Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La théorie des fonctions pseudo-analytiques, également appelée la théorie des fonctions analytiques généralisées, a été développée de façon indépendante par L. Bers [9, 10] et I. N. Vekua [57] au cours des années cinquantes et soixantes du dernier siècle. À cette époque on souhaitait développer une théorie générale des systèmes elliptiques au niveau mathématique, mais plusieurs applications physiques étaient également le leitmotiv de cette théorie : dynamique des fluides, déformation élastique, etc. L'approche de Bers est celle que l'on considérera dans ce mémoire puisque cette approche se développe en parallèle à l'analyse complexe habituelle, ce qui nous sera d'une grande utilité pour la suite des choses.

Bers a développé, entre autres choses, des résultats profonds sur la généralisation de la dérivée complexe, l'intégrale complexe, une généralisation de la formule intégrale de Cauchy et de ses corollaires, de même que les séries de Taylor et de Laurent des fonctions pseudo-analytiques [8, 9, 10, 11]. En effet, dans sa théorie, Bers a développé l'idée des puissances formelles. Celles-ci sont une généralisation des puissances analytiques usuelles $a_n(z-z_0)^n$, c'est-à-dire qu'elles sont des solutions de l'équation de Vekua (équation de Cauchy-Riemann généralisée) correspondante et se comportent localement comme les puissances analytiques. Bien que cette théorie préserve, de façon non triviale, de nombreuses propriétés de la théorie originale, plusieurs applications et propriétés étaient peu connues jusqu'à tout récemment. De fait, depuis 2005, il a été démontré que ces fonctions jouent un rôle fondamental pour plusieurs équations de la physique mathématique telles que l'équation de Schrödinger [37, 38, 39, 40], l'équation de Klein-Gordon [46], l'équation de Dirac [14, 44], l'équation de la conductivité [3], le système de Maxwell [45] et les équations de Sturm-Liouville [43].

La renaissance actuelle de la théorie des fonctions pseudo-analytiques (l'approche de Bers) est donc due, principalement, à Kravchenko et Tremblay. Ceux-ci ont obtenu de nouvelles relations et de nombreuses applications des fonctions pseudo-analytiques, principalement en physique mathématique. Voici quelques résultats importants obtenus dans les dernières années :

(i) Il a été montré [37, 39, 33] que la relation entre l'équation de Schrödinger stationnaire $\big(-\Delta + q(x,y)\big)u(x,y) = 0$ et une classe d'équations de Vekua est similaire à la relation qui existe entre l'équation de Laplace et le système de Cauchy-Riemann. Cette relation a permis d'obtenir un système complet de solutions pour l'équation de Schrödinger stationnaire à l'aide des puissances formelles de la théorie des fonctions pseudo-analytiques.

(ii) Dans [46, 33] la théorie des fonctions pseudo-analytiques hyperboliques a été développée à l'aide de la structure des nombres hyperboliques $\mathcal{H} = \{z = x + \mathrm{j}t \mid x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{j}^2 = 1\}$. Il s'agit d'une structure algébrique d'anneau commutatif avec unité ; certains éléments, situé sur le cône de lumière, étant non inversibles. La théorie des fonctions pseudo-analytiques hyperboliques a permis, entre autres choses, de construire une infinité de solutions pour l'équation de Klein-Gordon avec masse variable.

(iii) Au coeur de la théorie de Bers se trouve le concept de séquence génératrice reliée à une équation de Vekua . Une fonction pseudo-analytique satisfait à une certaine équation de Vekua or, contrairement à l'analyse complexe usuelle, la dérivée au sens de Bers de cette fonction n'est plus une solution de la même équation de Vekua, mais d'une seconde équation de Vekua. La dérivée de Bers, elle aussi, résoudra une troisième équation de Vekua. Cette séquence d'équations de Vekua liées à la première est souvent périodique mais peut, en principe, aussi être infinie. Lorsque nous sommes en mesure d'obtenir une paire de solutions indépendantes pour chacune de ces équations de Vekua, une telle séquence de paires est alors appelée *séquence génératrice*. Nous pouvons ainsi construire un système complet de puissances formelles, de l'équation de Vekua originale, de la même façon que les puissances du type $a_n(z-z_0)^n$ forment un système complet pour les fonctions analytiques usuelles. Les puissances formelles, dénotées $Z_m^{(n)}(a_n, z_0; z)$ où chaque m est associé à une équation de Vekua, représentent les éléments fondamentaux des séries de Taylors des fonctions pseudo-analytiques. Dans [41] une méthode permettant d'obtenir de façon explicite les séquences génératrices, les puissances formelles et les noyaux de Cauchy pour une large classe d'équations de Vekua a été proposée. Mentionnons que les résultats obtenus dans cet article sont importants puisque les séquences génératrices et les puissances formelles constituent les obstacles principaux quant aux applications et aux développements des fonctions pseudo-analytiques.

(iv) Dans [43] un ensemble infini d'intégrales récursives provenant de la théorie des fonctions pseudo-analytiques, généralisant l'ensemble des fonctions de puissances du type $\{(x-x_0)\}_{n=0}^{\infty}$, a été étudié. La complétude, de même que la complétude de ses sous-ensembles, a été considérée pour différents espaces de fonctions. De plus, une généralisation du théorème de Taylor ainsi qu'une transformation entre la série de Taylor généralisée d'une fonction exprimée en termes des intégrales récursives et la série de Taylor usuelle a été obtenue. Le corollaire est un résultat surprenant qui concerne les solutions de l'équation de Sturm-Liouville : la série de Taylor d'une solution de l'équation de Sturm-Liouville $u'' + q(x)u = \lambda u$ peut être construite à partir de la série de Taylor de la solution y_0 (différente de zéro) de l'équation de Sturm-Liouville homogène $y'' + q(x)y = 0$.

(v) Étant donné les nombreux résultats obtenus dans le plan à l'aide des nombres complexes et des nombres hyperboliques, Kravchenko et Tremblay se sont également intéressés à la théorie des fonctions pseudo-analytiques dans l'espace [44]. Pour ce faire ils ont considéré la structure des quaternions complexes (ou biquaternions). Ici les équations de Vekua sont définies en terme de l'opérateur de Dirac. De nouveau, une relation a été établie entre une classe d'équations de Vekua quaternioniques et l'équation de Schrödinger stationnaire dans l'espace tridimensionnel.

Comme le démontre les points (i) à (iv) qui précèdent, l'application de la théorie des fonctions pseudo-analytiques dans le plan a fait ses preuves quant à son utilité et à sa puissances en physique mathématique aux cours des dernières années. L'objectif de ce mémoire est de poursuivre l'étude préliminaire des fonctions pseudo-analytiques dans l'espace présenté ci-dessus au point (v). Cela se situe dans le cadre d'un programme de recherche plus large où entend développer des outils similaires dans l'espace à l'aide des quaternions complexes.

Au chapitre 2, la théorie des fonctions pseudo-analytiques classiques dans le plan est introduite. Cette théorie généralise l'analyse complexe usuelle, où la généralisation du système d'équations de Cauchy-Riemann est appelée « équation de Vekua ». En particulier, la dérivée et l'intégrale de Bers sont présentées ainsi que le concept de puissances formelles qui généralise les puissances du type $a_n(z - z_0)^n$ des fonctions analytiques classiques. Au chapitre 3 plusieurs relations entre l'équation de Schrödinger stationnaire et une classe importante d'équations de Vekua sont illustrées. Le chapitre 4 présente des nouveaux résultats. Plus précisément, les équations biquaternioniques de Vekua provenant de la factorisation de l'équation de Schrödinger sont étudiées. Certains concepts de la théorie classique des fonctions pseudo-analytiques dans le plan sont généralisés dans l'espace à trois dimensions. La dérivée et l'intégrale d'une fonction pseudo-analytique sont introduites et leurs applications pour les équations elliptiques du second ordre sont considérées. Finalement, en conclusion, les nouveaux résultats obtenus dans ce mémoire ainsi que trois questions ouvertes sont présentés. Ces questions ouvertes feront l'objet de travaux ultérieurs.

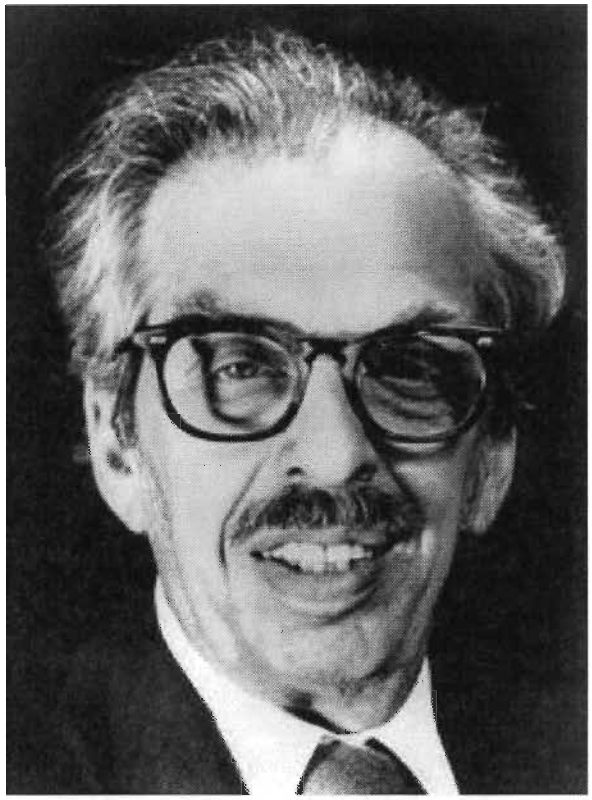
Chapitre 2

La théorie des fonctions pseudo-analytiques

Les fonctions pseudo-analytiques ont été crées par Lipman Bers (1914–1993) dans les années cinquantes : mathématicien letton, né à Riga (alors sous domination russe). Les parents de Lipman Bers, Isaac Bers et Bertha Weinberg, étaient tous deux des enseignants. Ses origines juives et son engagement dans la défense des droits de l'homme l'obligeront à une jeunesse itinérante. Il fait ses études à Riga, à Berlin, puis à Zurich et à nouveau à Riga. Menacé par la dictature qu'est devenu son pays, il émigre à Prague où il rédige sa thèse de doctorat sous la direction de Karl Loewner. Il obtient ainsi son doctorat à l'Université Charles de Prague en 1938, son sujet de thèse étant la théorie du potentiel.

En 1938, la Tchécoslovaquie est devenue un pays impossible pour un homme d'origine juive. Bers s'enfuit à Paris où sa fille Ruth est née. Cependant, la guerre l'a suivi. Bers et sa famille décident donc de déménager de Paris vers une région de la France qui n'a pas encore été attaqué par les armées allemandes. Il reçoit finalement son visa pour les États-Unis en 1940. Étant donné le nombre important d'universitaires qualifiés qui arrivent aux États-Unis à cette époque, il y a pénurie de postes, même pour les plus brillants universitaires, de sorte que Bers se retrouve sans emploi jusqu'en 1942. Pendant ce temps, il poursuit ses recherches mathématiques à l'Université Brown où, dans le cadre de travaux pertinents à l'effort de guerre, il étudie l'écoulement bidimensionnel de fluide subsonique.

Entre 1945 et 1949 Bers travaille à l'Université de Syracuse, d'abord comme professeur adjoint, puis comme professeur agrégé, puis il devient membre de l'Institute for Advanced Study à Princeton où il développera, entre autres choses, la théorie des fonctions pseudo-analytiques. Finalement, en 1951, Bers se joint à l'Institut Courant à New York, où il devient professeur titulaire. C'est à ce moment qu'il publie son livre « Theory of Pseudoanalytic Functions » [9]. L'auteur établit que son objectif est d'obtenir une théorie des fonctions complexes pour la solution d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre avec deux variables indépendantes. L'une des principales pierres d'achoppement dans cette tâche est le fait que la notion de dérivée est une propriété héréditaire des fonctions analytiques alors que ce n'est clairement pas le cas des solutions pour les équations de second ordre des équations elliptiques générales.



Lipman Bers (1914–1993)

Le texte qui suit est basé, essentiellement, sur les résultats obtenus dans [9, 10]. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble simplement connexe, $z = x + iy$, $w = u + iv$ deux variables complexes. Le conjugué de la variable complexe z sera noté $\overline{z} = x - iy$. Il sera parfois nécessaire d'utiliser l'opérateur de conjugaison C défini comme $Cz = \overline{z}$.

2.1 Paires génératrices

Le point de départ de la théorie de Lipman Bers sur les fonctions pseudo-analytiques est la notion de paire génératrice [1, 8, 9, 10, 11, 33]. Une paire génératrice est un couple de fonctions complexes indépendantes. C'est-à-dire qu'en tout point $z \in \Omega$ la valeur de toute fonction complexe, définie en ce point, peut être représentée comme une combinaison linéaire réelle des fonctions génératrices. Ces fonctions génératrices jouent le même rôle que 1 et i dans la théorie des fonctions analytiques usuelles.

Définition 1. *Soient F et G deux fonctions complexes dérivables sur Ω. La paire (F,G) est appelée paire génératrice dans Ω si elles satisfait l'inégalité*

$$\operatorname{Im}(\overline{F}G) > 0 \qquad \textit{dans } \Omega.$$

Pour la suite de ce mémoire, nous allons utiliser la notation habituelle pour les opérateurs différentiels complexes : $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. D'autre part, les expressions suivantes sont appelées **coefficients caractéristiques** de la paire génératrice (F,G) dans Ω :

$$a_{(F,G)} = -\frac{\overline{F}G_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad b_{(F,G)} = \frac{FG_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}G}{F\overline{G} - \overline{F}G},$$

$$A_{(F,G)} = -\frac{\overline{F}G_z - F_z\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad B_{(F,G)} = \frac{FG_z - F_zG}{F\overline{G} - \overline{F}G},$$

où les indice $\bar{z}$ ou z correspondent, respectivement, à l'application des opérateurs $\partial_{\bar{z}}$ ou ∂_z. On remarque, entre autres choses, que le dénominateur des coefficients caractéristiques est non nul puisque $F\overline{G} - \overline{F}G = -2i\operatorname{Im}(\overline{F}G)$.

Toute fonction complexe W définie sur un sous-ensemble de Ω admet une représentation **unique** $W = \phi F + \psi G$, où les fonctions $\phi = \phi(x,y)$ et $\psi = \psi(x,y)$ sont des fonctions à variables réelles. Les formules explicites pour ϕ et ψ sont alors données par

$$\phi(z) = \frac{\operatorname{Im}[\overline{W(z)}G(z)]}{\operatorname{Im}[\overline{F(z)}G(z)]}, \qquad \psi(z) = -\frac{\operatorname{Im}[\overline{W(z)}F(z)]}{\operatorname{Im}[\overline{F(z)}G(z)]}.$$

En effet, nous avons

$$\overline{W} = \phi\overline{F} + \psi\overline{G}$$

$\Leftrightarrow$

$$\overline{W}G = \phi\overline{F}G + \psi\overline{G}G$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathrm{Im}[\overline{W}G] = \mathrm{Im}[\phi\overline{F}G] + \mathrm{Im}[\psi\overline{G}G] = \phi\mathrm{Im}[\overline{F}G] + \psi\underbrace{\mathrm{Im}[\overline{G}G]}_{=0}$$

de sort que

$$\mathrm{Im}[\overline{W}G] = \phi\mathrm{Im}[\overline{F}G].$$

On procède de la même manière pour la formule de ψ, en multipliant $\overline{W}$ par F.

2.2 Dérivées de Bers

Définition 2. *Soient $(F,\ G)$ une paire génératrice dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $W = \phi F + \psi G$ une fonction définie dans le voisinage de $z_0 \in \Omega$.*

La fonction W possède une (F,G)-dérivée $\overset{\bullet}{W}(z_0)$ en z_0 si la limite (finie)

$$\overset{\bullet}{W}(z_0) = \frac{d_{(F,G)}}{dz}W\bigg|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{W(z) - \varphi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z)}{z - z_0}.$$

existe, où $\varphi(z_0)$ et $\psi(z_0)$ sont les constantes réelles uniques telles que

$$W(z_0) = \varphi(z_0)F(z_0) + \psi(z_0)G(z_0).$$

On appelle parfois cette (F,G)-dérivée la dérivée généralisée ou encore la dérivée de Bers.

Théorème 3. *Soit (F,G) une paire génératrice dans Ω. La (F,G)-dérivée de W,* *c'est-à-dire* $\overset{\bullet}{W} = \frac{d_{(F,G)}W}{dz}$ *existe au point* $z \in \Omega$ *et possède la forme*

$$\overset{\bullet}{W} = \phi_z F + \psi_z G = W_z - A_{(F,G)}W - B_{(F,G)}\overline{W}. \tag{2.1}$$

si et seulement si

$$W_{\overline{z}} = a_{(F,G)}W + b_{(F,G)}\overline{W} \quad \Leftrightarrow \quad \phi_{\overline{z}}F + \psi_{\overline{z}}G = 0. \tag{2.2}$$

La première équation dans (2.2) s'appelle l'**équation de Vekua** (quelques fois appelée l'équation de Carleman-Vekua). Évidemment, l'équation de Vekua généralise le système des équations de Cauchy-Riemann. Une fonction telle que $\overset{\bullet}{W}$ existe partout dans Ω est appelée (F,G)-**pseudo-analytique**.

Preuve

Soit (F,G) une paire génératrice dans le domaine Ω du plan et soit $z_0 \in \Omega$. Posons

$$\widetilde{W}(z) = W(z) - \lambda_0 F(z) - \mu_0 G(z),$$

les constantes réelles λ_0 et μ_0 sont alors déterminées de façon unique par la condition

$$\widetilde{W}(z_0) = 0.$$

La fonction $\widetilde{W}(z)$ possède des dérivées partielles si et seulement si les dérivées partielles de $W(z)$ existent. D'autre part, $\overset{\bullet}{W}(z_0)$ existe si et seulement si $\widetilde{W}'(z_0)$ existe. Dans ce cas, $\overset{\bullet}{W}(z_0) = \widetilde{W}'(z_0)$ où $\widetilde{W}'(z_0)$ est la dérivée complexe de $\widetilde{W}$ au point z_0. Ainsi l'existence de $\widetilde{W}_z(z_0)$, $\widetilde{W}_{\overline{z}}(z_0)$ et l'équation

$$\widetilde{W}_z(z_0) = 0 \tag{2.3}$$

sont nécessaires pour l'existence de $\overset{\bullet}{W}(z_0)$, et l'existence et la continuité de $\widetilde{W}_z(z)$,

$\widetilde{W}_{\bar{z}}(z)$ pour $|z - z_0| < r$ avec (2.3) sont suffisantes.

La fonction $\widetilde{W}(z)$ peut être représentée sous la forme

$$\widetilde{W}(z) = \frac{\begin{vmatrix} W(z) & W(z_0) & \overline{W(z_0)} \\ F(z) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}$$

de telle sorte que (2.3) peut se réécrire comme

$$\begin{vmatrix} W_{\bar{z}}(z_0) & W(z_0) & \overline{W(z_0)} \\ F_{\bar{z}}(z_0) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G_{\bar{z}}(z_0) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix} = 0, \tag{2.4}$$

et si $\overset{\bullet}{W}$ existe dans Ω, alors

$$\overset{\bullet}{W}(z_0) = \frac{\begin{vmatrix} W_z(z_0) & W(z_0) & \overline{W(z_0)} \\ F_z(z_0) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G_z(z_0) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}. \tag{2.5}$$

Les équations (2.4) et (2.5) peuvent se réécrire dans la forme (2.2) et (2.1), respectivement. □

Remarque 4. *Les fonctions F et G sont elles-mêmes des fonctions pseudo-analytiques telles que $\overset{\bullet}{F} = \overset{\bullet}{G} = 0$.*

Définition 5. *Soient (F, G) et (F_1, G_1) deux paires génératrices définies dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$. La paire (F_1, G_1) est appelée le successeur de (F, G) et la paire*

(F,G) est appelée le prédecesseur de (F_1,G_1) lorsque

$$a_{(F_1,G_1)} = a_{(F,G)} \qquad \text{et} \qquad b_{(F_1,G_1)} = -B_{(F,G)}.$$

L'importance de cette définition provient du théorème qui suit.

Théorème 6. *Soit W une fonction $(F,\ G)$-pseudo-analytique et (F_1,G_1) un successeur de (F,G). Alors $\dot{W}$ est une fonction (F_1,G_1)-pseudo-analytique, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} \dot{W}_{\bar{z}} &= a_{(F_1,G_1)}W + b_{(F_1,G_1)}\overline{\dot{W}_{\bar{z}}}. \\ &= a_{(F,G)}W - B_{(F,G)}\overline{\dot{W}_{\bar{z}}}. \end{aligned}$$

Preuve

Le conjugué de la deuxième équation de (2.2) donne

$$\phi_z\overline{F} + \psi_z\overline{G} = 0, \tag{2.6}$$

et de l'équation (2.1) on obtient

$$\phi_z = \frac{\overline{G}\dot{W}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad \psi_z = -\frac{\overline{F}\dot{W}}{F\overline{G} - \overline{F}G}. \tag{2.7}$$

Montrons maintenant que

$$\dot{W}_{\bar{z}} = a_{(F,G)}W - B_{(F,G)}\overline{\dot{W}_{\bar{z}}}.$$

Nous avons $\dot{W} = \phi_z F + \psi_z G$, donc $[\dot{W}]_{\bar{z}} = [\phi_z F + \psi_z G]_{\bar{z}} = \phi_{z\bar{z}}F + \psi_{z\bar{z}}G + \phi_z F_{\bar{z}} + \psi_z G_{\bar{z}}$. En dérivant la seconde équation de (2.2), on obtient $\phi_{z\bar{z}}F + \psi_{z\bar{z}}G + \phi_{\bar{z}}F_z + \psi_{\bar{z}}G_z = 0$. On trouve donc $\phi_{z\bar{z}}F + \psi_{z\bar{z}}G = -\phi_{\bar{z}}F_z - \psi_{\bar{z}}G_z$. D'où $[\dot{W}]_{\bar{z}} = \phi_z F_{\bar{z}} + \psi_z G_{\bar{z}} - \phi_{\bar{z}}F_z - \psi_{\bar{z}}G_z = \phi_z F_{\bar{z}} + \psi_z G_{\bar{z}} - \overline{(\phi_z\overline{F}_{\bar{z}} + \psi_z\overline{G}_{\bar{z}})}$.

En remplaçant ϕ_z et ψ_z par les expressions de l'équation (2.7) et, avec une manipulation algébrique, on obtient

$$\overset{\bullet}{W}_{\overline{z}} = a_{(F,G)}W - B_{(F,G)}\overline{\overset{\bullet}{W}_{\overline{z}}}. \qquad \square$$

Définition 7. *Une séquence de paires génératrices $\{(F_m, G_m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ est appelée séquence génératrice si (F_{m+1}, G_{m+1}) est un successeur de (F_m, G_m).*

*D'autre part, si $(F_0, G_0) = (F, G)$, on dira que la paire génératrice (F, G) est **enchâssée** dans la suite $\{(F_m, G_m)\}$.*

Définition 8. *La séquence génératrice $\{(F_m, G_m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ est dite periodique de période $\mu > 0$ si la paire $(F_{m+\mu}, G_{m+\mu})$ est équivalente à la paire (F_m, G_m) et que les coefficients caractéristiques coincident.*

En utilisant cette séquence génératrice, on peut ainsi obtenir les dérivées d'ordres supérieurs d'une fonction analytique généralisée W :

$$W^{[0]} := W; \qquad W^{[m+1]} := \frac{\mathrm{d}_{(F_m,G_m)}W^{[m]}}{\mathrm{d}z}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Nous avons alors que

$$\begin{aligned}
W_{\overline{z}} &= a_{(F,G)}W + b_{(F,G)}\overline{W} && \text{(équation de Vekua 0)}\\
\\
(W^{[1]})_{\overline{z}} &= a_{(F_1,G_1)}W^{[1]} + b_{(F_1,G_1)}\overline{W^{[1]}} && \text{(équation de Vekua 1)}\\
&= a_{(F,G)}W^{[1]} - B_{(F,G)}\overline{W^{[1]}}\\
\\
(W^{[2]})_{\overline{z}} &= a_{(F_2,G_2)}W^{[2]} + b_{(F_2,G_2)}\overline{W^{[2]}} && \text{(équation de Vekua 2)}\\
&= a_{(F,G)}W^{[2]} - B_{(F_1,G_1)}\overline{W^{[2]}}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les équations qui précèdent, on voit que les équations de Cauchy-

Riemann généralisées, c'est-à-dire les équations de Vekua, se transforment quand on effectue la dérivée généralisée de Bers d'un ordre à l'autre. Cela est évidemment contraire au cas usuel des fonctions analytiques complexes, où les équations de Cauchy-Riemann sont « invariantes » à tous les ordres.

Définition 9. *Soit (F, G) une paire génératrice, la paire (F^*, G^*) est appelée paire adjointe de (F, G) et est définie par :*

$$F^* = -\frac{2\overline{F}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad G^* = -\frac{2\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}.$$

2.3 Intégrales de Bers

Une fois que l'on a établi la (F, G)-dérivée, c'est-à-dire la dérivée généralisée au sens de Bers, il est maintenant naturel d'introduire la notion d'anti-dérivée généralisée.

Définition 10. *Soit (F, G) une paire génératrice dans Ω. La (F, G)-intégrale de W le long d'une courbe rectifiable Γ allant d'un point z_0 à z_1 est définie par :*

$$\int_\Gamma W d_{(F,G)}z = F(z_1)\mathrm{Re}\int_\Gamma G^* W dz + G(z_1)\mathrm{Re}\int_\Gamma F^* W dz.$$

Définition 11. *Une fonction continue W définie dans un domaine Ω est dite (F, G)-intégrable si pour toute courbe fermée Γ située dans un sous-domaine simplement connexe de Ω, nous avons*

$$\oint_\Gamma W d_{(F,G)}z = 0.$$

Théorème 12. *Une (F, G)-dérivée $\dot{W}$ d"une fonction (F, G)-pseudo-analytique W est (F, G)-intégrable.*

Théorème 13. *Soit $\dot{W}$ la (F, G)-dérivée d'une fonction (F, G) pseudo-analytique W dans un domaine simplement connexe Ω et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe rectifiable allant de z_0 à*

z. Dans ce cas l'égalité suivante est valide :

$$\int_\Gamma \overset{\bullet}{W} d_{(F,G)} z = W(z) - \varphi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z).$$

L'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} \overset{\bullet}{W} d_{(F,G)} z$ est alors appelée la (F,G)-anti-dérivée de $\overset{\bullet}{W}$.

Théorème 14. *Soit (F,G) et (F_1,G_1) des paires génératrices telles que (F,G) est un prédécesseur de (F_1,G_1). Une fonction continue est dite (F_1,G_1)-pseudo-analytique si et seulement si elle est (F,G)-intégrable.*

Théorème 15. *Si W est une fonction continue définie dans dans un domaine simplement connexe Ω et que W est (F,G)-intégrable, alors il existe une fonction (F,G)-pseudo-analytique w dans Ω telle que*

$$W(z) = \frac{d_{(F,G)} w(z)}{dz}.$$

Preuve

Sous les hypothèse du théorème la fonction $\omega = \varphi + i\psi$ est bien définie et possède des dérivées partielles continues (z_0 étant un point donné quelconque dans Ω). En fait,

$$\varphi = \mathrm{Re} \int_\Gamma G^* W dz = \int_\Gamma \frac{\overline{G} W dz - G \overline{W} d\overline{z}}{F\overline{G} - \overline{F} G}$$

et

$$\psi = \mathrm{Re} \int_\Gamma F^* W dz = -\int_\Gamma \frac{\overline{F} W dz - F \overline{W} d\overline{z}}{F\overline{G} - \overline{F} G}$$

de sorte que

$$\varphi_z = \frac{\overline{G} W}{F\overline{G} - \overline{F} G}, \qquad \psi_z = -\frac{\overline{F} W}{F\overline{G} - \overline{F} G}$$

et

$$\varphi_{\overline{z}} = -\frac{G \overline{W}}{F\overline{G} - \overline{F} G}, \qquad \psi_{\overline{z}} = \frac{F \overline{W}}{F\overline{G} - \overline{F} G}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\varphi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_z F + \psi_z G = W.$$

de sorte que $w = \varphi F + \psi G$ est une fonction (F, G)-pseudo-analytique et $\overset{\bullet}{w} = W$. □

2.4 Les puissances formelles

Une séquence génératrice définie une séquence infinie d'équations de Vekua. Ainsi, si pour une équation de Vekua donnée (originale), on connaît non seulement une paire génératrice correspondante, mais la séquence complète des paires génératrices, c'est-à-dire une paire de solutions exactes et indépendantes pour chacune des équations de Vekua de la séquence infinie d'équations correspondant à l'équation originale, nous sommes en mesure de construire un système infini de solutions de l'équation de Vekua originale (comme cela est montré dans la définition ci-dessous). De plus, ce système de solution infini est complet sous certaines conditions assez générales.

Définition 16. *La puissance formelle $Z_m^{(0)}(a, z_0; z)$ de centre $z_0 \in \Omega$, de coefficient a et d'exposant 0 est définie comme une combinaison linéaire des générateurs F_m et G_m avec les coefficients réels λ, μ choisis tels que*

$$\lambda F_m(z_0) + \mu G_m(z_0) = a$$

Les puissances formelles d'exposants $n = 1, 2, \ldots$ sont définies par la formule de récursivité

$$Z_m^{(n)}(a, z_0; z) = n \int_{z_0}^{z} Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; \zeta) d_{(F_m, G_m)} \zeta.$$

L'indice m dans les puissances formelles se rattachent aux équations de Vekua de notre séquence infinie d'équations de Vekua. L'indice $m = 0$ étant (habituellement) associé à l'équation de Vekua originale. Le tableau qui suit illustre les récurrences nécessaires pour obtenir la puissance formelle $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$ à l'aide des anti-dérivées de Bers.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Vekua 0} & \text{Vekua 1} & \text{Vekua 2} & \text{Vekua 3} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
Z^{(3)} \arrow[dr, "\frac{d_{(F,G)}}{dz}"] & Z_1^{(3)} \arrow[dr, "\frac{d_{(F_1,G_1)}}{dz}"] & Z_2^{(3)} \arrow[dr, "\frac{d_{(F_2,G_2)}}{dz}"] & Z_3^{(3)} & \cdots \\
Z^{(2)} \arrow[dr, "\frac{d_{(F,G)}}{dz}"] & Z_1^{(2)} \arrow[dr, "\frac{d_{(F_1,G_1)}}{dz}"] & Z_2^{(2)} \arrow[dr, "\frac{d_{(F_2,G_2)}}{dz}"] & Z_3^{(2)} & \cdots \\
Z^{(1)} \arrow[dr, "\frac{d_{(F,G)}}{dz}"] & Z_1^{(1)} \arrow[dr, "\frac{d_{(F_1,G_1)}}{dz}"] & Z_2^{(1)} \arrow[dr, "\frac{d_{(F_2,G_2)}}{dz}"] & Z_3^{(1)} & \cdots \\
Z^{(0)} & Z_1^{(0)} & Z_2^{(0)} & Z_3^{(0)} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

La définition 16 des puissances formelles imlique les propriétés suivantes :

1. $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$ est une fonction (F_m, G_m)-pseudo-analytique.
2. Si a_1 et a_2 sont des constantes réelles, alors
$$Z_m^{(n)}(a_1 + ia_2, z_0; z) = a_1 Z_m^{(n)}(1, z_0; z) + a_2 Z_m^{(n)}(i, z_0; z).$$
3. Les puissances formelles satisfont les relation différentielles suivantes
$$\frac{d_{(F_m,G_m)} Z_m^{(n)}(a, z_0; z)}{dz} = n Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; z).$$
4. Si $z \to z_0$, alors
$$Z_m^{(n)}(a, z_0; z) \sim a(z - z_0)^n.$$

Supposons maintenant que

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n, z_0; z).$$

On peut montrer que

1. La série en question converge uniformément au voisinage de z_0.
2. La limite uniforme d'une fonction analytique généralisée est une fonction analytique généralisée.
3. La série est déffirentiable terme par terme.

La dérivée d'ordre r de la fonction W est :

$$W^{[r]}(z) = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{n!}{(n-r)!} Z_r^{(n-r)}(a_n, z_0; z).$$

Cette équation nous permet de déterminer les coefficients $a_n = \dfrac{W^{[n]}(z_0)}{n!}$.

Définition 17. *Soit W une fonction pseudo-analytique définie pour des petites valeurs de $|z - z_0|$. La série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n, z_0; z)$$

s'appelle série de Taylor de W formée par des puissances formelles. Elle représente toujours asymptotiquement une fonction, et $\forall N$, nous avons

$$W(z) - \sum_{n=0}^{N} Z^{(n)}(a_n, z_0; z) = O\left(|z - z_0|^{(N+1)}\right), \qquad z \to z_0.$$

Définition 18. *Une paire génératrice (F, G) est dite complète si ces fonctions sont définies et satisfont la condition de Hölder pour toutes les valeurs finies de z, les limites $F(\infty)$ and $G(\infty)$ existent, $\mathrm{Im}\left(\overline{\mathrm{F}(\infty)}\mathrm{G}(\infty)\right) > 0$ et que les fonctions $F(1/z)$, $G(1/z)$ satisfont elle aussi la condition de Hölder. Une paire génératrice complète est dite normalisée si $F(\infty) = 1$ et $G(\infty) = i$.*

Lorsque la paire génératrice (F, G) est complète et normalisée on obtient alors les résultats suivants sur la complétude. La terminologie de Bers sera utilisée ici, c'est-à-dire que nous dirons que la suite de fonctions f_n converge normalement dans un domaine Ω si elle converge uniformément pour tout sous-domaine borné et fermé de Ω.

Théorème 19 (Théorème d'expansion). *Soit W une fonction (F, G)-pseudo-analytique definie sur $|z - z_0| < R$. Alors W admet une expansion unique de la forme $W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n, z_0; z)$ qui converge normalement pour $|z - z_0| < \theta R$, où θ est une constante positive.*

Théorème 20 (Approximation de Runge). *Une fonction pseudo-analytique définie dans un domaine simplement connexe peut être approchée par une suite qui converge normalement de polynômes formels (une combinaison linéaire des puissances formelles avec des exposants positifs).*

Chapitre 3

Sur la relation entre l'équation de Schrödinger stationnaire et les fonctions pseudo-analytiques

3.1 Factorisation de l'opérateur de Schrödinger

Il est bien connu que si f est une solution particulière et non nulle de l'équation de Schrödinger unidimentionnelle

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \nu(x)\right) f(x) = 0,$$

alors l'opérateur de Schrödinger peut être factorisé de la façon suivante

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \nu(x)\right) = \left(\frac{d}{dx} + \frac{f'}{f}\right)\left(\frac{d}{dx} - \frac{f'}{f}\right),$$

où f' représente la dérivée de f par rapport à sa variable x. En effet, considérons $g(x)$ une fonction à valeurs réelles dans un domaine Ω. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}+\frac{f'}{f}\right)\left(\frac{d}{dx}-\frac{f'}{f}\right)g &= \left(\frac{d}{dx}+\frac{f'}{f}\right)\left(\frac{dg}{dx}-\frac{f'g}{f}\right) \\
&= g" - \left(\frac{f'g}{f}\right)' + \frac{f'g'}{f} - \frac{f'^2 g}{f^2} \\
&= g" - \frac{(f'g)'f - f'^2 g}{f^2} + \frac{f'g'}{f} - \frac{f'^2 g}{f^2} \\
&= g" - \frac{f"gf + f'fg' - f'^2 g}{f^2} + \frac{f'g'}{f} - \frac{f'^2 g}{f^2} \\
&= g" - \frac{f"g}{f} - \cancel{\frac{f'g'}{f}} + \cancel{\frac{f'^2 g}{f^2}} + \cancel{\frac{f'g'}{f}} - \cancel{\frac{f'^2 g}{f^2}} \\
&= g" - \frac{f"g}{f}.
\end{aligned}$$

Or, puisque f est une solution particulière et non nulle de l'équation de Schödinger, nous savons

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\nu\right)f = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nu = \frac{f"}{f}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}+\frac{f'}{f}\right)\left(\frac{d}{dx}-\frac{f'}{f}\right)g &= g" - \nu g \\
&= \left(\frac{d^2}{dx^2} - \nu(x)\right)g.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant considérer une généralisation de cette factorisation [33, 37, 38, 39, 44]. Considérons l'équation de Schrödinger bidimentionnelle

$$\left(-\Delta + \nu\right)f = 0. \tag{3.1}$$

sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$, où $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$, $\nu = \nu(x,y)$ et $f = f(x,y)$ sont des fonctions à valeurs réelles (la fonction ν est appelée le « potentiel »).

Théorème 21. *Soit f une fonction positive sur $\Omega \in \mathbb{R}^2$ et solution de l'équation de Schrödinger stationnaire (3.1). Alors pour toute fonction à valeurs réelles $\varphi \in C^2(\Omega)$ l'égalité suivante est satisfaite*

$$(-\Delta + \nu)\varphi = 4\left(\partial_{\bar{z}} + \frac{\partial_z f}{f}C\right)\left(\partial_z - \frac{\partial_z f}{f}C\right)\varphi. \tag{3.2}$$

Preuve

$$\begin{aligned}\left(\partial_{\bar{z}}+\frac{\partial_z f}{f}C\right)\left(\partial_z-\frac{\partial_z f}{f}C\right)\varphi &= \tfrac{1}{4}\Delta\varphi-\frac{|\partial_z f|^2}{f^2}\varphi-\partial_{\bar{z}}\left(\frac{\partial_z f}{f}\right)\varphi.\\ &= \frac{1}{4}\left(\Delta\varphi-\frac{\Delta f}{f}\right)\varphi\\ &= \frac{1}{4}\left(-\Delta+\nu\right)\varphi. \quad \square\end{aligned}$$

Remarque 22. *Comme φ est une fonction à valeurs réelles, on peut appliquer l'opérateur conjugué dans l'équation* (3.2) *de telle sorte que*

$$(-\Delta+\nu)\varphi=4\left(\partial_z+\frac{\partial_{\bar{z}} f}{f}C\right)\left(\partial_{\bar{z}}-\frac{\partial_{\bar{z}} f}{f}C\right)\varphi.$$

L'opérateur $\partial_z-\dfrac{\partial_z f}{f}$ peut être représenté sous la forme

$$\partial_z-\frac{\partial_z f}{f}=f\partial_z f^{-1}.$$

En effet, si φ est une fonction à valeurs réelles, nous avons

$$\begin{aligned}f\partial_z f^{-1}\varphi &= f\left(\partial_z f^{-1}\varphi+f^{-1}\partial_z\varphi\right)\\ &= f\left(-f^{-2}\partial_z f\varphi+f^{-1}\partial_z\varphi\right)\\ &= \partial_z\varphi-\frac{\partial_z f}{f}\varphi\\ &= \left(\partial_z-\frac{\partial_z f}{f}\right)\varphi.\end{aligned}$$

Posons maintenant $P=f\partial_z f^{-1}$. Étant donné le dernier théorème, si f est solution non nulle de l'équation (3.1), l'opérateur P transforme les solutions de cette équation en solution de l'équation

$$\left(\partial_{\bar{z}}+\frac{\partial_z f}{f}C\right)w=0. \tag{3.3}$$

Notons que l'opérateur ∂_z appliqué sur une fonction φ à valeurs réelles peut être vu comme un « gradient ». Si on connait $\partial_z\varphi=\Phi$ dans tout le plan complexe ou pour un domaine convexe, où $\Phi=\Phi_1+i\Phi_2$ est une fonction complexe donnée telle que

$$\partial_y\Phi_1+\partial_x\Phi_2=0, \tag{3.4}$$

alors on peut construire φ à une constante près de la façons suivante :

$$\varphi(x,y)=\int_{x_0}^{x}\Phi_1(\eta,y)d\eta-\int_{y_0}^{y}\Phi_2(x_0,\xi)d\xi+c, \tag{3.5}$$

où (x_0, y_0) un point fixé pour le domaine qui nous intéresse.

Ainsi, on définit A comme l'opérateur intégral

$$A[\Phi](x,y) = \int_{x_0}^{x} \Phi_1(\eta, y)d\eta - \int_{y_0}^{y} \Phi_2(x_0, \xi)d\xi + c.$$

Notons que la formule (3.5) peut facilement être étendue pour tout domaine simplement connexe en considérant l'intégral le long d'une courbe rectifiable quelconque Γ allant de (x_0, y_0) à (x, y)

$$\varphi(x,y) = \int_{\Gamma} \Phi_1 dx - \Phi_2 dy + c.$$

Ainsi, si Φ satisfait (3.4), il existe une famille de fonctions à valeurs réelles φ telle que $\partial_z \varphi = \Phi$ donnée par $\varphi = A[\Phi]$.

De façon similaire, on définit l'opérateur intégral conjugué $\overline{A}$ correspondant à l'opérateur différentiel $\partial_{\overline{z}}$. Dans ce cas l'équation $\partial_{\overline{z}}\varphi = \Phi$, où $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ est une fonction complexe donnée telle que $\partial_y \Phi_1 - \partial_x \Phi_2 = 0$, possède la solution

$$\overline{A}[\Phi](x,y) = \int_{x_0}^{x} \Phi_1(\eta, y)d\eta + \int_{y_0}^{y} \Phi_2(x_0, \xi)d\xi + c.$$

Considérons maintenant l'opérateur $S = fAf^{-1}$. Il est alors clair que $PS = I$, où I est l'opérateur identité. En effet,

$$\begin{aligned} PSw &= f\partial_z[f^{-1}fA(f^{-1}w)] \\ &= f\partial_z[A(f^{-1}w)] \\ &= w. \end{aligned}$$

Proposition 23. *Soit f une solution particulière non nulle de l'équation* (3.1) *et w une solution de* (3.3), *alors $g = Sw$ est solution de l'équation* (3.1).

Preuve
Puisque $g = Sw$, nous avons

$$\Delta g = \Delta S w,$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta(Sw) &= 4\partial_{\overline{z}}(\partial_z[Sw]) \\
&= 4\partial_{\overline{z}}\left(\partial_z f A\left[\frac{w}{f}\right]\right) \\
&= 4\partial_{\overline{z}}\left((\partial_z f)A\left[\frac{w}{f}\right] + w\right) \\
&= \Delta f A\left[\frac{w}{f}\right] + 4(\partial_z f)\partial_{\overline{z}}A\left[\frac{w}{f}\right] - 4\frac{\partial_z f}{f}\overline{w} \\
&= \Delta f A\left[\frac{w}{f}\right] + 4(\partial_z f)\left(\partial_{\overline{z}}A\left[\frac{w}{f}\right] - \frac{\overline{w}}{f}\right)
\end{aligned}$$

Mais, puisque $\partial_z A[\Phi] = \Phi$, de sorte que $\partial_{\overline{z}}A[\Phi] = \overline{\Phi}$, le deuxième terme de la dernière équation s'annule. On obtient ainsi

$$\Delta(Sw) = \nu Sw,$$

puisque $\nu = \Delta f/f$. □

Proposition 24. *Soit f une solution non nulle particulière de l'équation (3.1), alors*

$$SPg = g + cf,$$

où c est une constante réelle arbitraire.

Preuve

Nous avons $Pg = \dfrac{fg_z - gf_z}{f}$ de sorte que

$$\begin{aligned}
SPg &= fA\left[\frac{fg_z - gf_z}{f^2}\right] \\
&= fA[\partial_z(g/f)] \\
&= f(g/f + c) \\
&= g + cf. \quad \square
\end{aligned}$$

Le théorème (21) et la proposition (24) nous montrent que l'équation (3.1) et équivalente à l'équation (3.3). C'est à dire toute solution de l'une peut ête transformée en solution de l'autre.

3.2 L'équation principale de Vekua

L'équation (3.3) est liée à l'équation de Vekua suivante

$$\left(\partial_{\bar z} - \frac{\partial_{\bar z} f}{f} C\right) W = 0. \tag{3.6}$$

Il est en effet facile de vérifier que la paire de fonctions

$$F = f \qquad \text{et} \qquad G = \frac{i}{f}$$

est une paire génératrice pour l'équation de Vekua (3.6). Ainsi, toute fonction W qui satisfait l'équation (3.6) est une fonction $\left(f, \frac{i}{f}\right)$-pseudo-analytique. Les coefficients caractéristiques associés à cette paire (F, G) sont donnés par

$$a_{(F,G)} = A_{(F,G)} = 0, \quad b_{(F,G)} = \frac{f_{\bar z}}{f}, \quad B_{(F,G)} = \frac{f_z}{f}.$$

Proposition 25. *Soit W une solution de l'équation* (3.6). *Alors sa* (F, G)*-dérivée, la fonction* $w = \overset{\bullet}{W}$, *est une solution de l'équation* (3.3).

Preuve
La démonstration se fait par un calcul direct. Supposons que W est une solution de (3.6), c'est-à-dire $W_{\bar z} = \frac{f_{\bar z}}{f}\overline{W}$. La (F, G)-dérivée $w = \overset{\bullet}{W}$ est alors donnée par

$$w = W_z - B_{(F,G)}\overline{W} = W_z - \frac{f_z}{f}\overline{W}.$$

En appliquant l'opérateur $\partial_{\bar z}$ sur la dernière équation on obtient

$$\begin{aligned} w_{\bar z} &= W_{z\bar z} - \left(\frac{f_z}{f}\right)_{\bar z} \overline{W} - \frac{f_z}{f}(\overline{W})_{\bar z} \\ &= \partial_z\left(\frac{f_{\bar z}}{f}\overline{W}\right) - \left(\frac{f_z}{f}\right)_{\bar z} \overline{W} - \frac{f_z}{f}(\overline{W})_{\bar z} \\ &= \left(\frac{f_{\bar z}}{f}\right)_z \overline{W} + \frac{f_{\bar z}}{f}(\overline{W})_z - \left(\frac{f_z}{f}\right)_{\bar z} \overline{W} - \frac{f_z}{f}(\overline{W})_{\bar z} \end{aligned}$$

En substituant $(\overline{W})_z$ par $\frac{f_z}{f}W$ et $(\overline{W})_{\bar z}$ par $\overline{w} + \frac{f_{\bar z}}{f}W$ on trouve que w satisfait l'équation (3.3). □

Maintenant, puisque

$$\int_\Gamma \overset{\bullet}{W} d_{(F,G)} z = W(z) - \varphi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z),$$

comme nous l'avons vu au Chapitre 1, et que

$$F^* = -if \qquad \text{et} \qquad G^* = 1/f$$

on est en mesure d'écrire la (F, G)-anti-dérivée comme

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z} w(\zeta) d_{(F,G)}\zeta &= f(z)\mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \frac{w(\zeta)}{f(\zeta}d\zeta - \frac{i}{f(z)}\mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} if(\zeta)w(\zeta)d\zeta \\ &= f(z)\mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \frac{w(\zeta)}{f(\zeta}d\zeta + \frac{i}{f(z)}\mathrm{Im}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)w(\zeta)d\zeta.\end{aligned}$$

Cela nous amène à la proposition qui suit.

Proposition 26. *Soit w solution de l'équation* (3.3), *alors la fonction*

$$W(z) = \int_{z_0}^{z} w(\xi) d_{(F,G)}\xi.$$

est solution de l'équation (3.6).

Soit ϕ et ψ deux fonctions à valeurs réelles. On voit facilement que la fonction $W = \phi f + i\dfrac{\psi}{f}$ est une solution de l'équation de Vekua (3.6) si et seulement si ϕ et ψ satisfont le système d'équations

$$\begin{aligned}\psi_x + f^2\phi_y &= 0 \\ \psi_y - f^2\phi_x &= 0\end{aligned}$$

qui correspond aux fonctions p-analytiques déjà étudiées dans la littérature.

Proposition 27. *Soit b une fonction complexe telle que b_z est à valeurs réelles et $W = u + iv$ une solution de l'équation*

$$W_{\overline{z}} = b\overline{W}.$$

Alors u est solution de l'équation

$$\partial_{\overline{z}}\partial_z u - (b\overline{b} + b_z)u = 0. \tag{3.7}$$

et v est une solution de l'équation

$$\partial_{\overline{z}}\partial_z v - (b\overline{b} - b_z)v = 0. \tag{3.8}$$

Preuve
Explicitement, l'équation $W_{\bar{z}} = b\overline{W}$ nous donne

$$\partial_{\bar{z}}(u + iv) = b(u - iv).$$

et

$$\partial_z(u - iv) = \bar{b}(u + iv).$$

De sorte que

$$\partial_z\partial_{\bar{z}}(u + iv) = \partial_z[b(u - iv)] = b_z(u - iv) + b\bar{b}(u + iv).$$

L'égalité des parties réelle et imaginaire complète la démonstration. □

Théorème 28. *Soit W une solution de l'équation* (3.6), *alors la partie réelle* $u = \mathrm{Re}(W)$ *est une solution de l'équation de Schrödinger* (3.1) *et la partie imaginaire* $v = \mathrm{Im}(W)$ *est une solution de l'équation de Schrödinger associée*

$$\left[\Delta + \nu - 2\left(\frac{|\nabla f|}{f}\right)^2\right]v = 0. \tag{3.9}$$

Preuve
On observe d'abord que le coefficient $b = \dfrac{f_{\bar{z}}}{f}$ dans l'équation (3.6) satisfait les conditions de la proposition 27 puisque

$$b_z = \frac{\Delta f}{f} - \left(\frac{|f_{\bar{z}}|}{f}\right)^2 = \nu - \left(\frac{|f_{\bar{z}}|}{f}\right)^2.$$

Ainsi, d'après la proposition 27, nous avons que u est une solution de (3.7) et v est une solution de (3.8). Il suffit de calculer les expressions $b\bar{b} + b_z = \nu$ et $b\bar{b} - b_z = 2\left(\frac{|\nabla f|}{f}\right)^2 - \nu$ pour compléter la démonstration. □

Théorème 29. *Soit u une solution de l'équation de Schrödinger* (3.1). *Alors la fonction*

$$v \in \ker\left[\Delta + \nu - 2\left(\frac{|\nabla f|}{f}\right)^2\right], \tag{3.10}$$

telle que $W = u + iv$ *soit une solution de l'équation* (3.6), *est construite de la façon suivante :*

$$v = f^{-1}\overline{A}(if^2\partial_{\bar{z}}(f^{-1}u)). \tag{3.11}$$

La fonction v est unique à l'addition de la fonction cf^{-1} près, où c est une constante réelle arbitraire.

À l'inverse, soit $v \in \ker\left[\Delta + \nu - 2\left(\frac{|\nabla f|}{f}\right)^2\right]$, *la fonction* $u \in \ker \Delta - \nu$ *correspondante* *est construite de la façons suivante*

$$u = -f\overline{A}(if^{-2}\partial_{\overline{z}}(fv)). \tag{3.12}$$

La fonction u est unique à l'addition de la fonction cf près, où c est une constante réelle arbitraire.

Preuve
Considérons l'équation de Vekua (3.6) et posons $W = \phi f + i\psi/f$ sa solution. Dans ce cas l'équation

$$\psi_{\overline{z}} - if^2\phi_{\overline{z}} = 0$$

est satisfaite. On remarque que si $u = \text{Re } W$, alors $\phi = u/f$. Ainsi, on obtient facilement ψ à partir de ϕ :

$$\psi = \overline{A}[if^2\phi_{\overline{z}}].$$

On vérifie, par un calcul direct, que l'expression $\overline{A}[if^2\phi_{\overline{z}}]$ existe puisque $\partial_x(f^2\phi_x) + \partial_y(f^2\phi_y) = 0$.

Par le théorème 29, la fonction $v = f^{-1}\psi$ est une solution de (3.10). Ainsi, on obtient (3.11). On note que l'opérateur $\overline{A}$ construit la fonction scalaire à une constante réelle près, la fonction v dans (3.11) est déterminée de façon unique à un terme additif près cf^{-1}, où c est une constante réelle arbitraire.

L'équation (3.12) est démontrée de façon similaire. □

Le potentiel dans l'équation de Schödinger (3.10) possède la forme d'un potentiel obtenu suite à une transformation de Darboux. Ainsi, les formules (3.11) et (3.12) peuvent être considérées comme les analogues des transformations de Darboux en dimension deux. D'autre part, lorsque $\nu = 0$ et $f = 1$, les égalités (3.11) et (3.12) se ramènent aux formules bien connues en analyse complexe pour construire la fonction conjuguée harmonique.

Chapitre 4

Sur une classe de fonctions pseudo-analytiques dans l'espace et les quaternions

Ce chapitre constitue le coeur de ce mémoire puisqu'il explore la possibilité d'étendre la théorie des fonctions pseudo-analytiques du plan (complexe) à l'espace (quaternionique). La motivation d'une telle étude provient évidemment des progrès récents et forts intéressants qui ont été avancés au cours des dernières années. Ces avancées ont, en effet, clairement montré que la théorie des fonctions pseudo-analytiques permet d'étudier de nombreux phénomènes de la physique mathématique. Il va donc de soi l'idée d'étendre cette théorie du plan à l'espace à trois dimensions spatiales.

4.1 Les quaternions

Sir William Rowan Hamilton est un mathématicien, physicien et astronome irlandais. Il est né le 4 août 1805 à Dublin. Son père est un avocat d'affaires qui parcourt tout le pays. Ne pouvant s'occuper de l'éducation de son fils, il le confie à trois ans à l'oncle de William, James Hamilton, qui est un prêtre anglican très lettré. A l'instar d'un Gauss, Hamilton est un enfant prodige. On prétend qu'à trois ans, il sait lire et compter, qu'à cinq ans, il connait le latin, le grec, et récite Homère, et qu'à 13 ans, il parle autant de langues qu'il a d'années.

L'intérêt pour les mathématiques commence avec l'étude des *Principia* de Newton à 15 ans, et celle de la Mécanique céleste de Laplace à 17 ans. En 1823, Hamilton entre au prestigieux Trinity College de Dublin. Il s'y révèle un étudiant particulièrement brillant, obtenant pratiquement à chaque examen la note maximale. Une année, cependant, ses résultats sont moins bons. Hamilton est en effet tombé amoureux de la fille d'amis de son oncle. Comme il doit encore étudier trois ans, il ne peut lui proposer de l'épouser, et finalement elle se marie avec un autre homme, de 15 ans son ainé. Cela engendre une grande déprime chez Hamilton (jusqu'à des pensées suïcidaires). Il commence alors également à écrire quelques poèmes, une passion qui perdurera sa vie durant.

En 1827, alors qu'il n'a que 21 ans et est encore étudiant, Hamilton est élu professeur d'astronomie au Trinity College. Une certaine controverse suit cette nomination. Si Hamilton est déjà un brillant théoricien, il n'a pas encore fait les preuves de ses capacités pratiques, et d'ailleurs il se révèlera un piètre observateur. Son intérêt alors est plutôt dirigé vers l'optique ou la dynamique, où il introduit et développe la notion de fonction caractéristique (l'Hamiltonien désigne désormais l'énergie totale d'un système). Durant les années 1832 à 1835, Hamilton se consacre à obtenir une présentation algébrique des nombres complexes. Il les introduit comme couple de réels, et définit sur eux addition et multiplication, tout en explicitant les liens avec les transformations du plan. Les années suivantes, il tente à tout prix de généraliser sa construction au triplet de nombres réels. Il n'y parvient pas, mais cela l'obsède, et il subit une nouvelle crise de dépression, devenant alors alcoolique.

Le salut, selon ses propres dires, vient le 16 octobre 1843. Alors qu'il se promène avec son épouse le long du Royal Canal à Dublin, il se rend subitement compte qu'on ne peut pas donner une structure multiplicative aux triplets de nombres réels, mais qu'on peut le faire pour les quadruplets. Tout excité par cette découverte, en traversant le Brougham Bridge, il aurait inscrit sur une des pierres du pont la formule de multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. L'adoption des quaternions impose « d'oublier » la commutativité du produit. C'est alors une vraie révolution. D'autre part, Hamilton invente ainsi implicitement le produit scalaire et le produit vectoriel.

Hamilton pense que les quaternions vont révolutionner les mathématiques du XIX siècle comme le calcul différentiel de Newton et Leibniz avait révolutionné les mathématiques du XVII siècle. Il consacre alors toute son énergie à les promouvoir, écrivant notamment deux livres sur le sujet. Néanmoins, les quaternions resteront assez peu utilisés, les physiciens (notamment Gibbs), en extrayant ce qui était le plus important (le produit vectoriel) pour fonder l'analyse vectorielle.

Peu de temps avant sa mort en 1865, il écrivit à son fils : « Tous les matins, alors que tu descendais pour prendre le petit déjeuner, tu me demandais : "Eh bien, papa, est-ce que tu peux multiplier les triplets ?" J'étais toujours obligé de répondre, avec un triste hochement de tête : "Non, je peux seulement les ajouter et les soustraire" ».

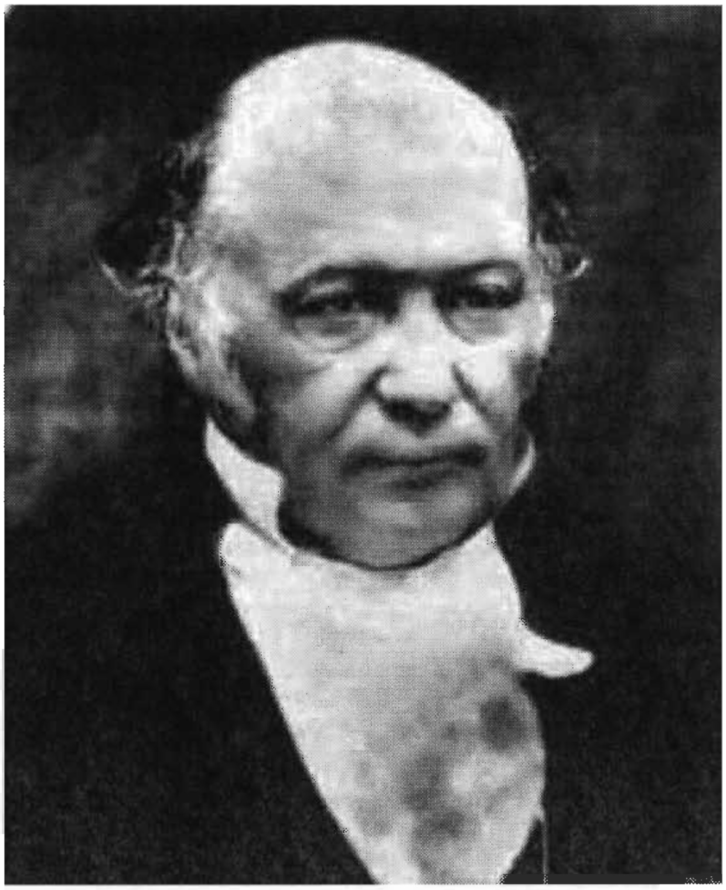


FIGURE 4.1 – William Rowan Hamilton (1805–1865)

On dénote par

$$\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \left\{ Q \mid Q = \sum_{\alpha=0}^{3} Q_\alpha e_\alpha \right\}$$

l'ensemble des quaternions complexes, souvent appelés biquaternions (voir [35, 36]), où $Q_\alpha \in \mathbb{C}$, $e_0 = 1$ et $\{e_k \mid k = 1,2,3\}$ sont les unités imaginaires standards des quaternions satisfaisant la relation

$$e_\alpha e_\beta + e_\alpha e_\beta = -2\delta_{\alpha,\beta},$$

où $\delta_{\alpha,\beta}$ est le delta de Kronecker habituel. L'unité imaginaire dans $\mathbb{C}$ est dénotée par i comme à l'habitude et cet élément commute avec tout les éléments de la base e_α, $\alpha = 0,1,2,3$. La représentation vectoriel de $Q \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ peut aussi être utilisé. On dénote alors Q comme :

$$Q = \mathrm{Sc}(Q) + \mathrm{Vec}(Q),$$

où

$$\mathrm{Sc}(Q) = Q_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Vec}(Q) = \mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{3} Q_k e_k.$$

Le conjugué d'un quaternion $Q = Q_0 + \mathbf{Q}$ est noté comme $\overline{Q} = Q_0 - \mathbf{Q}$. Dans ce qui suit, nous allons également utiliser l'opérateur de conjuguaison C_H défini comme $C_H Q = \overline{Q}$.

Étant donné la non commutativité des quaternions, nous allons également introduire l'opérateur M^P qui représente l'opération multiplication à droite par un quaternion P :

$$M^P Q = Q \cdot P.$$

4.2 L'opérateur de Dirac

Soit $Q = Q(\mathbf{x})$ une fonction dérivable à valeurs biquaternioniques, c'est-à-dire $Q : \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, où $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$ et Ω est un sous-domaine de $\mathbb{R}^3$. On définit l'opérateur de Dirac (appelé aussi opérateur de Moisil-Theodorescu) comme suit

$$DQ = \sum_{k=1}^{3} e_k \partial_k Q, \tag{4.1}$$

où $\partial_k := \dfrac{\partial}{\partial x_k}$. L'équation (4.1) peut se réécrire sous la forme vectorielle

$$DQ = -\text{div } \mathbf{Q} + \nabla Q_0 + \text{rot } \mathbf{Q},$$

en d'autres termes $\text{Sc}(DQ) = -\text{div } \mathbf{Q}$ et $\text{Vec}(DQ) = \nabla Q_0 + \text{rot } \mathbf{Q}$. On peut en effet vérifier cela par un calcul direct. Nous avons

$$DQ = \sum_{k=1}^{3} e_k \partial_k Q = e_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial Q}{\partial x_3}$$

et puisque

$$Q = \sum_{\alpha=0}^{3} Q_\alpha e_\alpha = Q_0 + e_1 Q_1 + e_2 Q_2 + e_3 Q_3,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} e_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} &= e_1 \left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_1} + e_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} + e_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_1} \right) \\ &= e_1 \frac{\partial Q_0}{\partial x_1} + e_1 e_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + e_1 e_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} + e_1 e_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_1} \\ &= e_1 \frac{\partial Q_0}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + e_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} - e_2 \frac{\partial Q_3}{\partial x_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2\frac{\partial Q}{\partial x_2} &= e_2\left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_2}+e_1\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+e_2\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+e_3\frac{\partial Q_3}{\partial x_2}\right)\\
&= e_2\frac{\partial Q_0}{\partial x_2}+e_2e_1\frac{\partial Q_1}{\partial x_2}+e_2e_2\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+e_2e_3\frac{\partial Q_3}{\partial x_2}\\
&= e_2\frac{\partial Q_0}{\partial x_2}-e_3\frac{\partial Q_1}{\partial x_2}-\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+e_1\frac{\partial Q_3}{\partial x_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_3\frac{\partial Q}{\partial x_3} &= e_3\left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_3}+e_1\frac{\partial Q_1}{\partial x_3}+e_2\frac{\partial Q_2}{\partial x_3}+e_3\frac{\partial Q_3}{\partial x_3}\right)\\
&= e_3\frac{\partial Q_0}{\partial x_3}+e_3e_1\frac{\partial Q_1}{\partial x_3}+e_3e_2\frac{\partial Q_2}{\partial x_3}+e_3e_3\frac{\partial Q_3}{\partial x_3}\\
&= e_3\frac{\partial Q_0}{\partial x_3}+e_2\frac{\partial Q_1}{\partial x_3}-e_1\frac{\partial Q_2}{\partial x_3}-\frac{\partial Q_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
DQ &= e_1\frac{\partial Q}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial Q}{\partial x_2}+e_3\frac{\partial Q}{\partial x_3}\\
&= e_1\frac{\partial Q_0}{\partial x_1}-\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+e_3\frac{\partial Q_2}{\partial x_1}-e_2\frac{\partial Q_3}{\partial x_1}\\
&\quad + e_2\frac{\partial Q_0}{\partial x_2}-e_3\frac{\partial Q_1}{\partial x_2}-\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+e_1\frac{\partial Q_3}{\partial x_2}\\
&\quad + e_3\frac{\partial Q_0}{\partial x_3}+e_2\frac{\partial Q_1}{\partial x_3}-e_1\frac{\partial Q_2}{\partial x_3}-\frac{\partial Q_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les termes, on trouve

$$\begin{aligned}
DQ &= -\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+\frac{\partial Q_3}{\partial x_3}\right)+\left(e_1\frac{\partial Q_0}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial Q_0}{\partial x_2}+e_3\frac{\partial Q_0}{\partial x_3}\right)\\
&\quad + \left(\frac{\partial Q_3}{\partial x_2}-\frac{\partial Q_2}{\partial x_3}\right)e_1+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_3}-\frac{\partial Q_3}{\partial x_1}\right)e_2+\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_1}-\frac{\partial Q_1}{\partial x_2}\right)e_3\\
&= -\operatorname{div}\mathbf{Q}+\nabla Q_0+\operatorname{rot}\mathbf{Q}.
\end{aligned}$$

Par un calcul similaire on montre que

$$D^2=-\Delta, \qquad \text{où} \qquad \Delta=\sum_{k=1}^{3}\partial_k^2 \qquad (\text{Laplacien dans } \mathbb{R}^3).$$

En effet, par définition $DQ=\sum_{k=1}^{3}e_k\partial_kQ$, de sorte que

$$\begin{aligned}
D^2Q &= e_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e_1\frac{\partial Q}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial Q}{\partial x_2}+e_3\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)\\
&\quad + e_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(e_1\frac{\partial Q}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial Q}{\partial x_2}+e_3\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)\\
&\quad + e_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_1\frac{\partial Q}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial Q}{\partial x_2}+e_3\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)\\
&= e_1e_1\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}+e_1e_2\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\partial x_2}+e_1e_3\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\partial x_3}\\
&\quad + e_2e_1\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2\partial x_1}+e_2e_2\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}+e_2e_3\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2\partial x_3}\\
&\quad + e_3e_1\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3\partial x_1}+e_3e_2\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3\partial x_2}+e_3e_3\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^2}\\
&= -\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}+\cancel{e_3\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\partial x_2}}-\cancel{e_2\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\partial x_3}}\\
&\quad -\cancel{e_3\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2\partial x_1}}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}+\cancel{e_1\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2\partial x_3}}\\
&\quad +\cancel{e_2\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3\partial x_1}}-\cancel{e_1\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3\partial x_2}}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^2}\\
&= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)Q\\
&= -\Delta Q.
\end{aligned}$$

Nous notons que l'opérateur de Dirac D introduit ci-dessus agit de la gauche, nous pouvons également introduire un opérateur de Dirac agissant de la droite. Cet opérateur, dénoté par D_r, est défini comme

$$D_rQ = \sum_{k=1}^{3}\partial_k Q\, e_k.$$

Nous pouvons alors montrer que

$$D_rQ = -\text{div }\mathbf{Q} + \nabla Q_0 - \text{rot }\mathbf{Q}.$$

En effet, pour $D_rQ = \sum_{k=1}^{3} \partial_k Q e_k$ et $Q = \sum_{\alpha=0}^{3} Q_\alpha e_\alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x_1} e_1 &= \left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_1} + e_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} + e_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_1}\right) e_1 \\
&= \frac{\partial Q_0}{\partial x_1} e_1 + e_1 e_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + e_2 e_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} + e_3 e_1 \frac{\partial Q_3}{\partial x_1} \\
&= e_1 \frac{\partial Q_0}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} - e_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial Q_3}{\partial x_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x_2} e_2 &= \left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_2} + e_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + e_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_2}\right) e_2 \\
&= e_2 \frac{\partial Q_0}{\partial x_2} + e_1 e_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} + e_2 e_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + e_3 e_2 \frac{\partial Q_3}{\partial x_2} \\
&= e_2 \frac{\partial Q_0}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - e_1 \frac{\partial Q_3}{\partial x_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x_3} e_3 &= \left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_3} + e_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} + e_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} + e_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_3}\right) e_3 \\
&= e_3 \frac{\partial Q_0}{\partial x_3} + e_1 e_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} + e_2 e_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} + e_3 e_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_3} \\
&= e_3 \frac{\partial Q_0}{\partial x_3} - e_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} + e_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_3},
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
D_rQ &= e_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial Q}{\partial x_3} \\
&= e_1 \frac{\partial Q_0}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} - e_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial Q_3}{\partial x_1} \\
&\quad + e_2 \frac{\partial Q_0}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - e_1 \frac{\partial Q_3}{\partial x_2} \\
&\quad + e_3 \frac{\partial Q_0}{\partial x_3} - e_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} + e_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

En regroupant les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
D_rQ &= -\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_3}{\partial x_3}\right) + \left(e_1 \frac{\partial Q_0}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial Q_0}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial Q_0}{\partial x_3}\right) \\
&\quad - \left[\left(\frac{\partial Q_3}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_3}\right) e_1 + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_3} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_1}\right) e_2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}\right) e_3\right] \\
&= -\operatorname{div} \mathbf{Q} + \nabla Q_0 - \operatorname{rot} \mathbf{Q}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur de Dirac à gauche D et l'opérateur de Dirac à droite D_r se distinguent par un changement de signe dans la composante du rotationnel de chacun de ces opérateurs.

L'opérateur de Dirac admet la généralisation suivante de la règle de Leibniz (voir [24]).

Théorème 30. *Soit* $\{P,Q\} \subset C^1(\Omega;\ \mathbb{H}(\mathbb{C}))$, *où* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Nous avons*

$$D[P \cdot Q] = D[P] \cdot Q + \overline{P} \cdot D[Q] - 2\sum_{k=1}^{3} P_k \partial_k Q.$$

On note, en particulier, que si $\mathrm{Vec}(P) = 0$, c'est-à-dire que $P = P_0$, alors

$$D[P_0 \cdot Q] = D[P_0] \cdot Q + P_0 \cdot D[Q].$$

4.3 Factorisation de l'équation de Schödinger et équations de Vekua dans l'espace

Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction scalaire inconnue dérivable à valeurs complexes et soit $\mathbf{\Psi} : \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ une fonction donnée biquaternionique continue telle que $\mathbf{\Psi} = \sum_{k=1}^{3} \psi_k e_k$ et $\mathrm{rot}\ \mathbf{\Psi} = 0$. Nous pouvons alors introduire une généralisation des opérateurs intégrales A et $\overline{A}$ introduits au chapitre précédent en considérant l'équation $D\varphi = \mathbf{\Psi}$ ou de façon équivalente

$$\Delta\varphi = \mathbf{\Psi}.$$

La fonction scalaire φ est appelée le potentiel de $\mathbf{\Psi}$ et cette fonction est déterminée à l'aide de l'opérateur

$$\varphi = \mathcal{A}[\mathbf{\Psi}].$$

Il est connu que l'on peut reconstruire φ, à une constante complexe c près, de la façon suivante :

$$\mathcal{A}[\mathbf{\Psi}](x,y,z) = \int_{x_0}^{x} \psi_1(\xi, y_0, z_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} \psi_2(x,\eta,z_0)d\eta + \int_{z_0}^{z} \psi_3(x,y,\zeta)d\zeta + c,$$

où (x_0, y_0, z_0) est un point arbitraire du domaine Ω.

Maintenant considérons l'équation de Schrödinger tridimentionnelle stationnaire dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$(-\Delta + q)\phi = 0, \tag{4.2}$$

où q et ϕ sont deux fonctions scalaires à valeurs complexes qui dépendent de $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_3)$. En utilisant l'opérateur de Dirac D, nous sommes maintenant en mesure de factoriser l'équation (4.2).

Théorème 31. [32] *Soit f une solution particulière non nulle de l'équation (4.2). Pour toute fonction scalaire $\phi \in C^2(\Omega; \mathbb{C})$, nous avons l'égalité suivante*

$$(-\Delta + q)\phi = (D + M^{\frac{Df}{f}})(D - \frac{Df}{f}C_H)\phi. \tag{4.3}$$

Preuve

Soit $\phi \in C^2(\Omega; \mathbb{C})$, nous avons alors

$$\begin{aligned}
\left(D + M^{\frac{Df}{f}}\right)\left(D - \frac{Df}{f}C_H\right)\phi &= \left(D + M^{\frac{Df}{f}}\right)\left(D\phi - \frac{Df}{f}C_H\phi\right) \\
&= \left(D + M^{\frac{Df}{f}}\right)\left(D\phi - \frac{Df}{f}\phi\right) \\
&= D^2\phi - D\left[\frac{Df}{f}\phi\right] + M^{\frac{Df}{f}}D\phi - M^{\frac{Df}{f}}\frac{Df}{f}\phi.
\end{aligned}$$

Nous savons que $D^2\phi = -\Delta\phi$. Considérons maintenant

$$\begin{aligned}
D\left[\frac{Df}{f}\phi\right] &= D\left[\frac{Df}{f}\right]\phi + \frac{Df}{f}D\phi \\
&= \frac{fD^2f - (Df)^2}{f^2}\phi + \frac{Df}{f}D\phi \\
&= \frac{D^2f}{f}\phi - \frac{(Df)^2}{f^2}\phi + \frac{DfD\phi}{f} \\
&= \frac{-\Delta f}{f}\phi - \frac{(Df)^2}{f^2}\phi + \frac{DfD\phi}{f}.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$M^{\frac{Df}{f}}D\phi = \frac{D\phi Df}{f},$$

et

$$\begin{aligned}
M^{\frac{Df}{f}}\frac{Df}{f}\phi &= \frac{Df}{f}\phi\frac{Df}{f} \\
&= \frac{(Df)^2}{f^2}\phi.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\left(D + M^{\frac{Df}{f}}\right)\left(D - \frac{Df}{f}C_H\right)\phi &= D^2\phi - D\left[\frac{Df}{f}\phi\right] + M^{\frac{Df}{f}} D\phi - M^{\frac{Df}{f}} \frac{Df}{f}\phi \\
&= -\Delta\phi + \frac{\Delta f}{f}\phi + \cancel{\frac{(Df)^2}{f^2}}\phi - \cancel{\frac{DfD\phi}{f}} + \cancel{\frac{D\phi Df}{f}} - \cancel{\frac{(Df)^2}{f^2}}\phi \\
&= -\Delta\phi + \frac{\Delta f}{f}\phi \\
&= \left(-\Delta + \frac{\Delta f}{f}\right)\phi.
\end{aligned}$$

Comme f est une solution particulière de l'équation (4.2), alors

$$(-\Delta + q)f = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\Delta f}{f} = q. \quad \square$$

Théorème 32. *Soit $W = W_0 + \mathbf{W}$ une solution de l'équation*

$$\left(D - \frac{Df}{f}C_H\right)W = 0, \tag{4.4}$$

alors nous avons :

a) La fonction scalaire W_0 est solution de l'équation (4.2), où $q = \dfrac{\Delta f}{f}$.

b) La fonction scalaire $\varphi_0 = \dfrac{W_0}{f}$ est solution de l'équation

$$\operatorname{div}(f^2\ \nabla\varphi_0) = 0. \tag{4.5}$$

c) La fonction vectorielle $\mathbf{\Phi} = f\mathbf{W}$ est solution de l'équation

$$\operatorname{rot}(f^{-2}\ \operatorname{rot}\ \mathbf{\Phi}) = 0. \tag{4.6}$$

Preuve
Soit $W = W_0 + \mathbf{W}$ une solution de l'équation (4.4), c'est-à-dire

$$DW - \frac{Df}{f}\overline{W} = 0.$$

D'après ce qu'on a vu précédemment, nous savons que $\overline{W} = W_0 - \mathbf{W}$, $DW = -\operatorname{div}\ \mathbf{W} + \nabla W_0 + \operatorname{rot}\ \mathbf{W}$ et $Df = \nabla f$. Par conséquent, l'équation (4.4) devient

$$-\operatorname{div}\ \mathbf{W} + \nabla W_0 + \operatorname{rot}\ \mathbf{W} + \frac{\nabla f}{f}\mathbf{W} - \frac{\nabla f}{f}W_0 = 0.$$

Maintenant, on sait que la multiplication de deux quaternions purement vectoriels $\mathbf{Q_1 Q_2}$ est donnée par $\mathbf{Q_1 Q_2} = -\mathbf{Q_1} \cdot \mathbf{Q_2} + \mathbf{Q_1} \wedge \mathbf{Q_2}$, où $\cdot$ et $\wedge$ représentent, respectivement, les produits scalaire et vectoriel habituels. Ainsi, l'équation (4.4) se réécrit comme

$$-\text{div } \mathbf{W} + \nabla W_0 + \text{rot } \mathbf{W} - \frac{\nabla f}{f} \cdot \mathbf{W} + \frac{\nabla f}{f} \wedge \mathbf{W} - \frac{\nabla f}{f} W_0 = 0.$$

En séparant les composantes scalaire et vectorielle de cette équation on obtient :

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{W} + \dfrac{\nabla f}{f} \cdot \mathbf{W} = 0 & (*) \\ \nabla W_0 + \text{rot } \mathbf{W} + \dfrac{\nabla f}{f} \wedge \mathbf{W} - \dfrac{\nabla f}{f} W_0 = 0. & (**) \end{cases}$$

Considérons, pour le moment, la partie vectorielle $(**)$. D'une part, nous pouvons montrer que $\text{rot } \mathbf{W} = f^{-1}\text{rot}(f\mathbf{W}) - \frac{\nabla f}{f} \wedge \mathbf{W}$ de sorte que la seconde équation $(**)$ du système ci-dessus s'écrit comme

$$\nabla W_0 + f^{-1}\text{rot}(f\mathbf{W}) - \frac{\nabla f}{f} W_0 = 0.$$

De plus, $\nabla W_0 - \frac{\nabla f}{f} W_0 = f \nabla \left(\frac{W_0}{f}\right)$ de sorte que $(**)$ se réécrit de nouveau comme

$$f \nabla \left(\frac{W_0}{f}\right) + f^{-1}\text{rot}(f\mathbf{W}) = 0.$$

En multipliant par f qui est non nulle, nous obtenons

$$f^2 \nabla \left(\frac{W_0}{f}\right) + \text{rot}(f\mathbf{W}) = 0. \qquad (***)$$

En appliquant la divergence sur cette expression vectorielle, on démontre b).

D'autre part, l'équation b)

$$\text{div}\left[f^2 \nabla \left(\frac{W_0}{f}\right)\right] = 0.$$

peut se réécrire comme

$$\text{div}\left[f \nabla W_0 - W_0 \nabla f\right] = 0.$$

Comme l'opérateur divergence est un opérateur linéaire, on trouve

$$\Delta W_0 - W_0 \frac{\Delta f}{f} = 0,$$

ce qui complète la démonstration de a).

En multipliant l'équation $(***)$ par f^{-2} et en appliquant le rotationnel à cette équation vectorielle, on trouve

$$\operatorname{rot}\left[f^{-2}\operatorname{rot}(f\mathbf{W}) + \nabla\left(\frac{W_0}{f}\right)\right] = 0.$$

Comme le rotationnel d'un gradient est nul, alors

$$\operatorname{rot}\left[f^{-2}\operatorname{rot}(f\mathbf{W})\right] = 0.$$

Ce qui complète la démonstration pour c). □

4.4 Dérivée des fonctions pseudo-analytiques dans l'espace pour une classe d'équations de Vekua

Définition 33. *Dans l'espace à trois dimensions, on définit les opérateurs de Vekua suivants :*

$$V = D - \frac{Df}{f}C_H, \qquad \overline{V_1} = D + M^{\frac{Df}{f}},$$
$$\overline{V} = D_r - M^{\frac{Df}{f}}C_H, \qquad V_1 = D_r + \frac{Df}{f},$$

où D et D_r sont les opérateurs de Dirac, f une solution non nulle de l'équation de Schrödinger (4.2) *et C_H est l'opérateur de conjuguaison des biquaternions.*

On suppose que ces opérateurs de Vekua agissent sur des fonctions à valeurs biquaternioniques $\Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ différentiables, où Ω est un sous-domaine de $\mathbb{R}^3$. Nous pouvons montrer que les relations suivantes sont valides :

$$C_H V = -\overline{V}C_H \qquad \text{et} \qquad C_H V_1 = -\overline{V_1}C_H. \tag{4.7}$$

Démontrons la première relation dans (4.7). Soit $W : \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, nous avons

$$
\begin{aligned}
C_H V W &= C_H\left[\left(D - \frac{Df}{f} C_H\right) W\right] \\
&= C_H\left[DW - \frac{Df}{f}\overline{W}\right] \\
&= C_H\left[-\text{div } \mathbf{W} + \nabla W_0 + \text{rot } \mathbf{W} - \frac{\nabla f}{f}(W_0 - \mathbf{W})\right] \\
&= -\text{div } \mathbf{W} - \nabla W_0 - \text{rot } \mathbf{W} + W_0 \frac{\nabla f}{f} + \mathbf{W}\frac{\nabla f}{f}) \\
&= -\left[\text{div } \mathbf{W} + \nabla W_0 + \text{rot } \mathbf{W}\right] + W\frac{Df}{f} \\
&= -\left[-\text{div } \overline{\mathbf{W}} + \nabla W_0 - \text{rot } \overline{\mathbf{W}}\right] + W\frac{Df}{f} \\
&= -D_r \overline{W} + M^{\frac{Df}{f}} W \\
&= -\left[D_r - M^{\frac{Df}{f}} C_H\right]\overline{W} \\
&= -\overline{V} C_H W.
\end{aligned}
$$

La seconde relation de (4.7) se démontre de façon similaire.

Supposons maintenant que

$$VW = 0, \tag{4.8}$$

où $W \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$.

D'après l'équation (4.3), nous avons

$$\overline{V_1} V W_0 = V_1 \overline{V} W_0 = (-\Delta + q) W_0 = 0 \tag{4.9}$$

de sorte que

$$0 = \overline{V_1} V \mathbf{W} = C_H \overline{V_1} V \mathbf{W} = V_1 \overline{V} \mathbf{W}.$$

À partir de ces deux dernieres équations, la fonction $\overline{V} W$ est une solution de l'équation suivante

$$V_1 w = 0, \tag{4.10}$$

où W est une solution de l'équation (4.8). Ces observations nous permettent d'obtenir la définition suivante de la dérivée de Bers dans l'espace.

Définition 34. *Soit W une solution de l'équation* (4.8)*, alors la fonction*

$$\overset{\bullet}{W} = \overline{V} W$$

est une solution de l'équation (4.10) *et est appelée dérivée de Bers de W.*

En d'autres mots, l'opérateur $\overline{V}$ agit de la façons suivante

$$\overline{V} : \ker V \longrightarrow \ker V_1.$$

De plus, comme nous allons le démontrer ci-dessous, la dérivée $\overset{\bullet}{W}$ est purement vectorielle et, ainsi, est une solution de l'équation $\overline{V}_1 w = 0$.

Considérons maintenant une autre représentation de la dérivée de Bers $\overset{\bullet}{W}$ similaire à la première égalité de l'équation (2.1). Nous avons

$$\overline{V}W = \left(D_r - M^{\frac{Df}{f}} C_H\right) W = \left(D_r - M^{\frac{Df}{f}} C_H\right) \sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha F_\alpha,$$

où les fonctions F_α représentent un quadruplet générateur (par analogie avec le terme « paire génératrice » dans la théorie usuelle), solutions de l'équation (4.8), données par

$$F_0 = f, \quad F_1 = \frac{e_1}{f}, \quad F_2 = \frac{e_2}{f}, \quad F_3 = \frac{e_3}{f},$$

et

$$\varphi_0 = \frac{W_0}{f}, \quad \varphi_1 = fW_1, \quad \varphi_2 = fW_2, \quad \varphi_3 = fW_3.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\overline{V}W &= \left(D_r - M^{\frac{Df}{f}} C_H\right) \sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha F_\alpha \\
&= D_r \left(\sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha F_\alpha\right) - M^{\frac{Df}{f}} C_H \sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha F_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=0}^{3} D_r(\varphi_\alpha F_\alpha) - M^{\frac{Df}{f}} \sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha \overline{F}_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=0}^{3} D_r(F_\alpha \varphi_\alpha) - \left(\sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha \overline{F}_\alpha\right) \frac{Df}{f} \\
&= \sum_{\alpha=0}^{3} D_r F_\alpha \cdot \varphi_\alpha + \sum_{\alpha=0}^{3} F_\alpha D_r \varphi_\alpha - \left(\sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha \overline{F}_\alpha\right) \frac{Df}{f} \\
&= \sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha \cdot D_r F_\alpha + \sum_{\alpha=0}^{3} F_\alpha D \varphi_\alpha - \left(\sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha \overline{F}_\alpha\right) \frac{Df}{f} \\
&= \sum_{\alpha=0}^{3} F_\alpha \cdot D\varphi_\alpha + \sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha (D_r - M^{\frac{Df}{f}} C_H) F_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=0}^{3} F_\alpha \cdot D\varphi_\alpha + \sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha \overline{V} F_\alpha.
\end{aligned}$$

Or, on montre facilement que $\overline{V} F_\alpha = 0$ pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$. En effet, nous avons

$$0 = VF_\alpha = C_H V F_\alpha = \overline{V}\, \overline{F}_\alpha.$$

Si $\alpha = 0$, alors $0 = \overline{V}\,\overline{F}_0 = \overline{V}F_0$, sinon pour $k = 1,2,3$ nous avons $0 = \overline{V}\,\overline{F}_k = -\overline{V}F_k$. Par conséquent, une autre représentation de la dérivée de Bers de la fonction W est donnée par

$$\overset{\bullet}{W} = \overline{V}W = \sum_{\alpha=0}^{3} F_\alpha \cdot D\varphi_\alpha. \tag{4.11}$$

Maintenant que la dérivée de Bers a été définie, considérons l'intégrale de Bers dans l'espace. Nous avons les égalités suivantes

$$\sum_{\alpha=0}^{3} D\varphi_\alpha \cdot F_\alpha = 0 \tag{4.12}$$

et

$$\sum_{\alpha=0}^{3} D\varphi_\alpha \cdot \overline{F}_\alpha = -\overline{\overset{\bullet}{W}}, \tag{4.13}$$

où la première égalité est simplement une autre représentation de l'équation de Vekua $VW = 0$ pour $W = \sum_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha F_\alpha$ et la seconde équation est obtenue de (4.11) en appliquant l'opérateur C_H. Plus explicitement, on a

$$D\varphi_0 f + \sum_{k=1}^{3} D\varphi_k \frac{e_k}{f} = 0 \tag{4.14}$$

et

$$D\varphi_0 f - \sum_{k=1}^{3} D\varphi_k \frac{e_k}{f} = -\overline{\overset{\bullet}{W}}. \tag{4.15}$$

de sorte que la somme des équations (4.14) et (4.15) nous donnent

$$D\varphi_0 = -\frac{1}{2f}\overline{\overset{\bullet}{W}}. \tag{4.16}$$

Comme $D\varphi_0 = \nabla\varphi_0$, la fonction scalaire φ_0 de l'équation (4.16) existe si et seulement si $\overset{\bullet}{W}$ est une fonction purement vectorielle et satisfait l'équation

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{f}\overset{\bullet}{W}\right) = 0.$$

En effet, considérons

$$
\begin{aligned}
\overset{\bullet}{W} + \overline{\overset{\bullet}{W}} &= \sum_{\alpha=0}^{3} F_\alpha \; D\varphi_\alpha - \sum_{\alpha=0}^{3} D\varphi_\alpha \cdot \overline{F}_\alpha \\
&= \cancel{F_0 D\varphi_0} + \sum_{k=1}^{3} F_k \; D\varphi_k - \cancel{D\varphi_0 F_0} - \sum_{k=1}^{3} D\varphi_k \cdot \overline{F}_k \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{e_k}{f} \; D\varphi_k + \sum_{k=1}^{3} D\varphi_k \cdot \frac{e_k}{f} \\
&= \frac{1}{f} \sum_{k=1}^{3} (e_k D\varphi_k + D\varphi_k e_k) \\
&= -\frac{1}{f} \sum_{k=1}^{3} \partial_k \varphi_k \\
&= -\frac{1}{f} \text{div } \mathbf{\Phi},
\end{aligned}
$$

où $\mathbf{\Phi} := \sum_{k=1}^{3} \varphi_k e_k$. Comme $\mathbf{\Phi} = f\mathbf{W}$, nous avons [47] que

$$\text{div } \mathbf{\Phi} = 0. \tag{4.17}$$

Par conséquent, $\overset{\bullet}{W} + \overline{\overset{\bullet}{W}} = 0$, ce qui démontre que $\overset{\bullet}{W}$ est purement vectorielle.

Considérons maintenant l'expression

$$
\begin{aligned}
\text{rot} \left(\frac{1}{f} \overset{\bullet}{W} \right) &= \text{rot} \left(\frac{1}{f} \sum_{\alpha=0}^{3} F_\alpha D\varphi_\alpha \right) \\
&= \text{rot} \left(\nabla \varphi_0 + \frac{1}{f^2} \sum_{k=1}^{3} e_k D\varphi_k \right) \\
&= \text{rot} \left(\frac{1}{f^2} \sum_{k=1}^{3} e_k D\varphi_k \right).
\end{aligned}
$$

À partir de la chaîne d'égalités qui précédent l'équation (4.17), nous savons que

$$\sum_{k=1}^{3} e_k D\varphi_k = -\sum_{k=1}^{3} D\varphi_k e_k = -D\mathbf{\Phi} = -\text{rot } \mathbf{\Phi},$$

étant donné l'équation (4.17). Ainsi,

$$\text{rot} \left(\frac{1}{f} \overset{\bullet}{W} \right) = -\text{rot} \left(\frac{1}{f^2} \text{rot } \mathbf{\Phi} \right)$$

et, en accord avec le théorème 32, cela est égale à zéro.

Par conséquent, si W est une solution de l'équation (4.8), alors l'équation (4.16) possède la solution φ_0 qui peut s'écrire de la façons suivante

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\mathcal{A}\left[\frac{1}{f}\overset{\bullet}{W}\right]. \tag{4.18}$$

Cette expression est unique, à constante près.

Maintenant, nous allons établir comment $\mathbf{\Phi}$ peut être obtenue à partir des équations (4.12) et (4.13). Nous avons

$$\sum_{k=1}^{3} D\varphi_k \, \frac{e_k}{f^2} = \frac{1}{2}\overline{\overset{\bullet}{W}},$$

c'est-à-dire

$$D\mathbf{\Phi} = \frac{f}{2}\overline{\overset{\bullet}{W}}, \tag{4.19}$$

ou, plus explicitement,

$$\operatorname{div} \mathbf{\Phi} = 0 \quad \text{ et } \quad \operatorname{rot} \mathbf{\Phi} = -\frac{f}{2}\overset{\bullet}{W}.$$

D'autre part, nous avons $\operatorname{div}(f\overset{\bullet}{W}) = 0$. En effet, de l'équation (4.16) on trouve

$$f\overset{\bullet}{W} = 2f^2\nabla\varphi = 2f^2\nabla\left(\frac{W_0}{f}\right)$$

et, d'après le théorème 32

$$\operatorname{div}\left[f^2\nabla\left(\frac{W_0}{f}\right)\right] = 0.$$

Par conséquent, le problème qui permet de rétablir $\mathbf{\Phi}$ se réduit au problème, bien connu, de la reconstruction d'un vecteur à partir de sa divergence et de son rotationnel. Nous aurons besoin de la notation suivante. Pour une fonction vectorielle $\mathbf{Q}$, nous définissons l'opérateur $\mathbf{B}[\mathbf{Q}](\mathbf{x})$ par

$$\mathbf{B}[\mathbf{Q}](x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\mathbf{Q}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}d\Omega.$$

Notons que $\mathbf{B}$ est un inverse, à droite, de l'opérateur rot rot.

Ainsi, on obtient [32]

$$\mathbf{\Phi} = \operatorname{rot}\left(\mathbf{B}\left[-\frac{f}{2}\overset{\bullet}{W}\right]\right) + \nabla h, \tag{4.20}$$

où h est une fonction harmonique quelconque définie sur Ω.

L'ensemble de ces résultats nous permettent ainsi d'introduire le théorème suivant.

Théorème 35. *Soit* $\mathbf{w} \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *une fonction purement vectorielle solution de l'équation*

$$\left(D + M^{\frac{Df}{f}}\right)\boldsymbol{w} = 0, \tag{4.21}$$

où $f \in C^1(\Omega)$ *est une fonction scalaire non nulle. Alors la solution de l'équation*

$$DW - \frac{Df}{f}\overline{W} = 0, \quad \textit{dans } \Omega, \tag{4.22}$$

tel que $\mathbf{w} = \overset{\bullet}{W}$ *est définie comme*

$$W = \frac{1}{2}\left(f\mathcal{A}\left[\frac{\mathbf{w}}{f}\right] - \frac{1}{f}\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}[f\mathbf{w}]) + \frac{\nabla h}{f}\right), \tag{4.23}$$

où h *est une fonction harmonique arbitraire dans* Ω.

Preuve
On remarque d'abord que

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{w}}{f}\right) = 0. \tag{4.24}$$

En effet, à partir de la partie vectorielle de (4.21), nous avons $\operatorname{rot}\mathbf{w} + (\mathbf{w} \wedge \frac{\nabla f}{f}) = 0$ ce qui est équivalent à (4.24). Ainsi, le vecteur $\frac{\mathbf{w}}{f}$ est un gradient et l'expression $\mathcal{A}[\frac{\mathbf{w}}{f}]$ est bien définie.

D'autre part, on observe que l'opérateur apparaissant dans l'équation (4.21) peut être réécrit comme

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\left(fDf^{-1}(I + C_H) + f^{-1}Df(I - C_H)\right)\left(f\mathcal{A}[\tfrac{\mathbf{w}}{f}] - \tfrac{1}{f}\operatorname{rot}(\mathbf{B}[f\mathbf{w}]) + \tfrac{\nabla h}{f}\right)\\
= \;& \tfrac{1}{2}\left(fD\mathcal{A}[\tfrac{\mathbf{w}}{f}] - f^{-1}D\operatorname{rot}(\mathbf{B}[f\mathbf{w}])\right)\\
= \;& \tfrac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{w}) = 0.
\end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que $\mathbf{w} = \overset{\bullet}{W}$. Pour cela, on observe que

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{W} &= \overline{V}W = \tfrac{1}{2}\left(fD_r f^{-1}(I + C_H) + f^{-1}D_r f(I - C_H)\right)W \\ &= \tfrac{1}{2}\left(fD\mathcal{A}[\tfrac{\mathbf{w}}{f}] - f^{-1}D\,\mathrm{rot}(\mathbf{B}[f\mathbf{w}])\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{w} + \mathbf{w}) = \mathbf{w}.\ \square\end{aligned}$$

Un autre corollaire important des calculs précédents est la généralisation du théorème 29.

Théorème 36. *Soit W_0 une fonction scalaire solution de l'équation (4.2) avec $q = \frac{\Delta f}{f}$. Alors la fonction vectorielle $\mathbf{W}$ telle que $\mathbf{\Phi} = f\mathbf{W}$ soit une solution de (4.6) et (4.17) et que $W = W_0 + \mathbf{W}$ est solution de l'équation (4.4) est construite de la façon suivante : Le vecteur fonction $\boldsymbol{W}$ et la fonction scalaire W_0 sont construits de la façon suivante*

$$\mathbf{W} = -f^{-1}\left\{\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{B}\left[f^2\nabla\left(f^{-1}W_0\right)\right]\right) + \nabla h\right\}. \tag{4.25}$$

À partir d'une solution $\mathbf{\Phi}$ de (4.6) et (4.17), pour $\mathbf{W} = \frac{1}{f}\mathbf{\Phi}$, la solution correspondante W_0 de (4.2), telle que $W = W_0 + \mathbf{W}$ soit une solution de (4.4), est construite comme

$$W_0 = -f\left\{\mathcal{A}\left[f^{-2}\mathrm{rot}\left(f\,\boldsymbol{W}\right]\right)\right\}. \tag{4.26}$$

Preuve

Soit W_0 une solution scalaire de (4.2) avec $q = \frac{\Delta f}{f}$. Alors de l'équation (4.16) nous avons $\overset{\bullet}{W} = 2f\nabla(f^{-1}W_0)$ et étant donné (4.20) on obtient

$$\mathbf{\Phi} = -\mathrm{rot}\left(\mathbf{B}\left[f^2\nabla\left(f^{-1}W_0\right)\right]\right) + \nabla h,$$

de telle sorte que l'équation (4.25) est satisfaite.

Maintenant, posons $\mathbf{\Phi}$ comme solution de (4.6) et (4.17). En accord ave l'équation (4.19) nous avons $\overset{\bullet}{W} = -2f^{-1}D\mathbf{\Phi} = -2f^{-1}\mathrm{rot}(f\mathrm{W})$. Ainsi, à partir de l'équation (4.18) on obtient (4.26). $\square$

4.5 Exemples et applications

Dans cette section nous analysons la possibilités de construire des solutions de l'équation (4.21) avec certaines restrictions sur la fonction f. Ces solutions seront alors utilisées afin d'obtenir des solutions de l'équation de Schrödinger (4.2).

Proposition 37. *Soit $f \in C^1$ une fonction scalaire non nulle définie sur Ω. Supposons qu'il existe une fonction harmonique ρ telle que*

$$\nabla f \wedge \nabla \rho = 0 \qquad \textit{dans } \Omega. \tag{4.27}$$

Alors la fonction purement vectorielle

$$\mathbf{F} = \frac{1}{f} D\rho \tag{4.28}$$

est une solution de l'équation (4.21) et l'équation $\mathbf{G} = fD\rho$ est une solution de l'équation

$$(D - M^{\frac{Df}{f}})\mathbf{G} = 0. \tag{4.29}$$

Preuve
Considérons

$$\begin{aligned}
D\mathbf{F} &= D\left(\frac{1}{f}D\rho\right) \\
&= \frac{fD^2\rho - DfD\rho}{f^2} \\
&= \frac{-f\Delta\rho - DfD\rho}{f^2} \\
&= -\frac{1}{f^2}DfD\rho \qquad \rho \text{ est harmonique} \qquad (\Delta\rho = 0) \\
&= -\mathbf{F}\frac{Df}{f}.
\end{aligned}$$

De façon similaire, on démontre (4.29). □

Proposition 38. *Soit $f \in C^1$ une fonction scalaire non nulle définie sur Ω. Supposons qu'il existe une fonction harmonique ρ telle que*

$$\langle \nabla f,\ \nabla \rho \rangle = 0 \qquad \textit{dans } \Omega,$$

Alors la fonction purement vectorielle

$$\mathbf{F} = fD\rho$$

est une solution de l'équation (4.21) *et la fonction* $\boldsymbol{G} = \frac{1}{f}D\rho$ *est une solution de l'équation* (4.29).

Preuve
Considérons

$$\begin{aligned} D\mathbf{F} &= D(fD\rho) \\ &= fD^2\rho + Df \cdot D\rho \\ &= -f\Delta\rho + Df \cdot D\rho \\ &= Df \cdot D\rho \\ &= -fD\rho \cdot \tfrac{Df}{f} \\ &= -\mathbf{F}\tfrac{Df}{f} \end{aligned}$$

De façon similaire, on démontre (4.29). □

Les deux dernières propositions nous donnent la possibilités d'obtenir trois solutions indépendantes de l'équation (4.21) de façon relativement simple lorsque f est fonction d'une fonction harmonique et que cette fonction harmonique possède deux fonctions harmoniques orthogonales distinctes. Comme nous le montrerons dans l'exemple qui suit, cette éventualité est importante d'un point de vue pratique. On note qu'en général, pour une fonction harmonique donnée dans l'espace à trois dimensions, qu'il n'existe pas nécessairement de fonctions harmoniques orthogonales non constantes.

Exemple 39.

À titre d'exemple, considérons le système de coordonnées cylindriques $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ et z. Supposons que la fonction f depend seulement de r. Alors, la fonction harmonique requise ρ peut être choisie telle que $\rho = \log r$ et, évidemment, les fonctions θ et z sont harmoniques et orthogonales à ρ. Alors les fonctions

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{f(r)}D\rho = -\frac{1}{f(r)}\left(\frac{x}{r^3}e_1 + \frac{y}{r^3}e_2\right),$$

$$\mathbf{F}_2 = f(r)D\theta = -f(r)\left(-\frac{y}{r^2}e_1 + \frac{x}{r^2}e_2\right),$$

et

$$\mathbf{F}_3 = f(r)e_3,$$

sont des solutions de l'équation (4.21). Ces solutions sont indépendantes dans le sens que toute fonction $\mathbf{w}$ définie dans un domaine ne contenant pas l'axe $r = 0$ et ayant des valeurs purement quaternioniques peut être représentée dans la forme $\mathbf{w} = \sum_{k-1}^{3} \varphi_k \mathbf{F}_k$, où φ_k sont des fonctions scalaires. Conséquemment, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ et $\mathbf{F}_3$ forment un triplet générateur de l'équation (4.21) si et seulement si les fonctions scalaires φ_k satisfont l'équation

$$\sum_{k=1}^{3} D\varphi_k \cdot \mathbf{F}_k \qquad \text{dans } \Omega. \tag{4.30}$$

En général, on note que si f est une fonction d'une fonction harmonique dépendante de deux variables cartésiennes, alors on peut toujours obtenir un triplet générateur de l'équation (4.21) et ainsi réduire l'équation dans sa forme (4.30). En effet, pour de telles fonctions harmoniques, nous avons toujours deux fonctions harmoniques orthogonales : 1) son conjugué harmonique dépendant de deux variables cartésiennes et 2) la troisième coordonnée cartésienne.

Supposons que f est une fonction d'une fonction harmonique ρ. Alors, en accord avec la proposition 37, $\mathbf{F} = \frac{1}{f} D\rho$ est une solution de (4.21). Son anti-dérivée (4.23) nous donne une solution de (4.22) et, en accord avec le théorème 32, la partie scalaire de la solution obtenue est une solution de l'équation (4.2). Ainsi, on obtient que $\psi = f\mathcal{A}[\frac{\mathbf{F}}{f}] = f\mathcal{A}[\frac{D\rho}{f^2}]$ est nécessairement une solution de (4.2). Ainsi, les résultats de ce chapitre nous permettent de construire de nouvelles solutions de l'équation de Schrödinger (4.2) à partir de solutions connues possédant certaines symétries.

Chapitre 5

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était d'étudier une classe importante d'équations de Vekua apparaissant comme factorisation de l'équation stationnaire de Schrödinger

$$\Big(- \Delta + q(x,y,z)\Big)\varphi = 0, \qquad \varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C},$$

dans l'espace à trois dimension et tel qu'il existe une fonction non nulle $f \in \ker(-\Delta+q)$. La motivation d'une telle étude étant de pouvoir généraliser les nombreux résultats obtenus à l'aide de la théorie des fonction pseudo-analytiques dans le plan au cours des dernières années. Il s'agit là des premiers pas dans cette direction, par conséquent beaucoup de travail reste à faire. Néanmoins, nous pensons avoir débroussaillé en bonne partie les notions de dérivées et d'intégrales au sens de Bers pour la classe d'équations de Vekua discutée ci-haut.

En effet, dans ce mémoire nous avons introduit et étudié les concepts de la dérivée ainsi que de l'anti-dérivée de Bers pour les équations biquaternioniques de Vekua provenant de la factorisation de l'équation stationnaire de Schrödinger dans l'espace à trois dimensions. Ces concepts représentent de nouvelles relations entre les systèmes elliptiques du premier ordre et nous permettent d'étudier les solutions d'équations elliptiques du second ordre en lien avec les composantes des solutions biquaternionques des équations de Vekua également biquaternioniques.

Nous avons montré que les relations obtenues au chapitre 4, qui s'avèrent être de nouveaux résultats, peuvent être utilisés afin d'obtenir de nouvelles solutions exactes de l'équation de Schrödinger dans l'espace et, dans un même temps, elles impliquent de nouvelles questions importantes pour la théorie générale des équations elliptiques linéaires du second ordre. Principalement, nous avons illustré d'un point de vue assez général et important pour une large classe d'applications concrètes, que nous pouvons obtenir un triplet générateur pour l'équation de Vekua biquaternionique qui peut être considérée comme le successeur de l'équation de Vekua principale $VW = 0$. En dimension deux, il était suffisant d'obtenir une séquence génératrice complète liée à l'équation de Vekua principale. Un système complet de solutions, appelé puissances formelles, était ainsi obtenu à la fois pour l'équation de Vekua et pour l'équation elliptique linéaire du second ordre qui lui était reliée. Une question importante qui reste ouverte dans l'espace à trois dimensions est de savoir comment on peut généraliser ces résultats des puissances formelles.

Comme on a pu le constater dans ce travail, on généralise la théorie des fonction pseudo-analytiques du plan vers l'espace à trois dimensions en passant des opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ à l'opérateur de Dirac D. Ainsi, une seconde question ouverte est de savoir si on peut étudier la théorie des fonctions pseudo-analytiques dans l'espace-temps de dimension quatre à l'aide des opérateurs $\mathcal{D} = \partial_t - D$ et $\overline{\mathcal{D}} = \partial_t + D$.

Finalement, il a été montré par Bilodeau et Tremblay dans un article récent [12] qu'il existe des liens étroits entre la théorie des fonctions pseudo-analytiques et la mécanique quantique supersymétrique de dimension deux. Étant donné que la mécanique quantique supersymétrique de dimension quatre est bien développée, on peut espérer que la construction de la théorie des fonctions pseudo-analytiques dans l'espace-temps suivent des relations similaires qui nous permettrait de construire cette théorie.

Bibliographie

[1] Agmon, S. and Bers, L. ; 1952. The expansion theorem for pseudo-analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc. 3, 757764.

[2] Aleksandrov, A.Ya. and Solovyev, Yu.I. ; 1978. Spatial problems of elasticity theory : application of methods of the theory of functions of a complex variable. Moscow : Nauka (en russe).

[3] Astala, K. and Päivärinta, L. ; 2006. Calderòn inverse conductivity problem in the plane. Annals of Mathematics, 163, No. 1, 265299.

[4] Battle, G.A. ; 1981. Generalized analytic functions and the two-dimensional Euclidean Dirac operator. Comm. in Partial Differential Equations 6 (2), 121151.

[5] Begehr, H. ; 1985. Boundary value problems for analytic and generalized analytic functions. Oxford : North Oxford Academic, "Complex analysis : methods, trends, and applications", Ed. by E. Lanckau and W. Tutschke, 150165.

[6] Berglez, P. ; 2007. On generalized derivatives and formal powers for pseudoanalytic functions. Matematiche 62, no. 2, 2936.

[7] Bernstein, S. ; 1996. Factorization of solutions of the Schrödinger equation. In : Proceedings of the symposium Analytical and numerical methods in quaternionic and Clifford analysis, Seiffen.

[8] Bers, L. ; 1950. The expansion theorem for sigma-monogenic functions. American Journal of Mathematics 72, 705712.

[9] Bers, L. ; 1952. Theory of pseudo-analytic functions. New York University.

[10] Bers, L. ; 1956. An outline of the theory of pseudoanalytic functions. Bull. Amer. Math. Soc. 62, 291331.

[11] Bers, L. ; 1956. Formal powers and power series. Communications on Pure and Applied Mathematics 9, 693711.

[12] Bilodeau, A. and Tremblay, S. ; 2013 On two-dimensional supersymmetric quantum mechanics, pseudoanalytic functions and transmutation operators [PDF, arXiv] J. Phys. A : Math. Theor. 46, 425302.

[13] Bliev, N. ; 1997. Generalized analytic functions in fractional spaces. Addison Wesley Longman Ltd.

[14] Castañeda, A. and Kravchenko, V.V. ; 2005. New applications of pseudoanalytic function theory to the Dirac equation. J. of Physics A : Mathematical and General 38, No. 42, 92079219.

[15] Castillo, R. and Kravchenko, V.V. ; 2003. General solution of the fermionic Casimir effect model. Bull. de la Société des Sciences et des Lettres de Lódz, 53, Série : Recherches sur les d´eformations, No. 41, 115123.

[16] Chadan, Kh. and Kobayashi, R. ; 2006. New classes of potentials for which the radial Schrödinger equation can be solved at zero energy. J. of Physics A : Mathematical and General 39, No. 13, 22813396.

[17] Chanane, B. ; 2008. Sturm-Liouville problems with parameter dependent potential and boundary conditions. J. Comput. Appl. Math. 212 , no. 2, 282290.

[18] Code, W.J. and Browne, P.J. ; 2005. Sturm-Liouville problems with boundary conditions depending quadratically on the eigenparameter. J. Math. Anal. Appl. 309, no. 2, 729742.

[19] Colton, D. ; 1980. Analytic theory of partial differential equations. Boston : Pitman Advanced Pub. Program.

[20] Courant, R. and Hilbert, D. ; 1989. Methods of Mathematical Physics, v. 2. Wiley-Interscience.

[21] De Schepper, N. and Peña, D. ; 2005. Factorization of the Schrödinger operator and the Riccati equation in the Clifford analysis setting. In : Liber Amicorum Richard Delanghe : een veelzijdig wiskundige, F. Brackx et al. (editors), Gent : Academia Press, 6984.

[22] Rochon, D. and Tremblay, S. ; 2006. Bicomplex quantum mechanics : II. The Hilbert space Adv. Appl. Cliff. Alg., 16, No 2 : 135–157.

[23] Rochon, D. and Tremblay, S. ; 2004. Bicomplex quantum mechanics : I. The generalized Schrödinger equation [PDF, arXiv]. Adv. Appl. Cliff. Alg., 14, No 2 : 231–248.

[24] Gürlebeck, K. and Sprössig ; W. ; 1989. Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems. Berlin : Akademie-Verlag.

[25] Gürlebeck, K. and Sprössig, W. ; 1997. Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers. Chichester : John Wiley & Sons.

[26] Golubeva, O.V. ; 1972. Course of mechanics of continuum media. Moscow : Visshaya Shkola (in Russian).

[27] Goman, O.G. ; 1984. Representation in terms of p-analytic functions of the general solution of equations of the theory of elasticity of a transversely isotropic body. J. Appl. Math. Mech. 48, 6267.

[28] Hille, E. ; 1997. Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. N.Y. : Dover Publications.

[29] Ismailov, A.Ja. and Tagieva,M.A. ; 1970. On the representation of generalized analytic functions by a series of pseudopolynomials. Soviet Math. Dokl. 11, No. 6, 16051608.

[30] Kapshivyi, A.A. and Yazkulyev, M. ; 1993. Solution of boundary-value problems of p-analytical functions with the characteristic $p = x/(x^2 + y^2)$ on a halfplane with cuts. J. Sov. Math. 66, No.4, 23692376.

[31] Khmelnytskaya, Kira V. , Kravchenko, V.V., Torba, Sergii M. and Tremblay, S. ; 2012. Wave polynomials, transmutations and Cauchy's problem for the Klein-Gordon equation, J. Math. Anal. Appl., 399, 1, 191–212.

[32] Korn, G.A. and Korn, Th.M. ; 1961. Mathematical handbook for scientists and engineers. McGraw-Hill Book Company.

[33] Kravchenko, V.V. ; 2009. Applied pseudoanalytic function theory. Basel : Birkhäuser.

[34] Kravchenko, V.G. and Kravchenko, V.V. ; 2003. Quaternionic factorization of the Schrödinger operator and its applications to some first order systems of mathematical physics. Journal of Physics A 36, 1128597.

[35] Kravchenko,V.V. and Shapiro; M.V. ; 1996. Intgral representations for spatial models of mathematical physics. Harlow : Addison Wesley Longman Ltd ; .

[36] Kravchenko, V.V. ; 2003. Applied quaternionic analysis. Lemgo : Heldermann Verlag.

[37] Kravchenko, V.V. ; 2005. On the reduction of the multidimensional stationary Schrödinger equation to a first order equation and its relation to the pseudoanalytic function theory. J. of Phys. A 38, No. 4, 851868.

[38] Kravchenko, V.V. ; 2005. On a relation of pseudoanalytic function theory to the two-dimensional stationary Schrödinger equation and Taylor series in formal powers for its solutions. J. of Phys. A , 38, No. 18, 39473964.

[39] Kravchenko, V.V. ; 2005. On the relationship between p-analytic functions and the Schrödinger equation. Zeitschrift f¨ur Analysis und ihre Anwendungen, 24, No. 3, 487496.

[40] Kravchenko, V.V. ; 2008. Recent developments in applied pseudoanalytic function theory. In "Some topics on value distribution and differentiability in complex and p-adic analysis", eds. A. Escassut, W. Tutschke and C.C. Yang, Science Press 293328.

[41] Kravchenko,V.V. and Tremblay, S. ; 2010 Explicit solutions of generalized Cauchy-Riemann systems using the transplant operator, J. Math. Anal. Appl. 370, 242–257.

[42] Kravchenko,V.K., Kravchenko,V.V. and Tremblay, S. ; 2010 Zakharov-Shabat system and hyperbolic pseudoanalytic function theory, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 33, No 4, 448–453.

[43] Kravchenko,V.V., Morelos-Guadarrama, S. and Tremblay, S. ; 2011 Complete systems of recursive integrals and Taylor series of solutions of Sturm-Liouville equations, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 35, No 6 704–716.

[44] Kravchenko, V.V. and Tremblay, S. ; 2011 Spatial pseudoanalytic functions arising from the factorization of linear second order elliptic operators, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 34, No 16, 1999–2010.

[45] Kravchenko, V.V. and Oviedo, H. ; 2003. On a quaternionic reformulation of Maxwell equations for chiral media and its applications. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 22, No. 3, 569589.

[46] Kravchenko, V.V., Rochon, D. and Tremblay, S.; 2008. On the Klein-Gordon equation and hyperbolic pseudoanalytic function theory. J. Phys. A : Math. Theor. 41, issue 6, 065205.

[47] Kravchenko, V.V.; 2009. Applied pseudoanalytic function theory. Basel : Birkhäuser.

[48] Lavrentyev, M.A. and Shabat, B.V.; 1977. Hydrodynamics problems and their mathematical models (Nauka Moscow) (en russe).

[49] Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S.; 1991. Sturm-Liouville and Dirac operators. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ.

[50] Madelung, E.; 1957. Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin : Springer-Verlag.

[51] Malonek, H.; 1998. Generalizing the (F,G)-derivative in the sense of Bers. Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics (V. Dietrich et al. eds.), Kluwer Acad. Publ., 247257.

[52] Matveev, V. and Salle, M.; 1991. Darboux transformations and solitons. N.Y. Springer.

[53] Menke, K.; 1974. Zur Approximation pseudoanalytischer Funktionen durch Pseudopolynome. Manuscripta Math. 11, 111125.

[54] Polozhy, G.N.; 1965. Generalization of the theory of analytic functions of complex variables : p-analytic and (p, q)-analytic functions and some applications. Kiev University Publishers (en russe).

[55] Rochon, D. and Tremblay, S.; 2004. Bicomplex quantum mechanics : I. The generalized Schrödinger equation. Advances in Applied Clifford Algebras 14, No. 2, 231248.

[56] Tutschke, W.; 2003. Generalized analytic functions and their contributions to the development of mathematical analysis. Kluwer Acad. Publ., "Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications" (Advances in Complex Analysis and Its Applications, 2), Ed. by Le Hung Son et al., 101114.

[57] Vekua, I.N.; 1959. Generalized analytic functions. Moscow : Nauka (in Russian); English translation Oxford : Pergamon Press 1962.

[58] Zettl, A.; 1997. Sturm-Liouville problems. In : Spectral theory and computational methods of Sturm-Liouville problems (Knoxville, TN, 1996), 1104, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 191, Dekker, New York.