel que soit le temps .Un exemple de ce comportement imprédictible est donné par les prévisions météorologiques : on ne sait pas exprimer mathématiquement l'unicité des solutions des équations de Navier Stokes avec des conditions initiales quel que soit le temps

2.1.2 Signification physique du nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inerties et les forces de viscosités.

$$R_e = \frac{\text{Forces d'inerties}}{\text{Forces de viscosités}}. \quad (2.2)$$

- Pour une valeur de $R_e \ll 1$, l'écoulement est gouverné par la viscosité et dans ce cas, les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables.
- Pour une valeur plus élevée de R_e , les forces d'inertie dominant : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

2.2 Écoulement réel

Considérons un écoulement réel d'un fluide de vitesse \vec{V} sur un obstacle animé d'une vitesse \vec{w} dans le sens contraire de l'écoulement. On note par \vec{n} et \vec{t} les vecteurs normal et tangent aux parois de l'obstacle.

Si le corps sur lequel l'écoulement passe, est imperméable, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

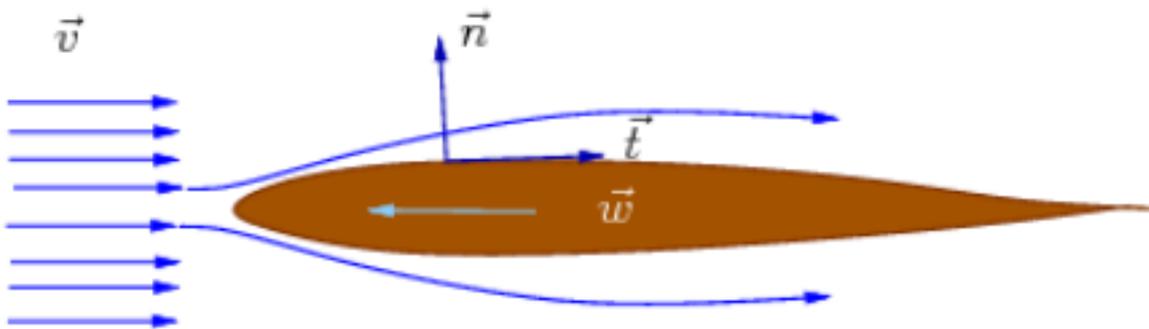


FIGURE 2.1 – Ecoulement sur un obstacle

1. La non-pénétration du fluide aux frontières imperméable :

Cette condition se traduit par :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = -\vec{\omega} \cdot \vec{n}. \quad (2.3)$$

2. Condition de non-glissement :

cette condition se traduit par :

$$\vec{V} \cdot \vec{t} = -\vec{\omega} \cdot \vec{t}. \quad (2.4)$$

Par conséquent, pour un obstacle au repos, passé par un écoulement de vitesse \vec{V} , les conditions de non-pénétration et non-glissement s'écrivent comme :

$$\begin{cases} \vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{V} \cdot \vec{t} = 0 \end{cases}. \quad (2.5)$$

2.3 Changement de vitesse

En éloignant ou en approchant la paroi, la vitesse de l'écoulement change : toute particule fluide en contact avec la paroi est immobile, le fluide se comporte alors comme un fluide visqueux. Près de la paroi, la particule fluide ralentit et sa vitesse augmente peu à peu s'il s'éloigne de l'obstacle.

2.4 Définition de la couche limite

On suppose que l'écoulement est bidimensionnel plan, permanent, le fluide est incompressible et la force volumique est négligeable.

La couche limite est une région de faible épaisseur produite par l'écoulement d'un fluide visqueux à grand nombre de Reynolds en présence d'un corps ou obstacle.

2.5 Condition d'existence de la couche limite

Pour que la couche limite existe, il faut que le nombre de Reynolds $R_e = \frac{UL_0}{\nu}$ (nombre sans dimension) soit grand où :

L_0 : Longueur de référence pour l'advection

ν : viscosité cinématique

U : composante de la vitesse suivant x .

Dans cette zone, le gradient de vitesse $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ soit très grand.

Si ce nombre de Reynolds est inférieur à la valeur critique, environ 3×10^6 , on a une couche limite laminaire sinon, la couche limite est turbulence.

2.6 Paramètre caractéristique de la couche limite

2.6.1 L'épaisseur de la couche limite

Conventionnellement, l'épaisseur de la couche limite δ est définie comme étant la distance à partir de la paroi des obstacles pour laquelle la vitesse dans la couche limite vaut :

$$u(\delta) = 0,99 U_e \quad (2.6)$$

où $U_e = U$ est la vitesse à l'extérieur.

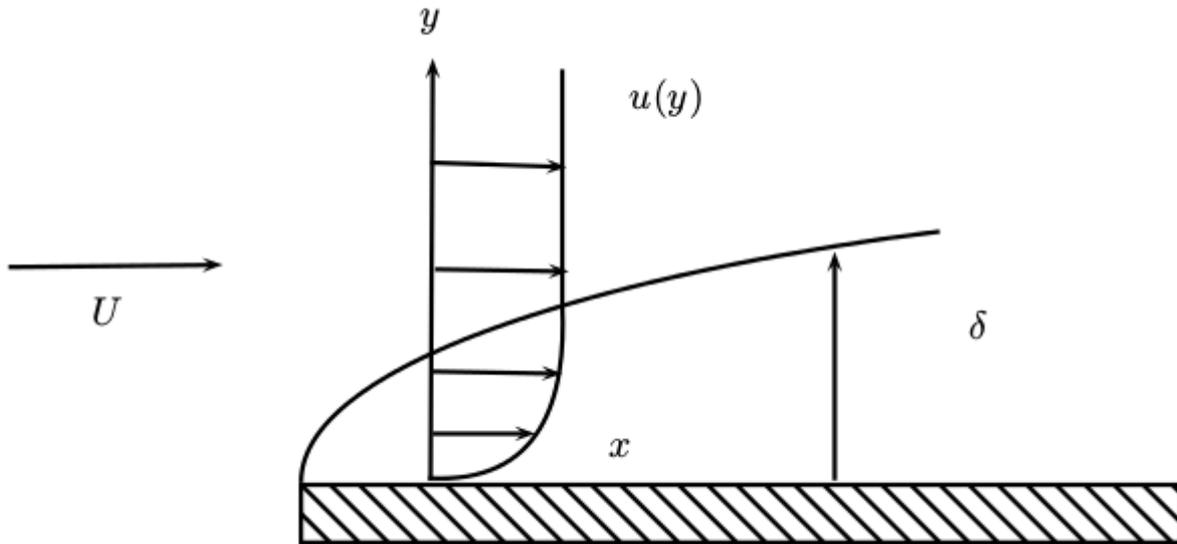


FIGURE 2.2 – Epaisseur de la couche limite sur une plaque plane

2.6.2 L'épaisseur de déplacement

Pour définir l'épaisseur de déplacement de la couche limite, nous allons comparer les débits volumique de fluide visqueux à celui d'un fluide parfait.

★ Soit Q_n le débit volumique pour l'écoulement non-visqueux :

$$Q_n = \int_0^{h \rightarrow \infty} U_e dy. \quad (2.7)$$

★ Soit Q_v le débit volumique pour l'écoulement visqueux :

$$Q_v = \int_0^{h \rightarrow \infty} u dy. \quad (2.8)$$

L'épaisseur de déplacement δ_1 décrit le manque de débit volumique $Q_n - Q_v$ comme si l'écoulement près de la paroi était en fluide non visqueux :

$$\begin{aligned}
 U_e \delta_1 &= \int_0^\delta U_e dy - \int_0^{h \rightarrow \infty} u dy \\
 &= \int_0^\delta (U_e - u) dy \quad (\text{car } U_e - u = 0 \text{ si } y \geq \delta) \\
 &= \int_0^\delta \frac{1}{U_e} (U_e - u) dy \\
 &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy.
 \end{aligned}$$

2.6.3 L'épaisseur de quantité de mouvement

On définit l'épaisseur de la quantité de mouvement δ_2 par :

$$\begin{aligned}
 U_e^2 \delta_2 &= \int_0^\delta U_e u dy - \int_0^\delta u^2 dy \\
 &= \int_0^\delta (U_e u - u^2) dy \\
 \delta_2 &= \int_0^\delta \frac{u}{U_e} (U_e - u) dy \\
 &= \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy.
 \end{aligned}$$

2.6.4 L'épaisseur de l'énergie cinétique

On définit l'épaisseur de l'énergie cinétique par :

$$\begin{aligned}
 U_e(U_e \delta_3) &= \int_0^\delta U_e^2 u dy - \int_0^\delta u^3 dy \\
 \delta_3 &= \int_0^\delta \frac{1}{U_e^3} (U_e^2 u - u^3) dy \\
 &= \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u^2}{U_e^2}\right) dy
 \end{aligned}$$

2.7 Équation de la couche limite dynamique isovolume

Considérons un écoulement à grand nombre de Reynolds sur un obstacle dont la géométrie est plus particulière avec aplatissement.

Les équations de Navier Stokes incompressible, bidimensionnelle s' écrivent :

2.7.1 Modèle de Navier Stokes incompressible

2.7.1.1. Équation de continuité

L'équation de continuité bidimensionnelle en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.9)$$

2.7.1.2. Équation de la quantité de mouvement

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.10)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (2.11)$$

2.7.2 Modèle de Prandtl

2.7.2.1. Équations de Prandtl adimensionnelles

Pour avoir le modèle de Prandtl, on doit adimensionnaliser les équations de Navier Stokes. Pour cela, on introduit les variables sans dimensions : x^*, y^*, u^*, v^*, p^*

$$x = Lx^* \quad ; \quad y = \varepsilon Ly^* \quad ; \quad u = u_0 u^* \quad ; \quad v = \varepsilon' u_0 v^* \quad ; \quad p = p_0 p^* \quad ; \quad p_0 = \rho u_0^2 \quad (2.12)$$

★ L'équation de la continuité (2.9) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(Lx^*)} + \frac{\partial(\varepsilon' u_0 v^*)}{\partial(\varepsilon Ly^*)} &= 0 \\ \frac{u_0}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon' u_0}{\varepsilon L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

On définit respectivement la distorsion géométrique et la distorsion cinématique par :

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} = \varepsilon(R_e) = R_e^{-m} & \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}_+ \\ \frac{v}{u} = \varepsilon'(R_e) = R_e^{-n} & \quad \text{avec } n \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

L'équation (2.13) devient :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + R_e^{m-n} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0.$$

Si $m < n$, on a R_e^{m-n} est petit et ainsi $\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0$: dégénérescence à éviter.

Si $m > n$, le nombre R_e^{m-n} est grand et par conséquent $\frac{\partial v^*}{\partial x^*} = 0$: deuxième cas de dégénérescence à éviter.

Ainsi, on doit prendre $m = n$ et on obtient $\varepsilon = \varepsilon'$. Cette égalité exprime l'hypothèse de Prandtl :

on a l'égalité entre la distorsion géométrique et la distorsion cinématique.

L'équation (2.13) se réduit à :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.14)$$

★ l'équation de la quantité de mouvement longitudinale (2.10) devient :

$$u_0 u^* \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(Lx^*)} + \varepsilon' u_0 v^* \frac{\partial(u_0 u^*)}{\partial(\varepsilon Ly^*)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p_0 p^*)}{\partial(Lx^*)} + \nu \left(\frac{\partial^2(u_0 u^*)}{L^2 \partial x^* \partial x^*} + \frac{\partial^2(u_0 u^*)}{\varepsilon^2 L^2 \partial y^* \partial y^*} \right)$$

$$\frac{u_0^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon' u_0^2}{\varepsilon L} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_0}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu \left(\frac{u_0}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial x^*} + \frac{u_0}{\varepsilon^2 L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^* \partial y^*} \right).$$

Après la multiplication par $\frac{L}{u_0^2}$, on obtient :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_0}{u_0^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{u_0 L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial x^*} + \frac{\nu}{\varepsilon^2 u_0 L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^* \partial y^*}. \quad (2.15)$$

Puisque $R_e \gg 1$ donc $\frac{1}{R_e} = \frac{\nu}{u_0 L} \ll 1$ et l'équation (II.18) devient :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_0}{u_0^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{\varepsilon^2 u_0 L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^* \partial y^*}.$$

Par le principe de moindre dégénérescence, on a $\varepsilon = \varepsilon'$ et $\frac{\nu}{\varepsilon^2 u_0 L} = 1$.

Finalement, on obtient :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^* \partial y^*}. \quad (2.16)$$

★ De la même manière, l'équation de la quantité de mouvement transversale (2.11) devient :

$$u_0 u^* \frac{\partial(\varepsilon u_0^*)}{\partial(Lx^*)} + (\varepsilon' u_0 v^*) \frac{\partial(\varepsilon' u_0 v^*)}{\partial(\varepsilon Ly^*)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p_0 p^*)}{\partial(\varepsilon Ly^*)} + \nu \left(\frac{\partial^2(\varepsilon' u_0 v^*)}{L^2 \partial x^* \partial x^*} + \frac{\partial^2(\varepsilon' u_0 v^*)}{\varepsilon^2 L^2 \partial y^* \partial y^*} \right)$$

$$\frac{\varepsilon u_0^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon'^2 u_0^2}{\varepsilon L} v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_0}{\varepsilon L} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu \left(\frac{\varepsilon' u_0}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial x^*} + \frac{\varepsilon' u_0}{\varepsilon^2 L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^* \partial y^*} \right).$$

En tenant compte de l'égalité $\varepsilon = \varepsilon'$ et en multipliant par $\frac{L}{u_0^2}$ cette dernière équation, on a :

$$\varepsilon u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \varepsilon v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_0}{\varepsilon u_0^2} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu \frac{\varepsilon}{u_0 L} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial x^*} + \nu \frac{1}{\varepsilon u_0 L} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^* \partial y^*}$$

En faisant la division membre à membre par ε^2 , on a :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_0}{\varepsilon^2 u_0^2} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\nu}{u_0 L} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial x^*} + \frac{\nu}{\varepsilon^2 u_0 L} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^* \partial y^*}.$$

On sait que $\varepsilon^2 = \frac{\nu}{u_0 L}$, on aura :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial x^*} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^* \partial y^*}$$

En multipliant par $\varepsilon^2 = \frac{1}{Re}$, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial x^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^* \partial y^*}. \\ 0 &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Finalement, le modèle de Prandtl adimensionnel s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^* \partial y^*} \\ 0 = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} \end{cases} \quad (2.18)$$

2.7.2.2. Équations de Prandtl dimensionnelles

Le modèle de Prandtl dimensionnel est obtenu en substituant les expressions de l'équation (2.12) dans (2.17) et en appliquant l'hypothèse : $\varepsilon = \varepsilon'$.

★ La première équation de (2.17) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= \frac{\partial \left(\frac{u}{u_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L} \right)} + \frac{\partial \left(\frac{v}{\varepsilon u_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\varepsilon L} \right)} = 0 \\ \frac{L}{u_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\varepsilon L}{\varepsilon u_0} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

★ La deuxième équation de (2.17) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_0} \frac{\partial \left(\frac{u}{u_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L} \right)} + \frac{v}{\varepsilon u_0} \frac{\partial \left(\frac{u}{u_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{\varepsilon L} \right)} &= -\frac{\partial \left(\frac{p}{p_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L} \right)} + \frac{\partial^2 \left(\frac{u}{u_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\varepsilon L} \right) \partial \left(\frac{y}{\varepsilon L} \right)} \\ \frac{uL}{u_0^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{vL}{u_0^2} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{L}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2 L^2}{u_0} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}. \end{aligned}$$

On a vu que $\varepsilon^2 = \frac{\nu}{u_0 L}$, ainsi :

$$\frac{uL}{u_0^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{vL}{u_0^2} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{L}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{u_0 L} \frac{L^2}{u_0} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}.$$

En multipliant membre à membre par $\frac{u_0^2}{L}$, on aura :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0^2}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}.$$

On sait que $p_0 = \rho u_0^2$, on aura :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.20)$$

★ La dernière équation de (2.17) s'écrit :

$$0 = -\frac{\partial\left(\frac{p}{\rho_0}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\varepsilon L}\right)}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.21)$$

Les équation (2.18), (2.19) et (2.20) forment le modèle de Prandtl dimensionnel :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \quad (2.22)$$

La troisième équation montre que la pression ne varie pas dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. La pression dépend donc de x . On raisonne alors comme suit :

2.7.2.3. Condition supplémentaire

★ En tout point de la couche limite, la pression est égale en un point de même abscisse mais placé à l'extérieur de la couche limite.

★ Or à l'extérieur de la couche limite, le fluide peut être considéré comme fluide parfait. Les gradients des vitesses suivant y sont très faibles. On note la vitesse extérieure par u_e qui ne dépend pas de y .

★ Finalement, en appliquant la deuxième théorème de Bernoulli le long de ligne de courant à l'extérieur de la couche limite, on a :

$$\frac{u_e^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C^{te} \quad (2.23)$$

$$p(x) + \frac{1}{2}\rho U_e^2 = C^{te}. \quad (2.24)$$

En dérivant par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} = 0. \quad (2.25)$$

Le système d'équation (2.22) de Prandtl défini précédant devient :

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \quad (2.26)$$

2.7.3 Solutions particulières

2.7.3.1. Cas de la plaque plane : solution autosimilaire et equation de Blasius [18]

La résolution du système d'équations aux dérivées partielles précédent demande des astuces :

- Sur une plaque plane , **la vitesse à l'extérieur est constante** donc le terme $U_e \frac{dU_e}{dx}$ de (E) va disparaître et le système des equations (E) devient :

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \quad (2.27)$$

- On cherche le profil de vitesse $u(x, y, \nu, \theta)$ et $v(x, y, \nu, \theta)$. Pour cela, on introduit la relation :

$$\frac{u}{U_e} = f\left(\frac{y}{x}, Re_x\right). \quad (2.28)$$

Mais on sait que cette solution doit vérifier en tout abscisse x la condition :

$$u(x, \delta(x)) = 0,99 U_e.$$

Ainsi, l'équation (2.28) devient :

$$f\left(\frac{\delta(x)}{x}, Re_x\right) = 0,99 \quad \forall x. \quad (2.29)$$

et on sait que $\delta(x) \ll x$: hypothèse de Prandtl et $\frac{\delta(x)}{x}$ est fonction du nombre de Reynolds. C'est à dire :

$$\frac{\delta(x)}{x} = A(Re_x) = \frac{K}{Re_x^b} \quad \text{avec } b \in \mathbb{R}_+.$$

L'équation (2.29) devient :

$$f\left(A(Re_x), Re_x\right) = 0,99 \quad \forall x.$$

La seule possibilité pour que la condition ci-dessus soit vérifiée $\forall x$ est que f soit de la forme :

$$f(x_1, x_2) = g\left(\frac{x_1}{A(x_2)}\right) \quad \forall x \quad (2.30)$$

et donc d'après (2.28), on aura :

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_e} &= g\left(\frac{\frac{y}{x}}{A(Re_x)}\right) \quad \forall x \\ &= g\left(\frac{y}{\delta(x)}\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pour $A(Re_x) = \frac{K}{\sqrt{Re_x}}$:

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_e} &= g\left(y \cdot \frac{\sqrt{Re_x}}{K x}\right) \\ &= g\left(\frac{y}{K} \sqrt{\frac{Re_x}{x^2}}\right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Par définition :

$$Re_x = \frac{U_e x}{\nu} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_e} &= g\left(\frac{1}{K} \cdot y \sqrt{\frac{U_e x}{\nu x^2}}\right) \\ &= g\left(\frac{1}{K} \cdot y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}\right) \\ &= F\left(y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}\right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

L'équation (2.34) va permettre de résoudre les équations de (S). L'équation (2.34) est dite **autosimilaire**. On peut déduire l'expression de v en utilisant l'équation de la conservation de masses.

On pose $\eta = y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}$. L'équation (2.34) devient :

$$\frac{u}{U_e} = F(\eta).$$

La première équation de (E) nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= -U_e F'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&= -U_e F'(\eta) y \frac{-U_e}{\nu x^2} \\
&\quad 2\sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \\
&= \frac{1}{2} U_e F'(\eta) y \frac{U_e}{\nu x^2} \cdot \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} \\
&= \frac{1}{2x} U_e F'(\eta) y \sqrt{\frac{U_e^2 \nu x}{U_e \nu^2 x^2}} \\
&= \frac{1}{2x} U_e F'(\eta) y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \\
&= \frac{\eta}{2x} U_e F'(\eta) \\
&= \frac{U_e}{2x} \eta F'(\eta). \tag{2.35}
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \eta} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Par identification, on a (2.35) = (2.36)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \eta} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} &= \frac{U_e}{2x} \eta F'(\eta) \\
\frac{\partial v}{\partial \eta} &= \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} \frac{U_e}{2x} \eta F'(\eta) \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \eta F'(\eta). \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Par intégration par partie à x constant, on a :

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \left[\eta F(\eta) - \int_{\eta_0}^{\eta} F(s) ds \right]. \tag{2.38}$$

De plus :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{2.39}$$

$$= U_e F' \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}. \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_e F'' \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \quad (2.41)$$

$$= \frac{U_e^2 F'''}{\nu x}. \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -U_e F' \frac{\eta}{2x}. \quad (2.43)$$

La deuxième équation de (S) s'écrit alors comme suit :

$$-U_e F \times \frac{\eta}{2x} F' + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \left[\eta F(\eta) - \int_{\eta_0}^{\eta} F(s) ds \right] U_e F' \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} = \nu \frac{U_e^2 F'''}{\nu x} = \frac{U_e^2 F'''}{x} \quad (2.44)$$

$$-U_e^2 F F' \frac{\eta}{2x} + \frac{U_e^2}{2x} \left[\eta F'(\eta) - \int_{\eta_0}^{\eta} F(s) ds \right] F' = \frac{U_e^2 F'''}{x}. \quad (2.45)$$

En multipliant par $\frac{2x}{U_e^2}$ on a :

$$-F F' \eta + \left[\eta F(\eta) - \int_{\eta_0}^{\eta} F(s) ds \right] F' = 2F''' \quad (2.46)$$

$$-F F' \eta + \eta F F' - F' \int_{\eta_0}^{\eta} F(s) ds = 2F''' \quad (2.47)$$

$$F''' + \frac{1}{2} F' \int_{\eta_0}^{\eta} F(s) ds = 0 \quad (2.48)$$

. **Conditions aux frontières que F doit vérifier :**

Pour $y = 0$, on a $u = v = 0$ donc $F(0) = 0$

Pour $y = +\infty$, on a $u = U_e$ donc $F(+\infty) = 1$.

$$v(x, 0) = 0 \implies \int_{\eta_0}^{\eta} F(s) ds \implies \eta_0 = 0. \quad (2.49)$$

L'équation de **Blasius** est donnée par :

$$\boxed{F''' + \frac{1}{2} F' \int_0^{\eta} F(s) ds = 0}.$$

2.7.3.2. Couche limite sur un dièdre : Solution de Falkner et Skan [5] et [2]

★ Rappelons d'abord que la couche limite sur un obstacle admet une solution d'affinité si la distribution de la vitesse peut s'écrire de la forme :

$$U_e(x) = ax^m \quad \text{où } a, m \text{ sont des réels.} \quad (2.50)$$

★ Les solutions de Falkner-Skan sont des solutions particulières, correspondant à l'écoulement sur un trièdre symétrique dont l'angle au sommet est $\pi\beta$ et la vitesse de l'écoulement externe est de la forme :

$$U_e(x) = Kx^{\frac{\beta}{2-\beta}}. \quad (2.51)$$

En pose $m = \frac{\beta}{2-\beta}$, la distribution de la vitesse extérieure devient :

$$U_e(x) = Kx^m. \quad (2.52)$$

Cette dernière équation confirme l'existence de la solution d'affinité pour l'écoulement sur un dièdre. La fonction courant conforme à l'hypothèse d'affinité s'écrit alors :

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu x U_e} f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}. \quad (2.53)$$

De l'équation (2.26), le calcul de couche limite se fait à partir de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= m K^2 x^{2m-1} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= m \frac{U_e^2}{x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

On a d'après (3.8) :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= U_e f' \quad \text{voir annexe A (3.44)} \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[\frac{\nu U_e (m+1)}{2 \nu x U_e} \sqrt{\nu x U_e} f + \sqrt{\nu x U_e} f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \quad \text{voir annexe A (3.46)} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \right) \\ &= \frac{m-1}{2x} \eta \quad \text{voir annexe A (3.47)}. \end{aligned}$$

L'expression de v devient :

$$\begin{aligned} v &= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[\frac{\nu U_e (m+1)}{2 \nu x U_e} \sqrt{\nu x U_e} f + \sqrt{\nu x U_e} f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu x U_e} \left[\frac{m+1}{2x} f + f' \frac{m-1}{2x} \eta \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \left[-(m+1) f - (m-1) f' \eta \right]. \end{aligned}$$

On a aussi besoin de calculer les expressions suivantes pour pouvoir utiliser l'équation (2.54) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (U_e f') \\
 &= \frac{\partial U_e}{\partial x} f' + U_e \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 &= k m x^{m-1} f' + U_e f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 &= k m x^{m-1} f' + U_e f'' \frac{m-1}{2x} \eta \\
 &= \frac{m}{x} U_e f' + U_e f'' \frac{m-1}{2x} \eta \\
 &= \frac{U_e}{x} \left[m f' + \frac{m-1}{2} f'' \eta \right] \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= U_e \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= U_e f'' \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= U_e f''' \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \\
 &= \frac{m+1}{2} f''' \frac{U_e^2}{\nu x} \\
 u \frac{\partial u}{\partial x} &= U_e f' \frac{U_e}{x} \left[m f' + \frac{m-1}{2} f'' \eta \right] \\
 &= \frac{U_e^2}{x} \left[m f'^2 + \frac{m-1}{2} f' f'' \eta \right] \\
 v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \left[-(m+1) f + -(m-1) f' \eta \right] \times U_e f'' \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \\
 &= \frac{1}{2} U_e f'' \frac{U_e}{x} \left[-(m+1) f - (m-1) f' \eta \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{U_e^2}{x} f'' \left[-(m+1) f - (m-1) f' \eta \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{U_e^2}{x} \left[-(m+1) f f'' - (m-1) f' f'' \eta \right].
 \end{aligned}$$

L'équation (2.54) devient :

$$\frac{U_e^2}{x} \left[m f'^2 + \frac{(m-1)}{2} f' f'' \eta \right] + \frac{1}{2} \frac{U_e^2}{x} \left[-(m+1) f f'' - (m-1) f' f'' \eta \right] = m \frac{U_e^2}{x} + \nu \frac{m+1}{2} f''' \frac{U_e^2}{\nu x}.$$

En multipliant par $\frac{x}{U_e^2}$, on a :

$$\begin{aligned}
 m f'^2 + \frac{m-1}{2} f' f'' \eta - \frac{m+1}{2} f f''' - \frac{m-1}{2} f' f'' \eta &= m + \frac{m+1}{2} f''' \\
 m f'^2 - \frac{m+1}{2} f' f''' &= m + \frac{m+1}{2} f''' \\
 \frac{m+1}{2} f''' + m(1-f'^2) + \frac{m+1}{2} f f''' &= 0 \\
 f''' + \frac{2m}{m+1}(1-f'^2) + f f''' &= 0.
 \end{aligned}$$

En remplaçant m par $\frac{\beta}{2-\beta}$, on obtient la solution de Falkner- Skan :

$$\boxed{f''' + \beta(1 - (f')^2) + f f''' = 0 \quad \text{avec } f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f'(+\infty) = 1}$$

Il s'agit d'une equation différentielle ordinaire pour $f(\eta)$ dont on cherche la solution pour une valeur de β donnée. La solution existe seulement pour $\beta > -0,1988$:

Pour $-0,1988 < \beta < 0$, il existe deux solutions : pour l'une d'entre elles, la composante u est partout positive dans l'épaisseur de la couche limite alors que pour l'autre, il existe une zone à contre courant.

Pour $\beta > 0$, la solution est unique est la vitesse u est positive pour chaque valeur de η .

Chapitre 3

Couche limite de l'écoulement du fluide de Reiner- Philippoff

Dans cette partie, nous allons tout d'abord étudier les équations gouvernantes de la couche limite de fluide non newtonien dans le cas général en réduisant le problème en un système différentiel ordinaire. Puis on étudiera la couche limite de l'écoulement de Reiner -Philippoff.

3.1 Hypothèses

Dans cette section, on suppose que l'écoulement est incompressible, permanent, à un nombre de Reynolds R_e quelconque pour traduire l'existence de la couche limite laminaire. On suppose de plus que l'écoulement se fait autour d'un dièdre d'angle au sommet $\pi\beta$ comme indique la figure 3.1

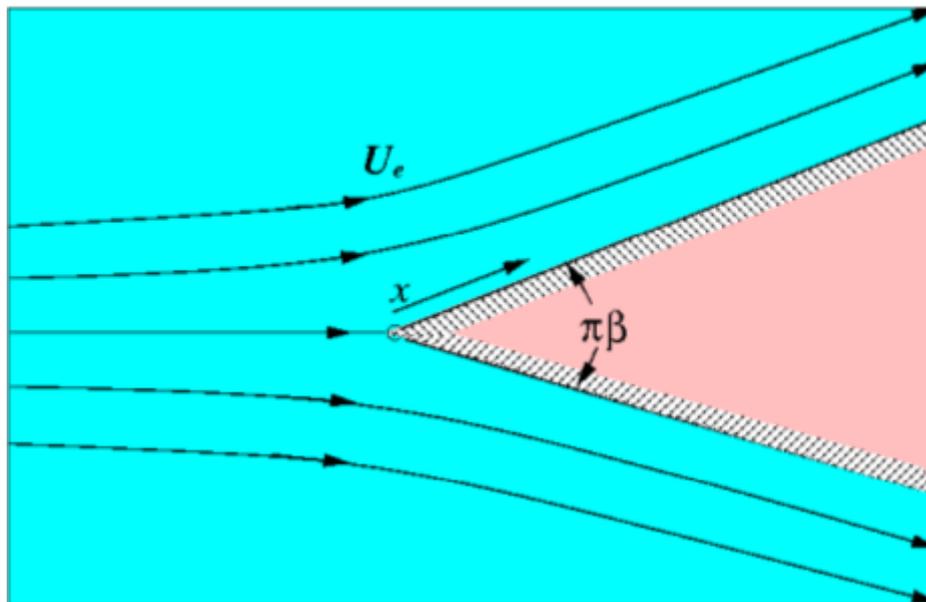


FIGURE 3.1 – Écoulement sur un dièdre



3.2 Équations de la couche limite de fluide non newtonien incompressible

3.2.1 Équations gouvernantes

[16] Dans le cas général, les équations gouvernantes de la couche limite laminaire d'un fluide non - Newtonien dans le système de coordonnées cartésiennes s'écrivent en dimension deux par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau}{\partial y} + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (3.2)$$

$$F \left(\tau, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.3)$$

où F est une fonction continue arbitraire reliant la contrainte τ et le taux de contrainte $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Les conditions aux limites sont :

$$u(x, 0) = v(x, 0), \quad u(x, \infty) = U_e(x). \quad (3.4)$$

La relation (3.3) est linéaire pour les fluides newtoniens et définie par l'équation (1.18) mais ici, cette relation n'est plus linéaire.

Pour faciliter la résolution de ce problème, on a besoin de la formulation suivante.

3.2.2 Formulation du problème

[7] La formulation de ce problème consiste à introduire les grandeurs suivants :

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{y} = \frac{y}{L} \sqrt{R_e}; \quad \bar{u} = \frac{u}{U_\infty}; \quad \bar{v} = \frac{v}{U_\infty} \quad (3.5)$$

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\rho U_\infty^2} \sqrt{R_e}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_0}{\mu_\infty}; \quad R_e = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (3.6)$$

$$U_e = U_\infty \bar{U}_e \quad (3.7)$$

et la fonction de courant $\bar{\psi}$:

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}}; \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}}. \quad (3.8)$$

L'équation (3.1) devient :

$$\frac{\partial(\bar{u}U_\infty)}{\partial(\bar{x}L)} + \frac{\partial\left(\frac{U_\infty}{\sqrt{R_e}}\bar{v}\right)}{\partial\left(\frac{L}{\sqrt{R_e}}\bar{y}\right)} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0.$$

On a bien :

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} = 0.$$

De plus l'équation (3.2) devient :

$$\rho \left[U_\infty \bar{u} \frac{\partial(U_\infty \bar{u})}{\partial(L\bar{x})} + \frac{U_\infty}{\sqrt{R_e}} \bar{v} \cdot \frac{\partial(U_\infty \bar{u})}{\partial\left(\frac{L}{\sqrt{R_e}} \bar{y}\right)} \right] = \frac{\partial\left(\frac{\rho U_\infty^2 \bar{\tau}}{\sqrt{R_e}}\right)}{\partial\left(\frac{L}{\sqrt{R_e}} \bar{y}\right)} + \rho U_\infty \bar{U}_e \cdot \frac{d(U_\infty \bar{U}_e)}{d(L\bar{x})}$$

$$\rho \left[\frac{U_\infty^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{U_\infty^2}{L} \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right] = \rho \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} + \rho \frac{U_\infty^2}{L} \bar{U}_e \frac{d \bar{U}_e}{d \bar{x}}.$$

Après simplification, nous avons :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} + \bar{U}_e \frac{d \bar{U}_e}{d \bar{x}}.$$

En remplaçant respectivement \bar{u} et \bar{v} par $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}}$ et $-\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}}$ nous avons :

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} + \bar{U}_e \frac{d \bar{U}_e}{d \bar{x}}. \quad (3.9)$$

L'équation (3.3) s'écrit comme :

$$F \left(\frac{\rho U_\infty^2}{\sqrt{R_e}} \bar{\tau}, \frac{U_\infty \sqrt{R_e}}{L} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Les conditions aux limites (3.4) deviennent :

$$\bar{y} = 0 : \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, 0) = 0 \quad (3.11)$$

$$\bar{y} = \infty : \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \infty) = \bar{U}_e. \quad (3.12)$$

Les équations (3.9) - (3.12) représentent un système des équations aux dérivées partielles non linéaire. La solution de ce système est assez difficile. Une simplification majeure peut être accomplie en utilisant la transformation similaire où le système différentiel non linéaire est réduit à un système différentiel ordinaire. Cette transformation est limitée à quelques formes spéciales de vitesses principales.

3.3 Cas particulier : Couche limite du fluide de Reiner - Philippoff

Le fluide de Reiner-Philippoff est un fluide non newtonien particulier. Pour ce fluide, la relation non linéaire entre la contrainte τ et le taux de contrainte $\frac{\partial u}{\partial y}$ est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2}}. \quad (3.13)$$

3.3.1 Solution auto-similaire

[14]Hansen et Na ont prouvé que la solution auto-similaire existe seulement si la vitesse de l'écoulement extérieure est donnée par :

$$\bar{U}_e(x) = \bar{x}^{\frac{1}{3}}. \quad (3.14)$$

La solution obtenue correspond au couche limite de l'écoulement autour d'un angle de 90° comme indique la figure ci - dessous.

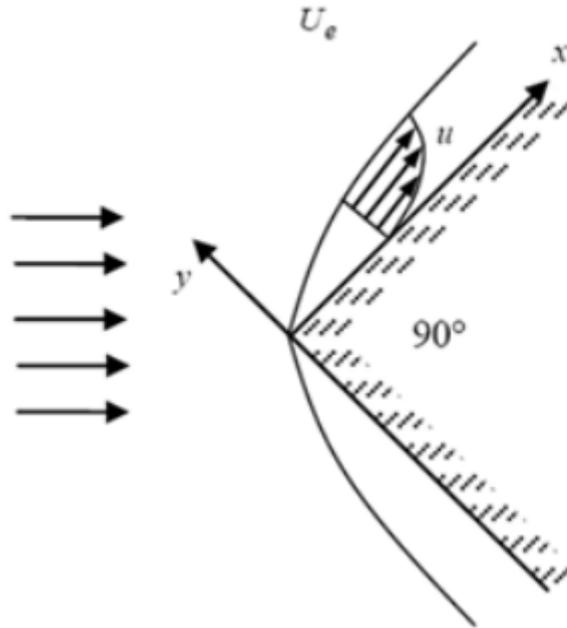


FIGURE 3.2 – Ecoulement autour d'un angle.

★ Montrons que la solution peut s'écrire comme :

$$g' + \frac{2}{3}ff''' - \frac{1}{3}(f')^2 + \frac{1}{3} = 0 \quad (3.15)$$

$$g = f''' \cdot \frac{g^2 + \bar{\mu}_0\gamma}{\gamma + g^2} \quad (3.16)$$

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad ; f'(\infty) = 1. \quad (3.17)$$

Preuve :

Introduisons la transformation similaire suivante :

$$\eta = \frac{\bar{y}}{\bar{U}_e} \quad ; \quad f(\eta) = \frac{\bar{\psi}}{\bar{U}_e^2} \quad \text{et} \quad g(\eta) = \bar{\tau}. \quad (3.18)$$

Le fluide de Reiner Philipooff est un fluide non newtonien donc il vérifie les équations (3.9) - (3.12). Pour démontrer (3.15), on utilise l'équation (3.9).

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial \{\bar{U}_e^2 \cdot f(\eta)\}}{\partial \bar{y}} \\
&= \bar{U}_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \\
&= \bar{U}_e^2 \cdot f' \cdot \frac{1}{\bar{U}_e} \\
&= \bar{U}_e \cdot f' \\
\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U}_e f') \\
&= \bar{U}_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \\
&= \bar{U}_e \cdot f'' \cdot \frac{1}{\bar{U}_e} \\
&= f''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{U}_e \cdot f') \\
&= \frac{1}{\bar{U}_e^2} (f' - f'' \eta) \quad \text{voir annexe B (3.52)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{U}_e^2 f) \\
&= 2 \cdot (\bar{U}_e)' \cdot \bar{U}_e \cdot f + \bar{U}_e^2 \cdot f' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{3} \bar{U}_e^{-2} \cdot \bar{U}_e \cdot f + \bar{U}_e^2 \cdot f' \times -\frac{1}{3\bar{U}_e^2} \eta \\
&= \frac{2}{3\bar{U}_e} f - \frac{1}{3\bar{U}_e} f' \eta.
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \bar{U}_e \cdot f' \cdot \frac{1}{3\bar{U}_e^2} \cdot (f' - f'' \eta) \\
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \frac{1}{3\bar{U}_e} \cdot [(f')^2 - f' f'' \eta] \quad (3.19)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} &= -\left[\frac{2}{3\bar{U}_e} f - \frac{1}{3\bar{U}_e} f' \eta \right] f'' \\
-\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{1}{3\bar{U}_e} \left[-2f f'' - f' f'' \eta \right]. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Les équations (3.19) et (3.20) donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{1}{3\bar{U}_e} \cdot [(f')^2 - f' f'' \eta] - \frac{1}{3\bar{U}_e} \left[-2f f'' - f' f'' \eta \right] \\
&= \frac{1}{3\bar{U}_e} \cdot [(f')^2 - f' f'' \eta + 2f f'' + f' f'' \eta] \\
&= \frac{1}{3\bar{U}_e} \cdot [(f')^2 + 2f f'']
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{1}{3\bar{U}_e} \cdot [(f')^2 + 2ff'']. \quad (3.21)$$

La troisième équation de (3.18) nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} g(\eta) \\ &= \frac{\partial g}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \\ &= g' \cdot \frac{1}{\bar{U}_e}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \bar{U}_e \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} &= \bar{U}_e \cdot \frac{1}{3} \cdot (\bar{x})^{-\frac{2}{3}} \\ &= \bar{U}_e \cdot \frac{1}{3} \cdot \bar{U}_e^{-2} \\ &= \frac{1}{3\bar{u}_e}. \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} + \bar{U}_e \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} = g' \cdot \frac{1}{\bar{U}_e} + \frac{1}{3\bar{U}_e}. \quad (3.22)$$

En égalisant les membres de (3.21) et (3.22) et en multipliant par \bar{U}_e on a finalement :

$$g' + \frac{2}{3} f f'' - \frac{1}{3} (f')^2 + \frac{1}{3} = 0. \quad (3.23)$$

Preuve :

La démonstration de (3.16) est faite en transformant l'équation (3.13) sous la forme (3.10). Pour le fluide de Reiner Philippoff, on a la relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\tau}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2}} \\ \implies \frac{\partial(U_\infty \bar{u})}{\partial\left(\frac{L}{\sqrt{R_e}} \bar{y}\right)} &= \frac{\frac{\rho U_\infty^2 \bar{\tau}}{\sqrt{R_e}}}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}} \\ \frac{U_\infty \sqrt{R_e}}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\frac{\rho U_\infty^2 \bar{\tau}}{\sqrt{R_e}}}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\frac{L \rho U_\infty \bar{\tau}}{R_e}}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Comme $R_e = \frac{U_\infty L}{\nu}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\frac{L\rho U_\infty \nu}{U_\infty L} \bar{\tau}}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}} \\
&= \frac{\rho \nu \bar{\tau}}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}} \\
&= \frac{\bar{\tau}}{\frac{1}{\rho \nu} \left[\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2} \right]} \\
&= \frac{\bar{\tau}}{\frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\rho \nu} + \frac{\rho \nu}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}}.
\end{aligned}$$

On sait que $\mu_\infty = \rho \nu$ et $\bar{\mu}_0 = \frac{\mu_0}{\mu_\infty}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\bar{\tau}}{1 + \frac{\frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}} \\
&= \frac{\bar{\tau}}{1 + \frac{\mu_\infty}{\mu_0 - 1} \frac{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}} \\
&= \frac{\bar{\tau}}{1 + \frac{\bar{\mu}_0 - 1}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc la relation :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\bar{\tau}}{1 + \frac{\bar{\mu}_0 - 1}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s}\right)^2}}. \quad (3.24)$$

Preuve :

■

Cette dernière equation exprime l'équation (3.10). En remplaçant $\bar{\tau}$ par g , on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \frac{g}{1 + \frac{\bar{\mu}_0 - 1}{1 + \left(\frac{g}{\bar{\tau}_s}\right)^2}} \\ &= \frac{g}{\bar{\mu}_0 + \left(\frac{g}{\bar{\tau}_s}\right)^2} \\ &= \frac{g}{1 + \left(\frac{g}{\bar{\tau}_s}\right)^2} \\ &= \frac{g}{\frac{\bar{\mu}_0 \bar{\tau}_s^2 + g^2}{\bar{\tau}_s^2 + g^2}}.\end{aligned}$$

Posons $\gamma = \bar{\tau}_s^2$, nous avons :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{g}{\frac{\bar{\mu}_0 \gamma + g^2}{\gamma + g^2}}$$

Comme :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = f''''$$

On aura :

$$g = f'''' \frac{\bar{\mu}_0 \gamma + g^2}{\gamma + g^2}. \quad (3.25)$$

■

★ Montrons que pour un écoulement autour d'un angle de 90° , le coefficient de frottement est défini par :

$$\frac{1}{2} C_{f_x} \sqrt{R_{e_x}} = \bar{\tau}_\omega = g(0). \quad (3.26)$$

Preuve :

On définit le coefficient de frottement par : $C_{f_x} = \frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}$.

En utilisant les transformations similaires, on obtient :

$$\begin{aligned}C_{f_x} &= \frac{2}{\rho U_e^2} \cdot \frac{\rho U_\infty^2}{\sqrt{R_e}} \bar{\tau}_\omega \\ &= \frac{2}{\rho U_\infty^2 \bar{U}_e^2} \cdot \frac{\rho U_\infty^2}{\sqrt{R_e}} \bar{\tau}_\omega \\ &= \frac{2 \bar{\tau}_\omega}{\bar{U}_e^2} \cdot \frac{1}{R_e} \\ &= \frac{2 \bar{\tau}_\omega}{\bar{U}_e^2} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}}.\end{aligned}$$

On sait que

$$U_\infty = \frac{U_e}{\bar{U}_e} \quad ; \quad L = \frac{x}{\bar{x}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} C_{f_x} &= \frac{2\bar{\tau}_\omega}{\bar{U}_e^2} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{\frac{U_e}{\bar{U}_e} \cdot \frac{x}{\bar{x}}}} \\ &= \frac{2\bar{\tau}_\omega}{\bar{U}_e^2} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{U_e \cdot x} \cdot \bar{x} \bar{U}_e} \\ &= \frac{2\bar{\tau}_\omega}{\bar{U}_e^2} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{U_e \cdot x}} \cdot \sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \\ &= \frac{2\bar{\tau}_\omega}{\bar{U}_e^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_{e_x}}} \cdot \sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \\ &= \frac{2\bar{\tau}_\omega}{\sqrt{R_{e_x}}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}}{\bar{U}_e^3}} \\ \frac{1}{2} C_{f_x} \sqrt{R_{e_x}} &= \bar{\tau}_\omega \sqrt{\frac{\bar{x}}{\bar{U}_e^3}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Autour d'un obstacle, la vitesse de l'écoulement extérieure est donnée par l'équation (3.14). L'Équation (3.27) devient :

$$\frac{1}{2} C_{f_x} \sqrt{R_{e_x}} = \bar{\tau}_\omega = g(0). \quad (3.28)$$

■

3.3.2 Solution non auto-similaire

Pour le cas général dans lequel la couche limite sur toute forme du corps sera analysé, une transformation est introduite comme suit :

$$\zeta = \bar{x} \quad ; \quad \eta = \sqrt{\bar{U}_e} \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}} \quad ; \quad f(\zeta, \eta) = \frac{\bar{\psi}}{\sqrt{\bar{x} \bar{U}_e}} \quad ; \quad g(\zeta, \eta) = \bar{\tau} \sqrt{\frac{\bar{x}}{\bar{U}_e^3}}. \quad (3.29)$$

★ Montrons que sous ces transformations, les équations (3.9) - (3.12) deviennent :

$$g' + \frac{p(\zeta) + 1}{2} f f'' + p(\zeta) [1 - (f')^2] = \zeta \left[f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \quad (3.30)$$

$$g = f'' \cdot \frac{\bar{\mu}_0 \gamma \zeta + \bar{U}_e^3 g^2}{\gamma \zeta + \bar{U}_e^3 g^2}. \quad (3.31)$$

Conditions aux limites :

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f'(0) = 0 \quad ; \quad f'(\infty) = 1 \quad (3.32)$$

où

$$p(\zeta) = \zeta \frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta}. \quad (3.33)$$

Preuve :

En raisonnant comme dans le cas similaire, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial \{ \sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \cdot f(\eta) \}}{\partial \bar{y}} \\
&= \sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{y}} \right] \\
&= \sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \left[f' \cdot \sqrt{\bar{U}_e} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} + 0 \right] \\
&= \bar{U}_e \cdot f' \\
\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U}_e f') \\
&= \bar{U}_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \\
&= \bar{U}_e \cdot f'' \cdot \sqrt{\bar{U}_e} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} \\
&= f'' \sqrt{\frac{\bar{U}_e^3}{\zeta}} \\
\frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} &= \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} \eta - \frac{\eta}{2\zeta} \quad \text{voir annexe B (3.54)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\sqrt{\frac{\bar{U}^3}{\bar{x}}} \cdot g \right) \\
&= \frac{\bar{U}_e^2}{\zeta} \cdot g' \quad \text{voir annexe B (3.55)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{U}_e \cdot f') \\
&= \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \left(f' + \frac{1}{2} f'' \eta \right) + \bar{U}_e \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - \frac{\bar{U}_e f''}{2\zeta} \eta \quad \text{Voir annexe B (3.56)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \cdot f) \\
&= \sqrt{\zeta \bar{U}_e} \left[\frac{f}{2\zeta} + \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} f + \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} f' \eta - \frac{\eta}{2\zeta} f' + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \quad \text{voir annexe B (3.57)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} &= \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \\
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \bar{U}_e^2 \left[-\frac{1}{2\zeta} f f'' - \frac{1}{2} \frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} f f'' - \frac{1}{2} \frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} f f'' \eta + \frac{f' f''}{2\zeta} \eta - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \quad \text{voir annexe B (3.58)}
\end{aligned}$$

On a finalement :

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = \bar{U}_e^2 \left[\frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} f'^2 + f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - \frac{1}{2\zeta} f f'' - \frac{1}{2} \frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} f f'' - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \quad (3.34)$$

$$\bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} = \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} + \bar{U}_e^2 \frac{g'}{\zeta} = \bar{U}_e^2 \left(\frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} + \frac{g'}{\zeta} \right). \quad (3.35)$$

En égalisant ces deux dernières équations, on a :

$$\frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} f'^2 + f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - \frac{1}{2\zeta} f f'' - \frac{1}{2} \frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} f f'' - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} + \frac{g'}{\zeta}$$

En multipliant par ζ et en posant $p(\zeta) = \zeta \frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta}$, on a :

$$p(\zeta)f'^2 + \zeta f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - \frac{1}{2}p(\zeta)ff'' - \zeta f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} = p(\zeta) + g' \quad (3.36)$$

$$g' + \frac{p(\zeta) + 1}{2}ff'' + p(\zeta)[1 - f'^2] = \zeta \left[f' \frac{\partial f}{\partial \zeta} - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right]. \quad (3.37)$$

■

Preuve :

D'après (3.24), on a :

$$\bar{\tau} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left[1 + \frac{\bar{\mu}_0 - 1}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s} \right)^2} \right]. \quad (3.38)$$

On sait aussi que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= f'' \sqrt{\frac{\bar{U}_e^3}{\zeta}} \\ \bar{\tau} &= \sqrt{\frac{\bar{U}_e^3}{\zeta}} g. \end{aligned}$$

L'équation (3.38) devient :

$$\sqrt{\frac{\bar{U}_e^3}{\zeta}} g = f'' \sqrt{\frac{\bar{U}_e^3}{\zeta}} \left[1 + \frac{\bar{\mu}_0 - 1}{1 + \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_s} \right)^2} \right]$$

$$g = f'' \left[1 + \frac{\bar{\mu}_0 - 1}{\frac{\bar{U}_e^3}{\zeta} g^2} \right]$$

$$= f'' \left[1 + \frac{\bar{\mu}_0 - 1}{1 + \frac{\bar{U}_e^3 g^2}{\zeta \bar{\tau}_s^2}} \right]$$

$$= f'' \left[1 + \frac{\bar{\mu}_0 - 1}{\frac{\zeta \bar{\tau}_s^2 + \bar{U}_e^3 g^2}{\zeta \bar{\tau}_s^2}} \right]$$

$$= f'' \left[1 + \frac{\bar{\mu}_0 \zeta \bar{\tau}_s^2}{\zeta \bar{\tau}_s^2 + \bar{U}_e^3 g^2} \right]$$

$$= f'' \left[\frac{\bar{\mu}_0 \zeta \bar{\tau}_s^2 + \bar{U}_e^3 g^2}{\zeta \bar{\tau}_s^2 + \bar{U}_e^3 g^2} \right]$$

On pose $\gamma = \bar{\tau}_s^2$ comme précédemment. Ainsi on a la réponse de (3.31) :

$$g = f''' \left[\frac{\bar{\mu}_0 \zeta \gamma + \bar{U}_e^3 g^2}{\zeta \gamma + \bar{U}_e^3 g^2} \right]. \quad (3.39)$$

■

★ Montrons enfin que pour le cas non autosimilaire, le coefficient de frottement s'écrit :

$$\frac{1}{2} C_{f_x} \sqrt{Re_x} = \bar{\tau}_\omega \sqrt{\frac{\bar{x}}{\bar{U}_e^3}} = g(\zeta, 0). \quad (3.40)$$

Preuve :

On a par définition du coefficient de frottement :

$$C_{f_x} = \frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}. \quad (3.41)$$

Ici, τ_ω est défini d'après (3.6) par :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\omega &= \frac{\tau_\omega}{\rho U_\infty^2} \sqrt{Re} \\ &= \frac{\tau_\omega}{\rho U_\infty^2} \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}} \\ \tau_\omega &= \rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \bar{\tau}_\omega. \end{aligned}$$

L'équation(3.41)devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_{f_x} &= \frac{\rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \bar{\tau}_\omega}{\rho U_e^2} \\ &= \frac{U_\infty^2}{U_e^2} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \bar{\tau}_\omega. \end{aligned}$$

D'après les équations (3.5) et (3.7), on a :

$$\begin{aligned} L &= \frac{x}{\bar{x}} \\ U_\infty &= \frac{U_e}{\bar{U}_e}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}C_{f_x} &= \frac{U_e^2}{\bar{U}_e^2} \sqrt{\frac{\nu}{U_e x} \frac{\bar{U}_e \bar{x}}{\bar{U}_e}} \bar{\tau}_\omega \\
&= \frac{1}{\bar{U}_e^2} \sqrt{\frac{\nu}{U_e x} \bar{U}_e \bar{x}} \bar{\tau}_\omega \\
&= \frac{1}{\bar{U}_e^2} \sqrt{\frac{\nu}{U_e x}} \sqrt{\bar{U}_e \bar{x}} \bar{\tau}_\omega \\
&= \sqrt{\frac{\nu}{U_e x}} \sqrt{\frac{\bar{U}_e \bar{x}}{\bar{U}_e^4}} \bar{\tau}_\omega \\
&= \frac{1}{Re_x} \sqrt{\frac{\bar{x}}{\bar{U}_e^3}} \bar{\tau}_\omega \\
\frac{1}{2}C_{f_x} Re_e &= \bar{\tau}_\omega \sqrt{\frac{\bar{x}}{\bar{U}_e^3}} = g(\zeta, 0) \quad d'apr\grave{e}s.(3.6)
\end{aligned}$$

■

Conclusion

Nous avons exposé dans ce mémoire qu'il existe deux catégories de modèles de fluide : le modèle newtonien et le modèle non newtonien. Les équations qui gouvernent les couches limites de ces modèles ont été étudiées. Pour le comportement newtonien, nous avons deux exemples de modèles : le modèle de Blasius et celui de Falkner - Skan. Ces exemples correspondent respectivement aux écoulement sur une plaque plane et sur un dièdre d'angle au sommet $\pi\beta$. Pour le comportement non newtonien, la couche limite du fluide de Reiner - Philippoff a été pris comme exemple. Il est à noter que pour ce fluide non newtonien, la solution auto - similaire n'existe que pour $\beta = \frac{1}{2}$. Pour les autres valeurs de β , nous avons précisé la formulation utilisée pour obtenir les équations de courant réduites.

Ce mémoire nous permet d'entrevoir les questions qui se posent encore au niveau de l'écoulement de couche limite de fluides non newtoniens. Il serait par exemple intéressant d'étudier les couches limites d'autre modèles non newtoniens afin de pouvoir comparer les propriétés obtenues.

Annexe A

Solution de Falkner-Skan

Les solutions de Falkner - skan sont des solutions particulières correspondant à l'écoulement sur un dièdre symétrique dont l'angle au sommet est $\pi\beta$ et la distribution de la vitesse à l'extérieure est de la forme :

$$U_e(x) = K x^m \quad \text{avec } m = \frac{\beta}{2 - \beta}.$$

La fonction de courant conforme à l'hypothèse d'affinité s'écrit :

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu x U_e} f(\eta) \quad \text{avec } \eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}. \quad (3.42)$$

En utilisant l'équation (2.26), on a :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= m K^2 x^{2m-1} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= m \frac{U_e^2}{x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

On a d'après (3.8) :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu x U_e} f'(\eta) \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \\ &= \sqrt{\nu x U_e} f' \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \\ u &= U_e f' \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu x U_e} f \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[\frac{(\nu x U_e)'}{2\sqrt{\nu x U_e}} f + \sqrt{\nu x U_e} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
&= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[\frac{\nu(U_e + mU_e)}{2\sqrt{\nu x U_e}} f + \sqrt{\nu x U_e} f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\
&= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[\frac{\nu U_e(m+1)}{2\sqrt{\nu x U_e}} f + \sqrt{\nu x U_e} f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\
&= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[\frac{\nu U_e(m+1)}{2\nu x U_e} \sqrt{\nu x U_e} f + \sqrt{\nu x U_e} f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \tag{3.46} \\
\frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \right) \\
&= y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{\left(\frac{U_e}{\nu x}\right)'}{2\sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}} \\
&= y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{\left(\frac{U_e' x - U_e}{\nu x^2}\right)}{2\sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}} \\
&= y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{\left(\frac{m U_e}{x} x - U_e\right)}{2\sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}} \\
&= y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{\left(\frac{m U_e}{x} x - U_e\right)}{\nu x^2} \\
&= y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{U_e(m-1)}{2\nu x^2} \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} \\
&= \frac{m-1}{2x} y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \\
&= \frac{m-1}{2x} \eta \tag{3.47}
\end{aligned}$$

L'expression de v devient :

$$\begin{aligned}
v &= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[\frac{\nu U_e(m+1)}{2\nu x U_e} \sqrt{\nu x U_e} f + \sqrt{\nu x U_e} f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\
&= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu x U_e} \left[\frac{m+1}{2x} f + f' \frac{m-1}{2x} \eta \right] \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \left[-(m+1) f - (m-1) f' \eta \right]. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

On a aussi besoin de calculer les expressions suivantes pour pouvoir utiliser l'équation (3.43) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (U_e f') \\
&= \frac{\partial U_e}{\partial x} f' + U_e \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&= k m x^{m-1} f' + U_e f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&= k m x^{m-1} f' + U_e f'' \frac{m-1}{2x} \eta \\
&= \frac{m}{x} U_e f' + U_e f'' \frac{m-1}{2x} \eta \\
&= \frac{U_e}{x} \left[m f' + \frac{m-1}{2} f'' \eta \right] \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= U_e \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= U_e f'' \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= U_e f''' \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \\
&= \frac{m+1}{2} f''' \frac{U_e^2}{\nu x} \\
u \frac{\partial u}{\partial x} &= U_e f' \frac{U_e}{x} \left[m f' + \frac{m-1}{2} f'' \eta \right] \\
&= \frac{U_e^2}{x} \left[m f'^2 + \frac{m-1}{2} f' f'' \eta \right]
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \left[-(m+1) f + -(m-1) f' \eta \right] \times U_e f'' \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \\
&= \frac{1}{2} U_e f'' \frac{U_e}{x} \left[-(m+1) f - (m-1) f' \eta \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{U_e^2}{x} f'' \left[-(m+1) f - (m-1) f' \eta \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{U_e^2}{x} \left[-(m+1) f f'' - (m-1) f' f'' \eta \right].
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Annexe B

Solution auto-similaire

Hansen et Na ont prouvé que la solution auto-similaire existe seulement si la distribution de la vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite est donnée par :

$$\bar{U}_e(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Sous les transformations :

$$\eta = \frac{\bar{y}}{\bar{U}_e} \quad ; \quad f(\eta) = \frac{\bar{\psi}}{\bar{U}_e^2} \quad \text{et} \quad g(\eta) = \bar{\tau}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial \{\bar{U}_e^2 \cdot f(\eta)\}}{\partial \bar{y}} \\ &= \bar{U}_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \\ &= \bar{U}_e^2 \cdot f' \cdot \frac{1}{\bar{U}_e} \\ &= \bar{U}_e \cdot f' \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U}_e f') \\ &= \bar{U}_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \\ &= \bar{U}_e \cdot f'' \cdot \frac{1}{\bar{U}_e} \\ &= f'' \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{U}_e f') \\ &= \left[\frac{\partial \bar{U}_e}{\partial \bar{x}} \cdot f' + \bar{U}_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial \bar{x}} \right] \\ &= \left[\frac{1}{3} (\bar{x})^{-\frac{2}{3}} \cdot f' + \bar{U}_e \cdot f'' \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right] \\ &= \frac{1}{3 \bar{U}_e^2} \cdot f' + \bar{U}_e \cdot f'' \cdot \left(\frac{-\frac{1}{3} (\bar{x})^{-\frac{2}{3}}}{\bar{U}_e^2} \right) \bar{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f'}{3\bar{U}_e^2} + \bar{U}_e \cdot f'' \cdot \left(\frac{-\frac{1}{3}(\bar{U})^{-2}}{\bar{U}_e^2} \right) \bar{y} \\
&= \frac{f'}{3\bar{U}_e^2} - \frac{1}{3}\bar{U}_e \cdot f'' \cdot \left(\frac{\bar{U}^{-2}}{\bar{U}_e^2} \right) \bar{y} \\
&= \frac{f'}{3\bar{U}_e^2} - \frac{f''}{3\bar{U}^3} \bar{y} \\
&= \frac{f'}{3\bar{U}_e^2} - \frac{f''}{3\bar{U}^2} \eta \\
&= \frac{1}{\bar{U}_e^2} (f' - f'' \eta) \tag{3.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{U}_e^2 f) \\
&= 2 \cdot (\bar{U}_e)' \cdot \bar{U}_e \cdot f + \bar{U}_e^2 \cdot f' \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{3} \bar{U}_e^{-2} \cdot \bar{U}_e \cdot f + \bar{U}_e^2 \cdot f' \times -\frac{1}{3\bar{U}_e^2} \eta \\
&= \frac{2}{3\bar{U}_e} f - \frac{1}{3\bar{U}_e} f' \eta. \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Solution non auto-similaire

Pour le cas général de la couche limite sur tout toute forme du corps, on introduit les transformations :

$$\zeta = \bar{x} ; \quad \eta = \sqrt{\bar{U}_e} \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}} ; \quad f(\zeta, \eta) = \frac{\bar{\psi}}{\sqrt{\bar{x}\bar{U}_e}} ; \quad g(\zeta, \eta) = \bar{\tau} \sqrt{\frac{\bar{x}}{\bar{U}_e^3}}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial \{ \sqrt{\bar{x}\bar{U}_e} \cdot f(\eta) \}}{\partial \bar{y}} \\
&= \sqrt{\bar{x}\bar{U}_e} \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{y}} \right] \\
&= \sqrt{\bar{x}\bar{U}_e} \left[f' \cdot \sqrt{\bar{U}_e} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} + 0 \right] \\
&= \bar{U}_e \cdot f' \\
\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U}_e f') \\
&= \bar{U}_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \\
&= \bar{U}_e \cdot f'' \cdot \sqrt{\bar{U}_e} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} \\
&= f'' \sqrt{\frac{\bar{U}_e^3}{\zeta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} &= \frac{\frac{d\bar{U}_e}{d\zeta}}{2\sqrt{\bar{U}_e}} \cdot \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}} + \sqrt{\bar{U}_e} \cdot \bar{y} \cdot \frac{-1}{\bar{x}} \\
&= \frac{1}{2\bar{U}_e} \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \sqrt{\bar{U}_e} \cdot \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}} - \frac{\eta}{2\zeta} \\
&= \frac{1}{2\bar{U}_e} \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \eta - \frac{\eta}{2\zeta} \\
&= \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} \eta - \frac{\eta}{2\zeta}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\sqrt{\frac{\bar{U}^3}{\bar{x}}} \cdot g \right) \\
&= \sqrt{\frac{\bar{U}^3}{\bar{x}}} \left[\frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial g}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{y}} \right] \\
&= \sqrt{\frac{\bar{U}^3}{\bar{x}}} \left[g' \cdot \sqrt{\bar{U}_e} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} \right] \\
&= \frac{\bar{U}_e^2}{\bar{x}} \cdot g' \\
&= \frac{\bar{U}_e^2}{\zeta} \cdot g'
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{U}_e \cdot f' \right) \\
&= \left[\frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \cdot f' + \bar{U}_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial \bar{x}} \right] \\
&= \left[\frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \cdot f' + \bar{U}_e \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{x}} + f'' \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right) \right] \\
&= \left[\frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \cdot f' + \bar{U}_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial \zeta} + \bar{U}_e f'' \left(\frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} \eta - \frac{\eta}{2\zeta} \right) \right] \\
&= \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} f' + \bar{U}_e \frac{\partial f'}{\partial \zeta} + \frac{f''}{2} \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \eta - \frac{\bar{U}_e f''}{2\zeta} \eta \\
&= \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \left(f' + \frac{1}{2} f'' \eta \right) + \bar{U}_e \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - \frac{\bar{U}_e f''}{2\zeta} \eta
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \cdot f \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \right) f + \sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \\
&= \left[\frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}} \cdot \sqrt{\bar{U}_e} + \frac{\sqrt{\bar{x}} d\bar{U}_e}{2\sqrt{\bar{U}_e} d\zeta} \right] f + \sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \\
&= \left[\frac{\sqrt{\bar{x} \bar{U}_e}}{2\bar{x}} + \frac{\sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} \right] f + \sqrt{\bar{x} \bar{U}_e} \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\bar{x}\bar{U}_e} \left[\frac{1}{2\zeta} + \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} \right] f + \sqrt{\bar{x}\bar{U}_e} \left[f' \left(\frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} \eta - \frac{\eta}{2\zeta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \\
&= \sqrt{\zeta\bar{U}_e} \left[\frac{f}{2\zeta} + \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} f + \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} f' \eta - \frac{\eta}{2\zeta} f' + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} &= \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \\
\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \bar{U}_e f' \left[\frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} \left(f' + \frac{1}{2} f'' \eta \right) + \bar{U}_e \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - \frac{\bar{U}_e f''}{2\zeta} \eta \right] \\
&= \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\zeta} f'^2 + \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{2d\zeta} f' f'' \eta + \bar{U}_e^2 f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - \frac{1}{2\zeta} \bar{U}_e^2 f' f'' \eta \\
&= \bar{U}_e^2 \left[\frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} f'^2 + \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} f' f'' \eta + f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - \frac{1}{2\zeta} f' f'' \eta \right] \\
-\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} &= -\sqrt{\zeta\bar{U}_e} \left[\frac{f}{2\zeta} + \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} f + \frac{d\bar{U}_e}{2\bar{U}_e d\zeta} f' \eta - \frac{\eta}{2\zeta} f' + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] f'' \sqrt{\frac{\bar{U}_e^3}{\zeta}} \\
&= \bar{U}_e^2 \left[-\frac{1}{2\zeta} f f'' - \frac{1}{2} \frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} f f'' - \frac{1}{2} \frac{d\bar{U}_e}{\bar{U}_e d\zeta} f f'' \eta + \frac{f' f''}{2\zeta} \eta - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right].
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Bibliographie

- [1] A. Acrivos, M. J. Shah and E. E. Peterson. Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces. *AICHE J.* 6, 312 (1960).
- [2] A. Barari, H. Bararnia, Mo. Miansari and N. Haghparast. Analysis for the Falkner–Skan wedge flow. *CURRENT SCIENCE*, VOL. 103, NO.2 (2012)
- [3] Abderrahim Houmat, Khaled Aliane et Omar Sebbane. Etude expérimentale de l'écoulement bidimensionnel autour d'un obstacle rectangulaire et un obstacle rectangulaire arrondi. *Afrique SCIENCE* 02(3) (2006) 285 - 299.
- [4] A. G. Hansen and T. Y. Na, similarity solutions of laminar, incompressible boundary layer equations of non-Newtonian fluids. *ASME 67-WA/FE-Z*, presented at the ASME Winter Annual Meeting, November (1967).
- [5] A. S. Gupta, K. R. Rajagopal and T. Y. Na, Falkner-Skan, a note on the Falkner-Skan flows of non - newtonian fluid (1982).
- [6] A. S. Gupta, T. Y. Na and K. R. Rajagopal. Flow of a viscoelastic fluid over a stretching sheet. *Rheol. Acta* 23, 213-215 (1984).
- [7] Bizzell et al (1962), Schowalter (1960), Kapur et al (1963), Hayasi(1965). Similarity Solutions of the three dimensional boundary layer equations of a class of general non - Newtonian fluids.
- [8] Etienne Guyon, Jean Pierre Hulin et Luc Petit, Edition Belin, ce que disent les fluides.
- [9] G. D. Bixzell and J. C. Alattery, Non-Newtonian boundary layer flow. *Chem. Engng Sci.* 17,777 (1962).
- [10] Hansen A.G. and Na T. Y. (1968). Similarity solutions of laminar, incompressible boundary layer equations of non-Newtonian fluids *Trans. of ASME J Basic Eng.*
- [11] JACOB NAGLER. Laminar boundary layer model for power-law fluids with non-linear viscosity.
- [12] J. N. Kapur and R. C. Scrivstava. Similar solutions of the boundary layer equations for power-law fluids. *ZAMP* 14,383 (1963).
- [13] M. M. Denn. Boundary layer flows of a class of elastic fluids. *Chem. Emma Sci.* 22. 395-405 (1967).
- [14] M.G.Timol and R.M.Darji. Similarity solutions of laminar incompressible incompressible boundary layer equations of non - newtonian viscoinelastic fluids. *Internatinal journal of mathématique Archive-2*(8), 1395 - 1404 (2011).
- [15] M. Patel and M. G. Timol (2010). Stream–strain Relations for visco-inelastic non newtonian fluids.
- [16] M. Patel and M.G.Timol. Similarity solutions of boundary layer flow of non - Newtonian fluid.(2013)

- [17] N. Hayasi. Similarity of two-dimensional and axisymmetric boundary layer flows of non-Newtonian fluids. *J. Fluid Mech* 23, 293-303 (1965)
- [18] Prabal Talukdar . Solution of boundary layer equations.
- [19] R. W. Seth, Solution of a viscoelastic boundary layer equations by orthogonal collocation. *J. Engng Math.* 8, 89-92 (1974).
- [20] S. Y. Lee and W. F. Ames, Similar solutions for non-Newtonian fluids. *AIChE J.* 12, 700 (1966).
- [21] Sébastien PONCET. Initiation à la rhéologie. (2012 - 2013)
- [22] T. Y. Na, Boundary layer flow of Reiner-Philippoff fluids, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 29(6) (1994), 871-877.

Titre : Couche limite de fluides newtoniens et non newtoniens.

Auteur : RIVOLALA Jean Yves Arsène.

Tel : +261340833922

e-mail : jrivolala@gmail.com

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous étudions la couche limite de l'écoulement de fluides newtoniens et non newtoniens. Dans le cas non newtonien, nous prenons comme exemple le cas du fluide de Reiner - Philippoff. On observe que les solutions de similarité pour ce fluide existent seulement lorsque l'écoulement se fait autour d'un angle de 90° . Pour les autres cas, nous présentons aussi dans ce travail une formulation générale pour obtenir les équations de courant réduites.

Mots clé : Couche limite, fluides non newtoniens, solutions similaires, écoulement autour d'un angle, écoulement autour d'un dièdre.

Rapporteur : Monsieur SOLOFONIAINA Joelson.
Maître de conférences à l'Université d'Antananarivo

ABSTRACT

In this paper, we study the boundary layer of Newtonian and non-Newtonian fluids. In the non-Newtonian case, we take as example the case of Reiner - Philippoff's fluid. It is observed that the similar solution for this fluid only exist for the flow over a 90° wedge. For the other cases, We also present in this work a general formulation to obtain the reduced stream function equations.

Keywords : Boundary layer, non newtonians fluids, simalarity solutions, flow over wedge, out-flow around a dihedral

Reported : Monsieur SOLOFONIAINA Joelson
Maître de conférences à l'Université d'Antananarivo