

Table des matières

Résumé	iii
Table des matières	v
Liste des figures	vii
Nomenclature	ix
Remerciements	xiii
1 Introduction	1
1.1 Nature de la lumière	1
1.2 Électromagnétisme et équations de Maxwell	2
1.2.1 Relations constitutives et polarisation électrique	3
1.3 Matériaux pour l'optique	4
1.3.1 Condition d'interface pour le champ électrique	5
1.3.2 Modèle de Lorentz et formule de Sellmeier	6
1.3.3 Relations de Kramers-Kronig	9
1.4 Milieu homogène	10
1.4.1 Superposition d'ondes planes monochromatiques	13
1.5 Milieu non-homogène	16
1.5.1 Guide d'ondes optiques planaire	16
1.5.2 Dispersion et vitesse de propagation	18
1.5.3 Fibres optiques microstructurées	20
2 Analyse spectrale du problème de modes dans les fibres optiques	23
2.1 Formulation du problème	23
2.1.1 Espaces fonctionnels et opérateurs de base pour fibres optiques	23
2.1.2 Définition des modes guidés, de radiation et de fuite	27
2.1.3 Reformulation du problème de mode guidé	29
2.1.4 Formulation de $\beta(\omega)$ versus $\omega(\beta)$	29
2.2 Analyse spectrale avec le champ magnétique	30
2.2.1 Bornes sur les valeurs propres	32
2.2.2 Spectre essentiel des fibres optiques	33
2.2.3 Application du principe du min-max	34
2.2.4 Théorème d'existence de valeurs propres	35
2.3 Généralisation au cas tensoriel	36

3	Simulation par éléments finis de fibres à coeur suspendu	41
3.1	Modélisation numérique de la dispersion	41
3.1.1	Simplification du cas vectoriel au cas scalaire	41
3.1.2	Utilisation d'une couche absorbante parfaitement adaptée (PML)	42
3.1.3	D'une fibre à coeur suspendu vers une fibre à saut d'indices	43
3.1.4	Discussion des résultats numériques sur la dispersion	43
3.2	Modèles numériques des pertes	47
3.2.1	Modéliser chaque source de pertes séparément	48
3.2.2	Simulation bidimensionnelle versus tridimensionnelle	49
3.3	Influence des impuretés sur le champ électrique	50
3.4	Influence des paramètres géométriques	53
3.5	Utilisation du logiciel Comsol Multiphysics 4.3b	54
3.5.1	Création du modèle	54
3.5.2	Configuration du modèle vectoriel dans le cas bidimensionnel	57
3.5.3	Résolution du modèle	63
3.5.4	Visualisation des résultats	63
	Conclusion	65
A	Rappels d'analyse fonctionnelle	67
A.1	Théorie des opérateurs non-bornés	67
A.1.1	Opérateurs fermés	68
A.1.2	Opérateurs symétriques et auto-adjoints	68
A.2	Théorie spectrale dans des espaces de Hilbert	69
A.2.1	Mesure et intégrale spectrales	70
A.2.2	Calcul fonctionnel pour opérateurs auto-adjoints	73
A.2.3	Formes hermitiennes, coercives et fermées	74
A.2.4	Principe du min-max	75
A.2.5	Applications à l'opérateur du laplacien	75
A.2.6	L'importance de bien poser le problème	76
A.3	Dérivation au sens des distributions	77
A.4	Espaces fonctionnels	78
	Bibliographie	79

Liste des figures

1.1	Exemple de dipôle électrique avec ses lignes de champ (en pointillés) et ses lignes d'équipotentiel (source : [10]).	4
1.2	Condition limite de conducteur parfait sur un domaine $\Omega : \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$	5
1.3	Justification de la condition d'interface tangentielle $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ pour le champ électrique. Ici, la surface orangée est notée \mathcal{A}	6
1.4	Modèle d'oscillateur harmonique d'un atome neutre (ou plus généralement d'une molécule) soumis à un champ électrique. Dans cette figure, la position d'équilibre du ressort est vue comme étant centrée sur le noyau.	7
1.5	Résultat du modèle de Lorentz avec les paramètres $\omega_p = \omega_0 = 2 \cdot 10^{14}$ Hz.	9
1.6	Exemple d'onde électromagnétique plane sans atténuation (Source : [24])	13
1.7	Exemple d'une impulsion lumineuse reçue de forme gaussienne qui s'exprime en notation complexe $E(z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{\sigma^2}\right) \exp(i\omega_0 t)$ à une position fixée z , où $\omega_0, \sigma > 0$	13
1.8	Amplitude de la transformée de Fourier de l'impulsion illustrée en 1.7 en supposant $t_0 = 0$, la phase étant nulle dans ce cas. L'expression générale de cette transformée est donnée par $\mathcal{F}[E(0, t)](\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}(\omega - \omega_0)^2 + (\omega - \omega_0)t_0 i\right)$	16
1.9	Géométrie d'un guide d'ondes planaire avec son profil d'indice de réfraction de forme hypergaussienne	16
1.10	Illustration des vitesses de groupe et de phase à gauche. Courbes de dispersion à droite (tirées de [23]) d'un guide d'ondes planaires à saut d'indices, où on a $v := k_0 n_{\text{coeur}} d \sqrt{\frac{n_{\text{coeur}}^2 - n_{\text{gaine}}^2}{n_{\text{gaine}}^2}}$, $b := \frac{n_i^2 - n_{\text{gaine}}^2}{n_{\text{coeur}}^2 - n_{\text{gaine}}^2}$	19
2.1	Visualisation de la m^e valeur de coupure (figure tirée de [2])	36
3.1	Le PML est l'anneau mauve recouvrant la fibre optique. La région grise correspond aux trous d'air et la section rouge correspond au verre. Notons que le coeur et les ponts (qui sont faits de verre) ne sont pas distinguables sur cette figure en raison du maillage.	43
3.2	Distribution de l'indice de réfraction d'une fibre à coeur suspendu faite de As_2S_3 à une longueur d'onde de 2.1 μm . L'indice associé à la partie en blanc est donné par la formule de Sellmeier ($n \approx 2.4$). Les trois trous en noirs sont remplis d'air ($n \approx 1$).	44
3.3	Photo d'une fibre à coeur suspendu (Source : [1]).	44
3.4	Maillages 1 et 2 utilisés pour le calcul de la dispersion chromatique. On présente le coeur car la finesse du maillage loin du coeur a très peu d'impact sur les indices effectifs et la dispersion.	45

3.5	Comparaison des indices effectifs obtenus avec les modèles vectoriel et scalaire d'une fibre optique à coeur suspendu	46
3.6	Comparaison de la dispersion chromatique obtenue avec les modèles vectoriel et scalaire d'une fibre optique à coeur suspendu	46
3.7	Spectre d'atténuation d'une fibre optique à saut d'indice faite de silice (image tirée de [1]). μm	47
3.8	Mode guidé tridimensionnel décrivant l'oscillation de la composante en x du champ électrique.	49
3.9	Mode guidé tridimensionnel décrivant la norme du champ électrique. Cette figure illustre la nécessité d'avoir un maillage tridimensionnel très fin pour obtenir une solution physique.	50
3.10	Fibre à saut d'indice de silice ($n \approx 1.45$) avec six impuretés de forme circulaire et d'indice de réfraction $n = 1$	51
3.11	Fibre à saut d'indice de silice ($n \approx 1.45$) avec six impuretés de forme circulaire et d'indice de réfraction $n = 1.59$	51
3.12	Modèle 3D avec impureté sphérique au centre du coeur.	52
3.13	Courbes des indices effectifs selon le rayon du coeur (de 1 micron à 10 microns).	52
3.14	Courbes de dispersion chromatique selon le rayon du coeur (de 1 micron à 10 microns)	53
3.15	Choix de la dimension (nombre de coordonnées) de la géométrie dans Comsol.	55
3.16	Choix de la physique. Trois choix pertinents se présentent pour modéliser des fibres optiques (tels que sélectionnés en bleu).	55
3.17	Choix de l'étude dans Comsol. Trois choix pertinents se présentent : "Boundary Mode Analysis", "Mode Analysis" et "Eigenvalue".	56
3.18	Arbre présentant les différentes composantes à configurer du modèle.	56
3.19	Exemple de liste de paramètres pertinents pour un modèle de fibre optique avec trois trous.	57
3.20	Géométrie d'une fibre à coeur suspendu à trois trous construite avec des cercles, des droites, des courbes de Bézier, etc.	58
3.21	Création d'un maillage. Les deux paramètres les plus utiles sont "Maximum element size" et "Minimum element size". On note l'utilisation des paramètres tels que définis dans la figure 3.19	59
3.22	Configuration du PML. L'important ici est de spécifier la région correspondant à la géométrie du PML (cylindrique ici) dans la boîte de dialogue "Type" pour assurer de ne pas avoir d'erreurs à l'exécution.	60
3.23	Choix de l'indice de réfraction. Il est approprié d'utiliser les paramètres définis dans la liste plus tôt.	61
3.24	Configuration des équations à résoudre. Notons d'abord que le domaine 5 n'est pas géré par les équations soulignées en pointillés, mais plutôt par le PML. De plus, il est important de lier l'indice de réfraction aux équations en choisissant dans le bas du panneau le bon modèle décrivant les matériaux.	62
3.25	Choix des paramètres d'étude. Les paramètres les plus importants sont : le nombre de modes, l'indice effectif initial et la fréquence de la lumière	63
3.26	Résultats obtenus lors de la résolution du modèle. On obtient quelques informations pertinentes sur les algorithmes de résolution.	64

Nomenclature

Nom du symbole	Notation	Définition	Unités (SI)
Champ électrique (3D)	E		V/m
Champ électrique induit	D	$\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}$	
Champ magnétique (3D)	H		
Champ magnétique induit	B	$\frac{1}{\mu} \mathbf{H}$	
Charge électrique	q		C
Coefficient d'extinction	κ	$Im(n_c)$	
Conductivité électrique	σ		$\Omega^{-1} m^{-1}$
Constante d'atténuation	α	$Im(\beta)$	1/m
Constante de phase	γ	$Re(\beta)$	1/m
Constante de propagation	β		1/m
Fréquence	f	$\omega / (2\pi)$	1/s
Fréquence angulaire	ω		1/s
Indice de réfraction	n	$Re(n_c)$	
Indice de réfraction à l'infini	n_∞	$n(x) _{\ x\ \geq R}$	
Indice de réfraction (borne inférieure)	n_-	$\inf_{x \in \mathbb{R}^2} n(x)$	
Indice de réfraction (borne supérieure)	n_+	$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} n(x)$	
Indice de réfraction complexe	n_c		
Indice effectif	n_{eff}	$\beta c / \omega$	
Longueur d'onde dans le vide	λ	$2\pi c / \omega$	m
Nombre d'onde dans le vide	k_0	ω / c	1/m
Perméabilité du vide	μ_0	$\approx 1.3 \cdot 10^{-6}$	$A^{-1} s m^{-1} V$
Permittivité	ϵ	$\epsilon_0 n_c^2$	$m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2$
Permittivité du vide	ϵ_0	$\approx 8.9 \cdot 10^{12}$	$m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2$
Permittivité relative	ϵ_r	n_c^2	
Polarisation électrique	P	$\epsilon_0 (n_c^2 - 1) \mathbf{E}$	C / m^2
Susceptibilité électrique	χ	$n_c^2 - 1$	
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$\approx 3.0 \cdot 10^6$	m / s^2
Vitesse de groupe	v_g	$\frac{\partial \omega}{\partial \gamma}$	m/s
Vitesse de phase	v_p	$\omega / Re(\beta)$	m/s

Rapport-Gratuit.com

“Imagination is more important than knowledge.”

Albert Einstein

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pu aboutir s'il n'avait pas été du support et de la patience de plusieurs personnes. J'aimerais d'abord remercier mon directeur Hassan Manouzi pour son assistance, ses conseils, sa grande patience et sa flexibilité envers mes initiatives personnelles. J'aimerais tout autant remercier mon codirecteur Younès Messaddeq pour m'avoir introduit dans son groupe de recherche, m'avoir appris à évoluer dans un milieu multidisciplinaire, sans oublier sa grande flexibilité à mon égard.

Ensuite, je tiens à souligner la contribution de Bora Ung, qui m'aura mentoré durant mes 2 années au sein du groupe de recherche. Son expertise en physique computationnelle m'aura permis de mieux comprendre plusieurs aspects importants des simulations. Je souhaite également remercier Patrick Soucy, pour nos nombreuses discussions entourant les mathématiques et la physique appliquées aux fibres optiques.

Du côté de mon entourage, je tiens à remercier chaleureusement mes parents, mes frères ainsi que ma tante pour leur support moral, particulièrement durant la rédaction, qui se sera avérée laborieuse par moments.

Chapitre 1

Introduction

Nous présentons ici les notions nécessaires à la bonne compréhension physique du modèle qui sera analysé puis simulé dans les chapitres subséquents. Quelques notions sont en effet fondamentales à une bonne interprétation du problème de guidage de la lumière ainsi que du calcul de la dispersion chromatique et de l'atténuation associées à un guide d'ondes. Avant de commencer par une discussion sur la nature de la lumière, mentionnons que la rigueur mathématique fera parfois défaut dans ce chapitre, car le but est d'introduire le modèle physique, qui sera par la suite étudié d'un point de vue plus mathématique et numérique.

1.1 Nature de la lumière

En physique, on retrouve souvent plusieurs niveaux de modélisation et donc d'approximation d'un même phénomène, et l'optique n'y échappe pas. En effet, l'optique géométrique permet d'étudier, d'une part, les phénomènes de propagation de la lumière d'un point de vue macroscopique, c'est-à-dire lorsque les dimensions du composant optique à l'étude sont au moins de l'ordre de 10 fois la longueur d'onde de la lumière, qui est typiquement de quelques microns (notés μm). Par exemple, la réflexion par un miroir ou la réfraction par une lentille peuvent être modélisées très justement en faisant appel au principe de Fermat (voir [16]). Si l'optique géométrique permet de justifier le fait qu'une fibre guide la lumière, plusieurs aspects de sa propagation ne peuvent être expliqués en travaillant dans ce paradigme.

D'autre part, en ayant recours aux principes et lois de la physique quantique, l'optique quantique permet l'étude corpusculaire de la lumière au niveau microscopique, i.e. à la même échelle que les particules qui constituent l'atome, qui est de l'ordre du nanomètre. L'absorption lumineuse, qui est étroitement liée au sujet de l'atténuation dans les fibres optiques, est par exemple modélisée avec succès dans ce paradigme. Cependant, le guidage des ondes via la différence d'indice de réfraction dans les fibres traditionnelles ou encore la bande inter-

dite dans les fibres à cristaux photonique est en pratique impossible à modéliser au niveau moléculaire (voir [12]).

Notre contexte de modélisation s'inscrit plutôt à l'intersection de l'électromagnétique et des phénomènes ondulatoire, un paradigme introduit au 18e siècle par des physiciens tels que James Clerk Maxwell et Michael Faraday. La lumière dans ce cadre est vue comme une onde se propageant en temps et espace et où ce sont les champs électrique et magnétique qui oscillent. On notera ces champs vectorielles \mathbf{E} et \mathbf{B} respectivement, les quantités vectorielles étant toujours notées en gras.

1.2 Électromagnétisme et équations de Maxwell

L'électrostatique et la magnéto-statique ont suscité l'intérêt de bien des expérimentalistes via l'utilisation de courants électriques et d'aimants, et ce, depuis le temps des grecques. Il aura cependant fallu attendre la deuxième moitié du 19^e siècle et James Clerk Maxwell pour une théorie électromagnétique de la lumière. C'est plus précisément le système des équations aux dérivées partielles (EDP) de Maxwell qui a mené à la découverte des ondes électromagnétiques. Il est donc beaucoup plus facile de créer des champs électriques et magnétiques (pas nécessairement statiques) à l'aide de courants électriques et d'aimants (et d'en tirer les principes fondamentaux) que de détecter l'oscillation ultra-rapide du champ électromagnétique que constitue la lumière.

Voici donc les équations de Maxwell dans leur version macroscopique (voir [13] pour un traitement détaillé), qui forment le point de départ de notre analyse :

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}) = \rho_l \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Il s'agit des équations dites macroscopiques, car la densité de charges ρ_l et la densité de courant \mathbf{J}_l représentent des charges libres (i.e. des protons ou des électrons non liées à une molécule), des variables utiles lorsqu'on étudie des ondes électromagnétiques interagissant avec une substance possédant les propriétés macroscopiques de diélectrique ou de semi-conducteur. Nous reviendrons à la section 1.2.1 sur les relations entre \mathbf{E} et \mathbf{D} ainsi qu'entre \mathbf{B} et \mathbf{H} .

Ce n'est pas en mesurant directement le champ électrique mais plutôt en formulant les EDP 1.1 à 1.4 que Maxwell découvrira que \mathbf{E} et \mathbf{B} satisfont l'équation classique des ondes dans un milieu uniforme par rapport à la perméabilité relative μ_r et la permittivité relative ϵ_r (nous reviendrons sur ces variables plus loin). Le lien entre la lumière et l'électromagnétisme, i.e.

l'oscillation du champ électrique, était quasi-impossible à mesurer à l'époque, étant donné les très grandes fréquences optiques (environ 10^{15} oscillations par secondes dans le spectre visible). Comme nous le verrons plus tard avec le régime harmonique, cette oscillation est supposée sinusoïdale, ce qui nous mènera à la version électromagnétique de l'équation de Helmholtz.

Nous reviendrons au chapitre 2 sur la régularité du champ électromagnétique nécessaire pour résoudre la propagation de la lumière dans une fibre optique. Comme c'est souvent le cas en physique, on prend pour acquis la régularité nécessaire pour que les équations aient du sens¹. Ajoutons aussi que toutes les variables présentées ci-dessus peuvent en général avoir une dépendance en temps et en espace.

Pour la suite, afin de découpler les variables des équations de Maxwell, il nous faut d'abord définir une relation entre \mathbf{H} et \mathbf{B} ainsi qu'une autre entre \mathbf{E} et \mathbf{D} . On a donc besoin d'introduire les relations constitutives et, pour y arriver, il nous faut d'abord discuter de polarisation électrique.

1.2.1 Relations constitutives et polarisation électrique

Supposons qu'une onde électromagnétique ou plus généralement un champ électromagnétique se propage dans un matériau et considérons un atome ou molécule électriquement neutre en faisant partie. Les électrons, dont la charge électrique cumulative sera notée q , sont liés au noyau de charge opposée $-q$ et s'aligneront quasi-instantanément dans le sens contraire au champ électrique (et le noyau en sens opposé aux électrons), un peu comme l'aiguille d'une boussole dans un champ magnétique. Cette force exercée sur les électrons est appelée force de Lorentz (voir [10]). Elle sépare donc légèrement les charges négatives des charges positives (on note \mathbf{d} le vecteur de déplacement entre les charges positives et négatives). Cette force induit alors un nombre astronomique de dipôles électriques (voir figure 1.1) tous alignés, qui créent en retour un champ électrique s'opposant au champ incident. On s'intéresse en particulier au *moment dipolaire* de cette particule, défini par le vecteur $q\mathbf{d}$. D'un point de vue macroscopique, on appelle *polarisation électrique* (notée \mathbf{P}) le champ vectoriel représentant localement la quantité de moment dipolaire par unité de volume. Nous reviendrons un peu plus loin sur cette notion de polarisation lorsqu'on justifiera une formule importante de l'indice de réfraction, celle de Sellmeier. Il existe un concept analogue à la polarisation électrique pour le champ magnétique, appelé magnétisation et notée \mathbf{M} , mais non-nécessaire dans notre modèle. On supposera donc qu'on a $\mathbf{M} = 0$ dans les matériaux

1. Tel que décrit dans [33] sous l'appellation d'*homogénéisation mésoscopique*, il est tout à fait justifié physiquement de considérer dans nos équations le champ électromagnétique comme étant infiniment dérivable. Cette homogénéisation consiste à prendre le produit de convolution du champ électrique avec un "mollifier", i.e. une fonction positive d'intégrale égale à un et dont le support compact a un volume de l'ordre du micron (voir [7] pour un traitement détaillé de ces fonctions). Ceci revient intuitivement à prendre la moyenne du champ électrique dans un rayon d'au plus quelques microns. Suite à cette transformation, on peut donc supposer le champ électrique aussi lisse qu'il nous plaît.

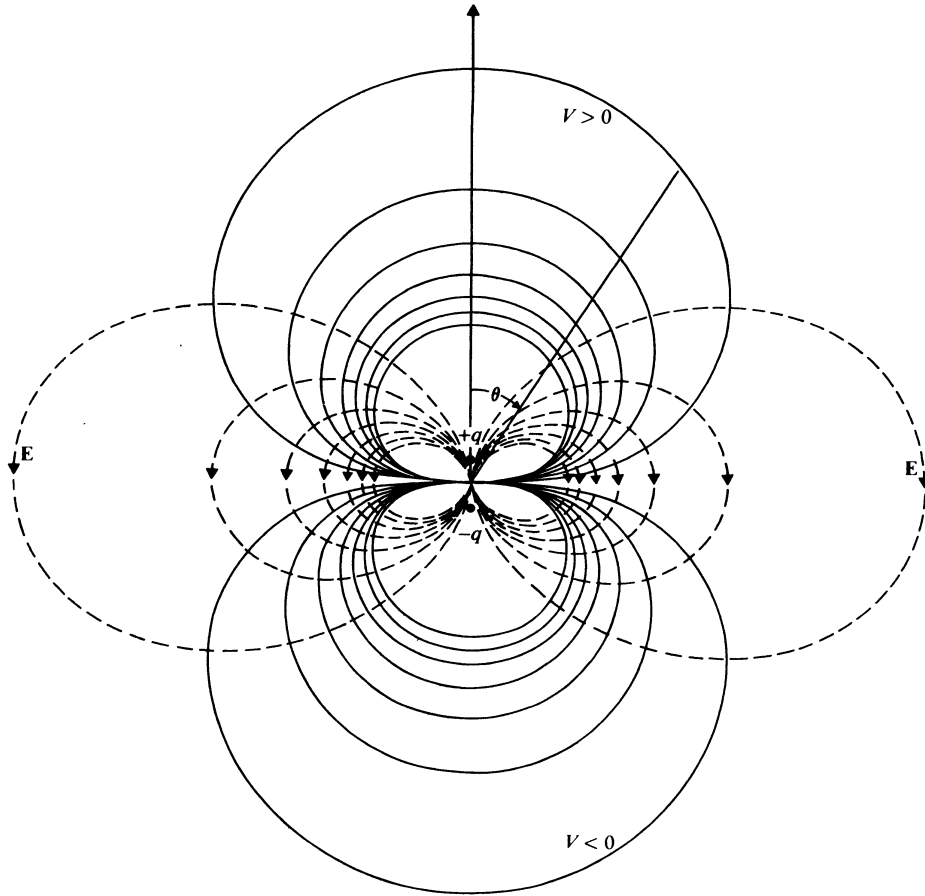


FIGURE 1.1 – Exemple de dipôle électrique avec ses lignes de champ (en pointillés) et ses lignes d'équipotentiel (source : [10]).

utilisés. On peut en fait voir les relations suivantes (appelées *relations constitutives*), comme une définition des définitions des champs vectoriels \mathbf{D} et \mathbf{H} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (1.6)$$

Afin de simplifier davantage les équations, il nous faudra définir quelques hypothèses physiques supplémentaires.

1.3 Matériaux pour l'optique

Afin de transmettre les impulsions lumineuses avec le moins d'atténuation et de dispersion possibles (nous reviendrons sur ce point crucial plus loin), on choisit généralement un verre. Il s'agit entre autres d'un matériau où aucun courant électrique ne peut circuler ($\mathbf{J}_l = \mathbf{0}$ dans l'équation 1.4) et où tous les électrons sont liés à un noyau ($\rho_l = 0$ dans l'équation 1.1). En fait, un milieu où un courant électrique circulerait librement forcerait le champ électrique

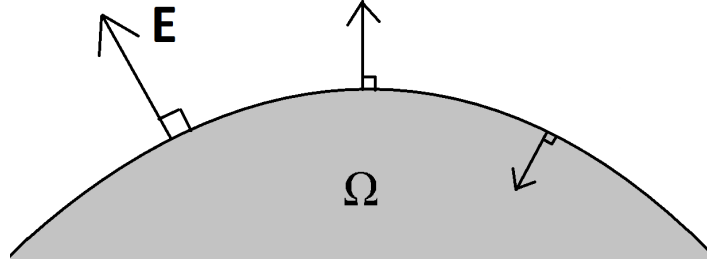


FIGURE 1.2 – Condition limite de conducteur parfait sur un domaine Ω : $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$.

à être nul dans son intérieur et réfléchirait les ondes, ce qui est le cas avec les conducteurs dits linéaires (i.e. $\mathbf{J}_l = \sigma \mathbf{E}$ où $\sigma \gg 0$ est la conductivité électrique). On peut supposer en effet que le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur, car les charges électriques s'y déplacent quasi-instantanément afin de créer un champ en sens opposé et d'intensité similaire au champ incident (voir [10]).

1.3.1 Condition d'interface pour le champ électrique

Pour des raisons mathématiques, on supposera parfois que le verre dont est fait la fibre est recouvert d'un conducteur parfait ($\sigma = \infty$). Pour bien comprendre l'origine physique de cette condition aux limites, il faut savoir que la composante tangentielle du champ électrique à l'interface de deux matériaux est supposée continue, ce qui s'écrit $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ en général (voir figure 1.3) et $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ dans le cas d'un conducteur parfait (voir figure 1.2). Cette affirmation se justifie en supposant que \mathbf{E} est continu de part et d'autre de la frontière (une surface supposée régulière), en intégrant les deux côtés de l'équation 1.3 selon un domaine $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ bien choisi (voir la surface à la figure 1.3) et en utilisant ensuite le théorème de Stokes. Cette surface \mathcal{A} est choisie de façon que son aire et que la longueur l de son plus petit côté soient négligeables par rapport à la longueur L du plus long côté. Mais la longueur L doit quant à elle être suffisamment petite pour que le champ électrique soit approximativement constant sur chacun des deux plus longs côtés du rectangle (on utilise ici la continuité de \mathbf{E} de part et d'autres). On a donc

$$\begin{aligned}
 0 &\approx - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} dA = - \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dA = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{E}) dA = \int_{\partial \mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\
 &\approx L (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{s} + l (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} \\
 &\approx L (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{s} + 0 \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = L (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{s}
 \end{aligned}$$

où la première intégrale est approximativement nulle (ainsi que sa dérivée) car \mathcal{A} est négligeable et où \mathbf{s} est un vecteur unitaire contenu dans $\partial \mathcal{A}$ et parallèle à la surface de séparation σ . Comme ce calcul est valide peu importe l'orientation de \mathcal{A} orthogonale à la surface, on conclut, en divisant par L , que la composante tangentielle de $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ est nulle, i.e. que $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0$

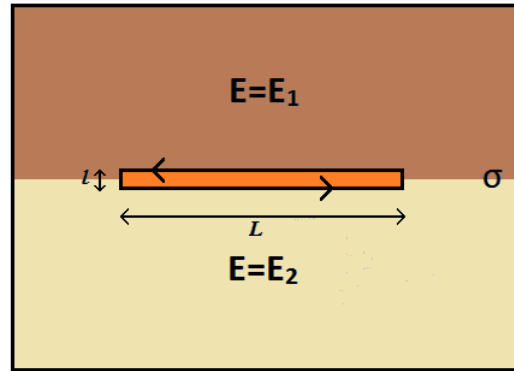


FIGURE 1.3 – Justification de la condition d’interface tangentielle $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ pour le champ électrique. Ici, la surface orangée est notée \mathcal{A} .

1.3.2 Modèle de Lorentz et formule de Sellmeier

Tel que mentionné au début de ce chapitre, il y a souvent en physique plusieurs niveaux d’approximation d’un même phénomène. Par exemple, dans la modélisation de phénomènes oscillatoires, telle une masse accrochée à un ressort, on peut considérer la force de retour (celle qui force le retour à la position d’équilibre) comme linéaire. De notre côté, considérons le phénomène analogue lorsque la lumière se propage dans un matériau et que les atomes, soumis au champ électrique oscillant, oscillent à leur tour. Comme le noyau a une masse de loin supérieure au nuage d’électrons, on peut considérer ce nuage comme oscillant au tour d’un noyau de position fixe.

Il s’agit d’un exemple de polarisation électrique de la matière et constitue la base du modèle de Lorentz, qui, on le verra plus loin, permettra d’enrichir notre modèle de fibre optique en justifiant une formule importante de l’indice de réfraction, celle de Sellmeier (tel que mentionné dans [24]). Pour l’instant, remarquons que, bien que sa charge nette soit nulle, un atome polarisé crée un dipole dont le champ électrique émis s’oppose au champ électrique incident. On appelle *optique non-linéaire* (voir [5]) la discipline qui étudie les impulsions lumineuses de très grande intensité (une quantité scalaire proportionnelle à $|\mathbf{E}|^2$), qui entraînent une force de retour non-linéaire exercée par le noyau. Notre travail se situera au niveau des forces de retour linéaires avec l’équation de Helmholtz.

Pour l’instant, donnons une justification classique du terme à la base de la formule de Sellmeier. On dit bien classique ici car le tout peut se faire dans le paradigme quantique en considérant (à titre indicatif) les niveau d’énergie des électrons. Cependant, comme on arrive à une expression mathématiquement équivalente, on se limitera à cette dérivation classique et sans doute plus intuitive de la formule de Sellmeier.

On considère le modèle d’oscillateur harmonique amorti (tel qu’illustré à la figure 1.4) soumis à une force extérieure. Ce modèle mathématique est tiré simplement d’une application

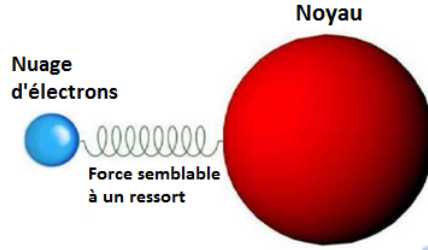


FIGURE 1.4 – Modèle d’oscillateur harmonique d’un atome neutre (ou plus généralement d’une molécule) soumis à un champ électrique. Dans cette figure, la position d’équilibre du ressort est vue comme étant centrée sur le noyau.

de la deuxième loi de Newton dans le plan complexe (toutes les opérations effectuées ici sont linéaires). :

$$my''(t) = -My'(t) - ky(t) + |\mathbf{E}|qe^{i\omega t} \quad (1.7)$$

où tous les termes sont des constantes réelles positives dépendant de la nature physico-chimique du matériau, sauf $|\mathbf{E}|$, ω et t , qui sont respectivement l’amplitude du champ électrique extérieur (l’onde traversant le matériau), la fréquence angulaire de cette onde et le temps.

Selon [6], on a que la solution générale de toute équation différentielle linéaire du deuxième ordre est nécessairement formée de la somme d’une de ses solutions particulières et de sa solution homogène (i.e. la solution générale de l’équation 1.7 de laquelle on retranche l’exponentielle). Étant donné que cette solution se comportera comme un oscillateur amorti (voir [14]), la norme de toute solution homogène déclinera exponentiellement jusqu’à s’annuler. Notre tâche est donc de trouver une solution particulière de 1.7. Il n’est pas difficile de voir que $t \mapsto ze^{i\omega t}$ devrait faire l’affaire, où z est une constante complexe bien choisie. Après substitution dans l’équation et élimination des exponentielles $e^{-i\omega t}$, on obtient

$$-mz\omega^2 = -izM\omega + kz + q|\mathbf{E}|$$

où on isole z , pour obtenir

$$z = \frac{q|\mathbf{E}|}{k + iM\omega - m\omega^2}.$$

Il n’est de plus pas difficile de voir à partir de 1.7 que la fréquence angulaire de résonance du système est $\sqrt{\frac{k}{m}}$. En effet, il s’agit de la fréquence angulaire de la solution d’un oscillateur libre et non-amorti (représenté par 1.7 avec $|\mathbf{E}| = M = 0$). En notant $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$ cette fréquence de résonance (en rad/s) et $\gamma = \frac{M}{m}$ le coefficient d’amortissement, la solution de 1.7 devient

$$y(t) = \frac{q|\mathbf{E}|}{k + iM\omega - m\omega^2}e^{i\omega t} = \frac{q|\mathbf{E}|/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}e^{i\omega t}. \quad (1.8)$$

Si on reprend la définition de la polarisation ($P = q\mathcal{N}d$, où $d = y$ ici) et si on suppose que les oscillateurs moléculaires n'interagissent pas entre eux, on obtient la polarisation suivante

$$P(t, \omega) = q\mathcal{N}y(t) = \frac{q^2|\mathbf{E}|\mathcal{N}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} e^{i\omega t}$$

où \mathcal{N} est le nombre de dipôles par unité de volume (qu'on suppose constant) dans le diélectrique. Rappelons qu'en régime linéaire et harmonique, on a que $\mathbf{P}(t, \omega) = \epsilon_0\chi(\omega)\mathbf{E}(t, \omega)$, où on note la linéarité et le fait que la polarisation est alignée dans la même direction que le champ électrique. On en déduit donc que

$$\chi(\omega) = \frac{q^2\mathcal{N}}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

où on a noté $\omega_p = \sqrt{\frac{q^2\mathcal{N}}{\epsilon_0 m}}$, qu'on appelle aussi (à titre indicatif) *fréquence de plasma*. L'indice de réfraction complexe n_c et la permittivité électrique sont définis en général en fonction de la susceptibilité électrique. On calcule

$$n_c^2(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

et on note

$$n_c(\omega) = n(\omega) - i\kappa(\omega) = \sqrt{\epsilon'_r(\omega) - i\epsilon''_r(\omega)} \quad (1.9)$$

D'un point de vue mathématique, on remarque que l'indice de réfraction n'est à priori pas bien défini, étant donné qu'en général un nombre complexe possède deux racines carrées. Pour résoudre l'ambiguïté, on choisira en général l'unique racine située dans le premier cadran (l'unicité et l'existence viennent du fait que la partie imaginaire de $n_c^2(\omega)$ est strictement positive).

D'un point de vue physique, on remarque aussi que ce modèle prédit parfois que $n(\omega) < 1$ pour des fréquences ω plus grandes que la fréquence de résonance ω_0 (voir par exemple le graphique de n dans 1.5). Il s'agit en apparence d'une contradiction directe avec la théorie de la relativité restreinte, qui prévoit qu'une onde électromagnétique ne peut voyager à une vitesse de groupe plus grande que la vitesse de la lumière ($c = 2.998 \cdot 10^8$ m/s). Nous reviendrons plus loin sur la notion de vitesse de groupe, mais comme on considère ici des ondes monochromatiques, la vitesse de groupe sera égale à la vitesse de translation de la sinusoïde, aussi appelée vitesse de phase.

En fait, les structures moléculaires possèdent plusieurs fréquences de résonance, ce qui correspond à une somme de termes de la même forme. En fait, lorsqu'on fait les calculs dans le paradigme quantique, on se retrouve également avec une somme de ces termes :

$$n_c^2(\omega) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega_i^2 - \omega^2 + i\gamma_i\omega} \quad (1.10)$$

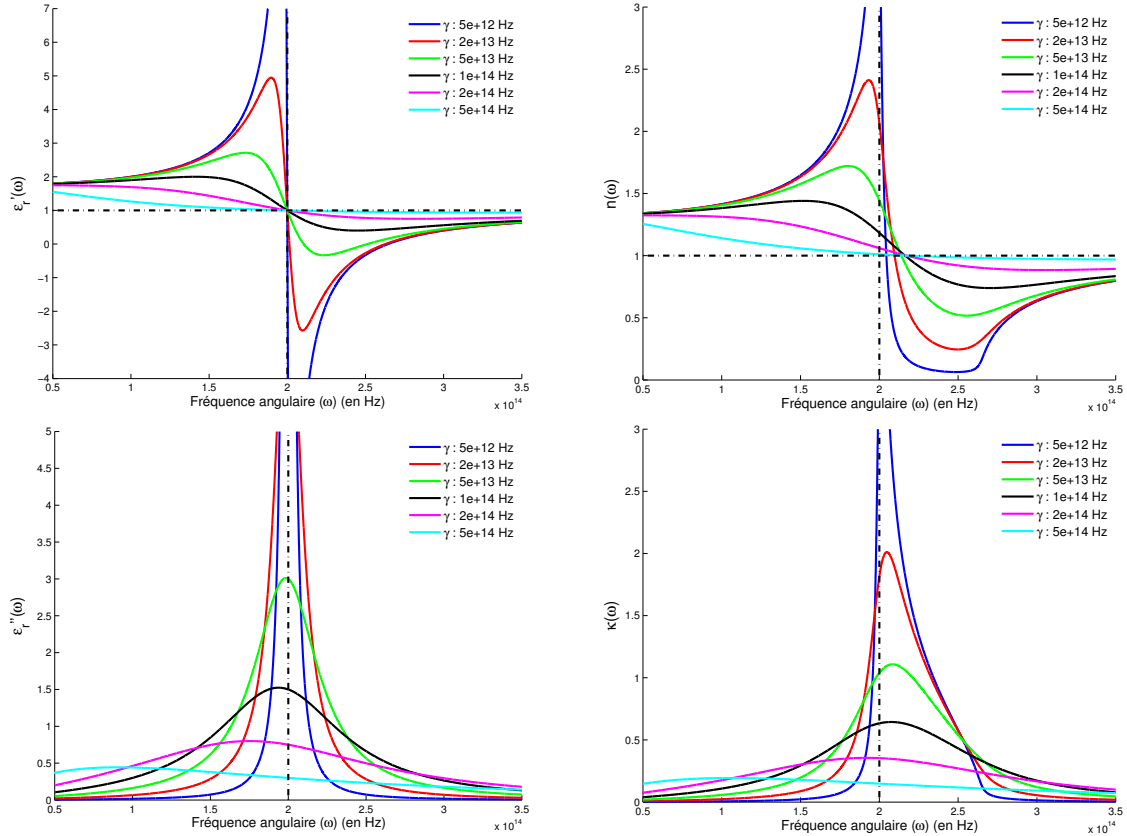


FIGURE 1.5 – Résultat du modèle de Lorentz avec les paramètres $\omega_p = \omega_0 = 2 \cdot 10^{14}$ Hz.

Pour obtenir la formule de Sellmeier, on suppose en plus que l'onde est suffisamment loin des fréquences de résonance ω_i , ce qui produit une formule de dispersion sans absorption ($\gamma_i \approx 0$) de l'indice de réfraction. En reformulant le tout en fonction de la longueur d'ondes dans le vide $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, on obtient, en renommant les constantes, l'utile formule de Sellmeier

$$n_c^2(\omega) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad (1.11)$$

Plus loin dans ce mémoire, nous allons incorporer cette formule d'indice de réfraction dans notre modèle de fibre optique microstructurée afin d'obtenir la dispersion chromatique. Mais pour l'instant, considérons la validité physique de ce modèle en discutant brièvement des relations de Kramers-Kronig.

1.3.3 Relations de Kramers-Kronig

On remarquera ici qu'en supposant la fréquence angulaire de lumière suffisamment éloignée des fréquences de résonance, nous avons introduit N singularités dans notre modèle d'indice de réfraction, soit une en chaque λ_i . Physiquement, ceci implique que nous avons obtenu un modèle d'indice de réfraction à valeurs réelles, sans absorption intrinsèque. Or, en

pratique, toute onde électromagnétique traversant un matériau dispersif entraîne de l'absorption. Théoriquement, ceci se justifie par les relations de Kramers-Kronig, qui décrivent à l'aide de la transformée de Hilbert (voir [22]) la relation en les parties réelles réelle et imaginaire de la susceptibilité électrique χ . On a plus précisément selon [28] que

$$\operatorname{Re}(\chi(\omega)) = \operatorname{Re}(n^2(\omega) - 1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{s \operatorname{Im}(\chi(s))}{s^2 - \omega^2} ds \quad (1.12)$$

$$\operatorname{Im}(\chi(\omega)) = \operatorname{Im}(n^2(\omega) - 1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \operatorname{Re}(\chi(s))}{\omega^2 - s^2} ds \quad (1.13)$$

Ces relations sont valides lorsque $\chi(\omega)$ est analytique et tend vers 0 aussi rapidement ou plus vite que $\frac{1}{|\omega|}$ lorsque $|\omega| \rightarrow \infty$. Ici, ω est vue comme une variable complexe et nous référons le lecteur à [15] pour plus de détails.

De quelle utilité les relations 1.12-1.13 seront-elles dans notre modèle de fibre optique microstructurée? En pratique, elles sont utilisées afin de prédire la dispersion associée à un matériau à partir des pertes mesurées. Or, nous souhaitons avoir un modèle qui prédit à la fois l'atténuation et la dispersion chromatique dans une fibre, en supposant les valeurs d'indice de réfraction connues.

Notons, d'une part, qu'on peut montrer que le modèle de Lorentz à valeurs complexes (avec $\gamma_i \neq 0$) vérifie les relations de Kramers-Kronig (voir [22]). Cependant, si on souhaite utiliser la formule de Sellmeier (avec $\gamma_i = 0$), alors les conditions d'analyticité ne seront pas respectées et Kramers-Kronig ne sera pas valide. C'est pour cette raison que nous n'utiliserons pas ces relations dans notre modèle de fibre optique.

1.4 Milieu homogène

Afin de bien comprendre l'importance des difficultés liées à la dépendance fréquentielle de l'indice de réfraction complexe (et plus tard de son analogue dans les guides d'ondes : l'indice effectif), commençons par dériver la plus simple des solutions non-constantes des équations de Maxwell : l'onde monochromatique polarisée linéairement. On se place ici dans un milieu où ϵ_r et $\mu_r = \mu_0$ sont uniformes en espace (dans \mathbb{R}^3). Les équations de Maxwell deviennent

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0 \quad (1.14)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (1.15)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.16)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.17)$$

En prenant le rotationnel de part et d'autres de 1.16 et 1.17, on calcule

$$\begin{aligned}\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{E})) &= -\text{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}(\mathbf{B})) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{B})) &= \text{rot}\left(\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}(\mathbf{E})) = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Comme $\text{rot} \circ \text{rot} = \text{grad} \circ \text{div} - \text{div} \circ \text{grad}$, on conclut en utilisant 1.14 et 1.15

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

$$\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (1.19)$$

Notons que ces équations non-couplées représentent des conditions nécessaires et non suffisantes, à tout de moins sans condition limite appropriées.

On supposera que la solution est invariante dans le plan (x, y) , i.e. que $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$. Bien que cette condition ne soit pas physiquement réaliste, elle permet quand même de représenter localement une onde électromagnétique dans un matériau homogène. On se retrouve donc avec six équations des ondes (en considérant les composantes) à deux variables. Pour le champ électrique, on aura

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \left(\frac{n_c}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

où $n_c^2 = \epsilon_r \in \mathbb{C}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. On sait de [25] que toute solution de l'équation des ondes sera nécessairement de la forme de d'Alembert $(x, t) \mapsto f_1\left(\frac{c}{n_c}t - x\right) + f_2\left(\frac{c}{n_c}t + x\right)$, les termes de la somme correspondant respectivement à des ondes voyageant en directions positive et négative de l'axe des z .

Cependant, pour bien faire l'analogie avec ce qui suivra dans les deux prochains chapitres, on modifiera légèrement 1.20 avant de la résoudre. En fait, comme toute fonction de carré intégrable peut être représentée comme une superposition d'exponentielles complexes grâce à la transformée de Fourier, on ne perd pas en généralité en travaillant en régime harmonique selon t , i.e. en supposant que la solution est de la forme $(z, t) \mapsto \mathbf{E}(z)e^{i\omega t}$ (on fait ici un abus de notation en réutilisant la lettre \mathbf{E} pour la composante spatiale). On a alors que 1.20 devient une équation différentielle ordinaire en x :

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dz^2} = -(k_0 n_c)^2 \mathbf{E}(z) \quad (1.21)$$

où $k_0 = \frac{\omega}{c}$. On appelle la fonction $\beta(\omega) = k_0 n_c(\omega)$ la *relation de dispersion* de l'onde, une relation qui jouera un rôle fondamentale plus tard dans les guides d'ondes linéaires. L'équation 1.21 est la version unidimensionnelle de l'équation classique de Helmholtz. Sa solution générale peut être exprimée par une exponentielle complexe de la forme $z \mapsto \mathbf{A}e^{-ik_0 n_c z}$ avec le vecteur complexe $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^3$. On supposera que les trois composantes complexes de \mathbf{A} sont

en phase, i.e. que l'onde plane est polarisée linéairement (il s'agit là d'une hypothèse physique). Aussi, on rappelle que l'indice de réfraction complexe $n_c = n(\omega) - i\kappa(\omega)$ aura une dépendance en ω , ce qui donne

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - k_0 n(\omega) z)} e^{-k_0 \kappa(\omega) z} \mathbf{v} \quad (1.22)$$

où $E_0 \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ (qu'on suppose de norme unitaire) sont quelconques. De plus, pour retrouver la solution physique du champ électrique, notons qu'il est nécessaire de considérer seulement la partie réelle de 1.22 :

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - k_0 n(\omega) z + \phi) e^{-k_0 \kappa(\omega) z} \quad (1.23)$$

où ϕ est la phase associée à E_0 et $\mathbf{E}_0 = |E_0| \mathbf{v}$. En raison de l'exponentielle décroissant, on remarque que cette solution réelle ne vérifie pas la formule de d'Alembert, bien que la version complexe la vérifie. Cette apparente contradiction est dû au fait que dans 1.23, on pourrait croire que les parties réelles et imaginaires de chaque composante sont découplées et donc que chacune des parties vérifie la formule de d'Alembert. Or, comme l'indice de réfraction est à valeur complexe, sa partie réelle interagit avec sa partie imaginaire dans 1.21, ce qui implique que chacune des ces parties réelle et imaginaire ne vérifie pas nécessairement la formule de d'Alembert.

Ceci étant dit, il nous reste à vérifier la loi de Gauss 1.1, i.e. que la divergence spatial $\nabla \cdot (n_c^2 \mathbf{E})$ est nulle. On rappelle que l'indice de réfraction est uniforme en espace et que \mathbf{E} n'a pas de dépendance en x et y , ce qui implique que cette loi se résume à vérifier que $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. Après avoir calculé la dérivée, on a que cette condition revient à vérifier l'équation

$$\kappa(\omega) E_{0,z} \cos(\omega t - k_0 n(\omega) z + \phi) = n(\omega) E_{0,z} \sin(\omega t - k_0 n(\omega) z + \phi)$$

pour tout t et z , où $E_{0,z}$ est la composante de l'amplitude dans la direction de propagation (l'axe des z). On peut facilement se convaincre que le seul cas physiquement et mathématiquement possible permettant de vérifier cette équation est celui où $E_{0,z} = 0$. Cela veut donc dire que le champ électrique d'une onde harmonique plane est nécessairement transversal à la direction de propagation, une condition qui sera fausse en général dans les guides d'ondes optiques.

En complément, mentionnons qu'on peut, en régime harmonique selon t , déterminer la distribution de \mathbf{B} à partir de la loi de Faraday 1.3. À titre indicatif, cela donne en notation complexe

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z, t) &= \frac{1}{-i\omega} \nabla \times \left(\mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 n_c(\omega) z + \phi)} \right) \\ &= \frac{-ik_0 n_c(\omega)}{-i\omega} \mathbf{k} \times \left(\mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 n(\omega) z + \phi)} \right) = \frac{n_c(\omega)}{c} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) e^{i(\omega t - k_0 n_c(\omega) z + \phi)} \end{aligned}$$

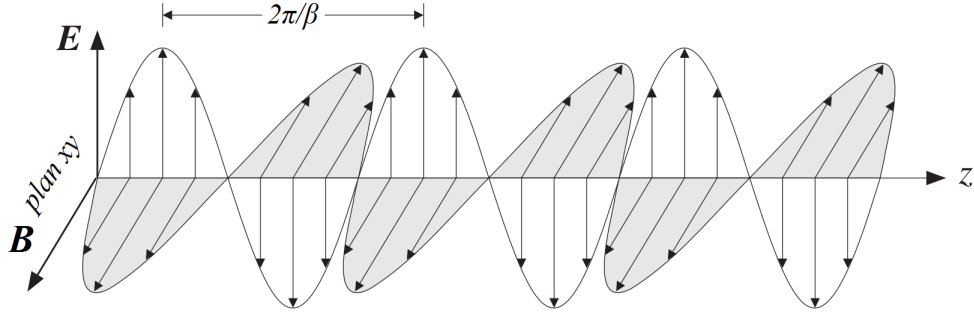


FIGURE 1.6 – Exemple d’onde électromagnétique plane sans atténuation (Source : [24])

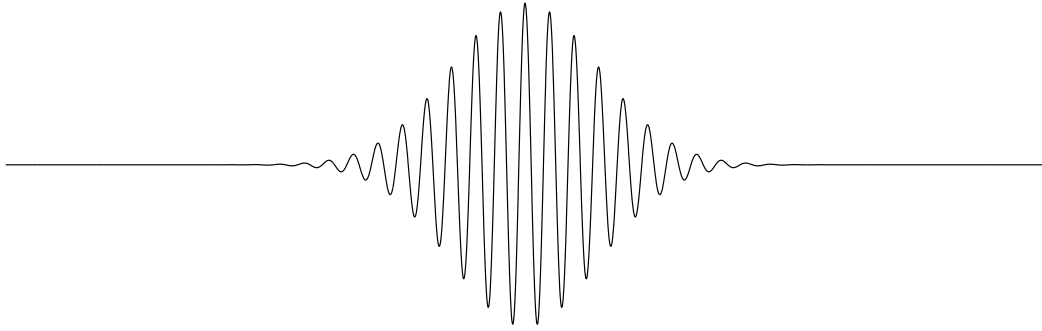


FIGURE 1.7 – Exemple d’une impulsion lumineuse reçue de forme gaussienne qui s’exprime en notation complexe $E(z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{\sigma^2}\right) \exp(i\omega_0 t)$ à une position fixée z , où $\omega_0, \sigma > 0$.

où \mathbf{k} est le vecteur unitaire aligné positivement sur l’axe des z . On voit encore une fois que l’indice de réfraction complexe complique les choses en introduisant une phase supplémentaire dépendant de la fréquence angulaire. On peut toutefois conclure que le champ magnétique est orthogonal au champ électrique et à la direction de propagation, tel qu’illustré à la figure 1.6 dans le cas où $\kappa = 0$.

Maintenant que nous avons un premier ensemble de solutions aux équations de Maxwell (paramétrisées par ω , $|E_0|$ et ϕ dans le cas réel et ω , E_0 et \mathbf{v} dans le cas complexe), nous allons montrer comment on peut les combiner pour mieux comprendre les phénomènes de dispersion et d’atténuation.

1.4.1 Superposition d’ondes planes monochromatiques

Dans cette section, on ignorera volontairement la nature vectorielle du champ électrique et on travaillera exclusivement en notation complexe. Plus précisément, en reprenant 1.22, on considèrera la version scalaire de l’onde plane monochromatique linéairement polarisée

$$E(z, t) := \mathbf{E}(z, t) \cdot \mathbf{v} = E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_c(\omega) z)}. \quad (1.24)$$

On souhaite généraliser à d'autres sortes d'ondes en considérant différentes superpositions de ces ondes, qui respecteront elles aussi les équations de Maxwell étant donné l'hypothèse de linéarité de la force de retour des molécules face au champ électrique. Rappelons qu'un des objectifs de ce mémoire est de modéliser la propagation des impulsions lumineuses (telles qu'illustrées par exemple en 1.7) dans les guides d'ondes optiques. Ce sont ces impulsions qui, par exemple, transmettent l'information dans un réseau de fibres optiques. Nous verrons plus loin que d'un point de vue mathématique, la seule différence avec la solution dans les guides d'ondes sera que l'amplitude \mathbf{E}_0 de l'onde (ou la paire (E_0, \mathbf{v}) en notation complexe) aura une dépendance en (x, y) et que l'indice de réfraction (qui est égal à l'indice effectif dans ce contexte) dépendra également de la géométrie du guide d'onde, celle-ci étant généralement invariante selon l'axe de propagation (i.e. l'axe des z).

Dans le cas linéaire, l'idée principale pour atteindre cet objectif est de voir mathématiquement une impulsion lumineuse comme une superposition d'ondes monochromatiques de fréquence angulaire, de phase et d'amplitude variables (i.e. des sinusoides d'amplitude exponentiellement décroissante ou encore d'exponentielles complexes avec constante de propagation $\beta = k_0 n_c$ complexe à dépendance fréquentielle).

Mentionnons ici qu'il faut voir physiquement la fréquence angulaire comme une variable indépendante associée à la lumière produite, car elle ne change pas à l'interface de deux matériaux (voir [14]), contrairement à la longueur d'onde. D'ailleurs, lorsqu'on parle de la longueur d'onde comme variable indépendante, on fera référence à longueur d'onde dans le vide $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{k_0}$ et non à la "vraie" longueur d'onde $\frac{2\pi}{\beta}$, qui varie en fonction du guide d'ondes, du matériau, etc.

Rappelons certaines techniques d'analyse de Fourier qui nous permettront de décomposer une impulsion lumineuse en une superposition d'ondes monochromatiques. D'une part, on a la technique bien connue des séries de Fourier, qui s'applique dans notre cas d'impulsion lumineuse en exprimant le champ électrique $\mathbf{E}(z, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ en notation complexe :

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} C_m e^{i(\omega_m t - \beta_m z)} \quad (1.25)$$

où $\omega_m := \frac{2\pi m}{T}$ et $\beta_m := \frac{\omega_m n_c(\omega_m)}{c}$. On note l'apparition de fréquences négatives $\omega_m \leq 0$, qui sont difficilement justifiables d'un point de vue physique. Cette difficulté est résolue par le fait qu'en utilisant la notation complexe, toute impulsion lumineuse raisonnable (comme celle de la figure 1.7) sera telle que le calcul de ses coefficients donnera $C_m \approx 0$ pour tout $m \leq 0$

En fait, le principal inconvénient ici est que toute impulsion représentée de cette façon sera périodique en temps. On peut en effet vérifier facilement que la fonction $t \mapsto \mathbf{E}(z, t)$ sera de période T , peu importe le z fixé. En prenant le produit scalaire (celui de $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$) avec

$e^{-i\omega_m t}$, il n'est pas difficile de voir les coefficients dans l'égalité 1.25 seront donnés par

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} E(0, t) e^{-i\omega_m t} dt \quad (1.26)$$

où $E(0, t)$ est donné. Soulevons le fait qu'on peut très bien (en considérant une somme finie) approximer toute fonction de $L^2(-T/2, T/2)$ à $\epsilon > 0$ près selon le produit scalaire associé à cet espace. Les meilleurs coefficients pour une telle approximation sont donnés également par 1.26. Cette dernière affirmation se justifie par le fait que les coefficients déterminent une projection sur un sous-espace de dimension finie de $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, et que les coefficients 1.26 déterminent en fait la projection de $E(0, t)$ dans cet espace. Cette façon de faire nous permettra de simuler une impulsion en considérant un grand nombre d'ondes planes à partir de la version discrète de 1.18.

D'une part, il est intéressant de constater que plus T est grand, plus le peigne de fréquences $\{\frac{2\pi m}{T} : m \in \mathbb{Z}\}$ devient dense dans \mathbb{R} et l'expression 1.25 tend vers l'intégrale impropre de Riemann de $E(0, t) e^{i(\omega t - \beta(\omega)z)}$ en ω dont les bornes sont $-\infty$ et ∞ . D'autre part, si l'amplitude de l'impulsion tend rapidement vers 0 lorsque $|t| \rightarrow \infty$, on constate que l'intégrale dans 1.26 tendra vers l'intégrale de la transformée de Fourier de $E(0, t)$ évaluée en ω_n , et aussi notée $\mathcal{F}[E(0, t)](\omega_n)$. On rappelle qu'on peut définir la fonction $\mathcal{F}[E(0, t)] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pour toute impulsion initiale $E(0, t)$ de carré intégrable au sens de Lebesgue. L'intégrale 1.26 converge donc vers l'intégrale impropre

$$\mathcal{F}[E(0, t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.27)$$

tandis que la relation 1.25 converge vers la relation

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[E(0, t)](\omega) e^{i(\omega t - \beta(\omega)z)} d\omega \quad (1.28)$$

Physiquement, cette dernière équation peut être vue comme une superposition d'une infinité indénombrable d'ondes monochromatiques. Mathématiquement, on considère $E(0, t)$ comme étant donnée et $E(z, t)$ comme décrivant l'évolution de l'impulsion en espace et en temps. Mentionnons au passage que les équations 1.27 et 1.28 avec $z = 0$ forment un théorème et restent valide dans le contexte où on considère l'intégrale au sens de Lebesgue (voir [26] pour les démonstrations). Cet outil mathématique est fondamental en optique car il permet d'analyser le "contenu spectral" d'un paquet d'ondes dans toute sorte de contexte. À titre d'exemple, on a illustré à la figure 1.8 la transformée de Fourier de l'impulsion illustrée en 1.7.

Comme nous allons le voir, les séries de Fourier seront davantage utiles, étant donné notre désir de simuler numériquement ces impulsions dans les fibres optiques microstructurées.

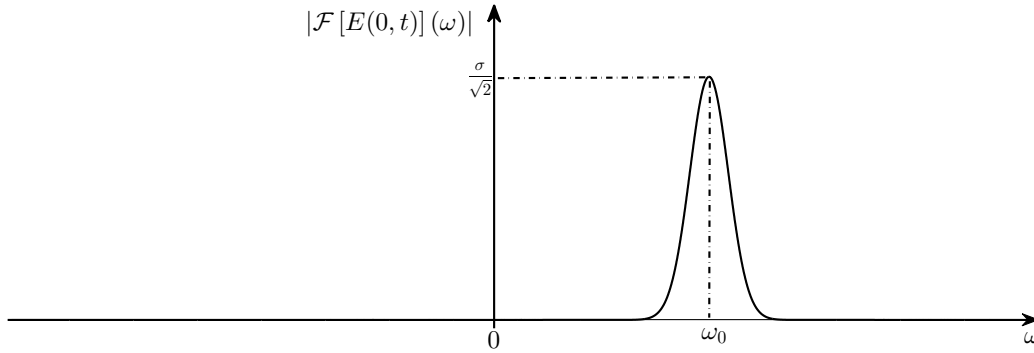


FIGURE 1.8 – Amplitude de la transformée de Fourier de l’impulsion illustrée en 1.7 en supposant $t_0 = 0$, la phase étant nulle dans ce cas. L’expression générale de cette transformée est donnée par $\mathcal{F}[E(0, t)](\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}(\omega - \omega_0)^2 + (\omega - \omega_0)t_0 i\right)$

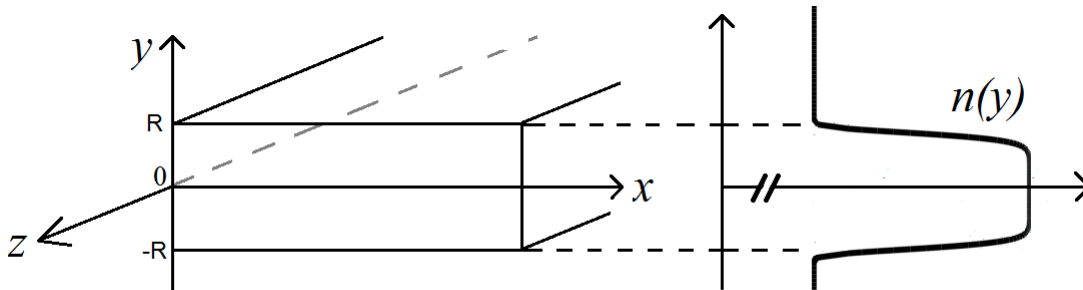


FIGURE 1.9 – Géométrie d’un guide d’ondes planaire avec son profil d’indice de réfraction de forme hypergaussienne

1.5 Milieu non-homogène

La résolution précédente des équations de Maxwell reposait sur l’homogénéité de la permittivité relative. Nous allons dans ce qui suit généraliser cette situation de deux façons, que nous analyserons au prochain chapitre avec des outils d’analyse fonctionnelle. En premier lieu, on considérera les guides d’ondes planaires et en second lieu, les fibres optiques.

1.5.1 Guide d’ondes optiques planaire

Complexifions légèrement la situation en ajoutant une perturbation selon y de l’indice de réfraction, ce qui donnera un guide d’ondes optiques planaire (dans \mathbb{R}^3). Il est nommé ainsi car il guide les ondes aux fréquences optiques et que les propriétés du matériau sont homogènes dans les plans parallèles à $\mathcal{O}xz$. La pertinence d’un tel modèle dans ce mémoire réside dans sa simplicité mathématique tout en permettant d’illustrer les concepts physiques importants comme la dispersion et l’atténuation. L’hypothèse qui simplifie les équations de ce modèle

est l'invariance selon l'axe des x :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

On suppose aussi qu'il existe $R > 0$ tel que $n(y)$ est constant pour tout $y \geq R$. Les solutions recherchées seront alors de la forme

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0(y) e^{i(\omega t - \beta z)} = \mathbf{E}_0(y) e^{i(\omega t - k_0 n_i z)} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}_0(y) e^{i(\omega t - \beta z)} = \mathbf{B}_0(y) e^{i(\omega t - k_0 n_i z)} \quad (1.30)$$

où on rappelle que $\omega \in \mathbb{R}$ est la fréquence angulaire et $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde dans le vide. On a introduit une nouvelle variable notée $n_i := \frac{\beta}{k_0} \in \mathbb{C}$ et appelée indice effectif. L'indice effectif est égal à l'indice de réfraction lorsque le milieu est uniforme (comparer 1.29 à 1.22) et sa valeur peut être bornée en fonction de l'indice de réfraction (voir prochain chapitre). En utilisant la définition du rotationnel, l'équation 1.3 (i.e. $\text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$) devient dans ce contexte

$$\frac{dE_z}{dy} + i\beta E_y + i\omega B_x = 0 \quad (1.31)$$

$$\beta E_x - \omega B_y = 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{dE_x}{dy} - i\omega B_z = 0 \quad (1.33)$$

et l'équation 1.4 (i.e. $\text{rot}(\mathbf{B}) = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ en réarrageant les constantes) devient

$$\frac{dB_z}{dy} + i\beta B_y - \left(\frac{n}{c}\right)^2 i\omega E_x = 0 \quad (1.34)$$

$$\beta B_x + \left(\frac{n}{c}\right)^2 \omega E_y = 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{dB_x}{dy} + \left(\frac{n}{c}\right)^2 (i\omega) E_z = 0 \quad (1.36)$$

où on a noté $\mathbf{E}_0 = (E_x, E_y, E_z)^T$ en omettant la dépendance en y . Or, il est possible de réorganiser ces équations en deux systèmes indépendants formés d'une part de 1.31, 1.35, 1.36 et d'autre part de 1.34, 1.32, 1.33. Dans ce contexte, la solution complète du champ électromagnétique $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0) e^{i(\omega t - \beta z)}$ peut donc toujours être vue comme une superposition de deux modes, appelés TM et TE pour "transverse magnetic" et "transverse electric". Dans le cas TM, on suppose que $B_y = E_x = B_z = 0$ et on n'a qu'à résoudre

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{n^2} \frac{dB_x}{dy} \right) = \left(\frac{\beta^2}{n^2} - k_0^2 \right) B_x \quad (1.37)$$

pour ensuite déduire E_y et E_z à l'aide de 1.35 et 1.36. Dans le cas TE, on pose $B_x = E_y = E_z = 0$ et on n'a qu'à résoudre

$$\frac{d^2 E_x}{dy^2} = (\beta^2 - k_0^2 n^2) E_x. \quad (1.38)$$

On serait alors tenté de sortir le terme $\frac{1}{n^2}$ de la première dérivée de 1.37, mais on doit se rappeler que dans le présent contexte, n dépend de y . C'est d'ailleurs lorsque cette dépendance est bien choisie que le milieu pourra guider la lumière, comme dans le guide d'ondes planaire à gradient d'indices illustré à la figure 1.9.

On verra au prochain chapitre qu'un mode guidé est défini formellement comme étant une solution non-nulle de carré intégrable (d'énergie finie) d'un problème aux valeurs propres. En général, pour un guide d'ondes, il est faux de dire que les équations 1.37 et 1.38 ainsi que plus généralement le système 1.31-1.36 n'admettent que des modes guidés comme solutions. On retrouve en particulier deux autres sortes de modes, appelés modes de fuite et modes radiatifs. De surcroît, il n'existe pas nécessairement de modes guidés pour une paire (ω, β) arbitraire. Nous reviendrons plus tard sur ces points importants lorsqu'on fera l'analyse spectrale du champ magnétique.

1.5.2 Dispersion et vitesse de propagation

Introduisons maintenant la notion importante de relation de dispersion associée à un mode. Ces courbes (un guide d'ondes peut en avoir plusieurs) décrivent la relation entre les valeurs de β et ω pour lesquelles il existe un mode guidé. Sous certaines conditions, ces courbes possèdent des propriétés mathématiques utiles telles que la monotonie et la continuité, ce que nous allons d'ailleurs démontrer rigoureusement au prochain chapitre. Ces relations permettent de définir plusieurs concepts physiques importants nous permettant de mieux comprendre le phénomène de dispersion, à commencer par les vitesses de phases v_p et de groupe v_g , définies comme

$$v_p(\omega) = \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^{-1} \quad v_g(\omega) = \left(\frac{d\gamma}{d\omega}\right)^{-1}$$

où $\gamma = \text{Re}(\beta)$ et $\omega > 0$. Si l'interprétation de la vitesse de phase est directe, celle de la vitesse de groupe est quant à elle plus délicate. D'un côté, on voit facilement que la vitesse de phase correspond à la vitesse de translation d'une onde monochromatique, dépendant donc d'une seule paire (β, ω) . De son côté, la vitesse de groupe est définie davantage en considérant β comme une fonction de ω .

En fait, il est possible de montrer que si le contenu spectral d'une impulsion brève est centré en une fréquence angulaire ω_0 (telle qu'illustrée en 1.7 et 1.8), l'enveloppe de l'impulsion et son énergie se déplacent à une vitesse égale $v_g(\omega_0)$ (tel que justifié dans [21]). Notons que ceci est justifié dans le cas où le milieu n'entraîne aucune perte, i.e. lorsque l'indice de réfraction est réel. Nous prendrons pour acquis cette affirmation plus généralement dans le cas qui nous intéresse, i.e. dans un milieu avec pertes.

Comme on l'a illustré plus tôt, une impulsion brève doit être vue mathématiquement comme une superposition d'un continuum de mode guidés, chacun se déplaçant à une vitesse de

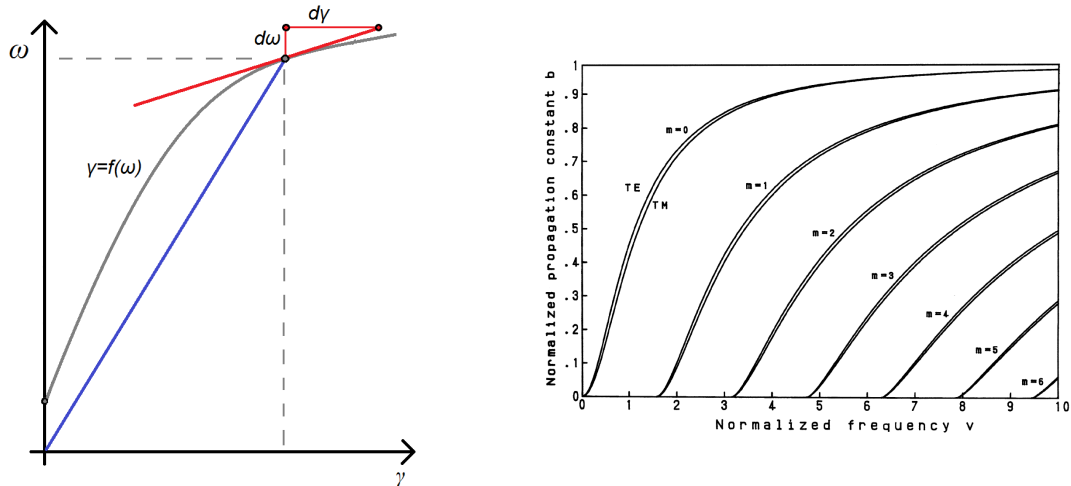


FIGURE 1.10 – Illustration des vitesses de groupe et de phase à gauche. Courbes de dispersion à droite (tirées de [23]) d'un guide d'ondes planaires à saut d'indices, où on a

$$v := k_0 n_{\text{coeur}} d \sqrt{\frac{n_{\text{coeur}}^2 - n_{\text{gaine}}^2}{n_{\text{gaine}}^2}}, b := \frac{n_i^2 - n_{\text{gaine}}^2}{n_{\text{coeur}}^2 - n_{\text{gaine}}^2}$$

phase $v_p(\omega)$ Fixons une fréquence $\omega_0 > 0$ et exprimons la partie réelle de la courbe de dispersion $\gamma = f(\omega)$ (qu'on supposera deux fois dérivable) sous la forme d'un développement de Taylor (voir [8]) d'ordre deux autour de ω_0 :

$$f(\omega) = f(\omega_0) + (\omega - \omega_0)f'(\omega_0) + (\omega - \omega_0)^2 f''(\omega_0) + o((\omega - \omega_0)^2) \quad (1.39)$$

où

$$f'(\omega_0) = \frac{1}{v_g} = \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (1.40)$$

est l'inverse de la vitesse de groupe et

$$f''(\omega_0) = \left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (1.41)$$

est appelée la dispersion de vitesse de groupe. Le point crucial pour nous est que si f ressemble localement à une droite autour de ω_0 , alors l'enveloppe de l'impulsion brève maintiendra sa forme.

D'abord, si cette droite intersecte l'origine, alors la vitesse de phase est approximativement constante autour de ω_0 et l'onde se déplace en translation selon l'axe des z . De plus, même si cette droite ne passe pas par l'origine (et donc que la vitesse de phase dépend localement de ω), alors l'enveloppe de l'impulsion gardera quand même sa forme. Dans ce cas, les crêtes de l'impulsion se propageront à une vitesse différente de leur enveloppe. Nous justifierons numériquement cette affirmation au chapitre 3 en simulant des impulsions brèves à l'aide de différentes relations de dispersion.

D'une part, nous nous limiterons, dans certaines sections de ce mémoire, au mode fondamental, i.e. au mode guidé associé au γ le plus élevé pour un ω fixé. Cette restriction inclut

le cas important des guides d'ondes monomodes, qui sont particulièrement utilisés en pratique comme par exemple dans les réseaux de télécommunication à large échelle (voir [30]). Il s'agit de guides d'ondes pour lesquels seul le mode fondamental existe, ce qui réduit la dispersion associée à la superposition de modes.

Enfin, nous nous intéresserons aux fréquences incluses dans le spectre visible ou l'infrarouge proche, c'est-à-dire pour les valeurs de ω variant entre² environ 10^{14} et 10^{15} rad/s. Celles-ci sont souvent utilisées en pratique étant donné le peu de pertes associées aux impulsions émises dans leur voisinage. Nous reviendrons également sur les modèles de pertes au chapitre 3.

1.5.3 Fibres optiques microstructurées

Terminons ce chapitre en introduisant le modèle de fibres optiques microstructurées, qui sera analysé et simulé dans les prochains chapitres. Considérons d'abord une fibre de longueur infinie selon l'axe des z . On suppose que les propriétés des matériaux varient seulement de façon transversale selon $(x, y) \in \Omega$, où Ω est soit un domaine compact à frontière régulière (on parlera de guide d'ondes fermé) ou encore est égal à \mathbb{R}^2 (on parlera alors de guide d'ondes ouvert).

L'indice de réfraction complexe sera donc invariant en z , la direction de propagation de l'onde. Ici, les définitions précédentes de constante de propagation, d'indice effectif, de dispersion et d'atténuation sont identiques au cas des guides d'ondes planaires. De plus, les hypothèses physiques demeurent, telles que la polarisation linéaire, la non-conductivité et l'indice de réfraction complexe variant en fonction de la fréquence. La seule différence sera au niveau du profil d'indice de réfraction et de la dépendance en (x, y) . On cherche une solution aux équations 1.1-1.4 de la forme

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (1.42)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}_0(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (1.43)$$

où on décompose généralement $\mathbf{E}_0 = (E_x, E_y, E_z) = (\mathbf{E}^t, E^l)$ en fonction de sa partie transversale $\mathbf{E}^t : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2$ et sa partie longitudinale $E^l : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. En faisant de même pour \mathbf{B}_0 , on obtient après substitutions dans les équations de Maxwell

$$\operatorname{div}_\beta(n^2 \mathbf{E}_0) = 0 \quad (1.44)$$

$$\operatorname{div}_\beta(\mathbf{B}_0) = 0 \quad (1.45)$$

$$\operatorname{rot}_\beta(\mathbf{E}_0) = -i\omega \mathbf{B}_0 \quad (1.46)$$

$$\operatorname{rot}_\beta(\mathbf{B}_0) = in^2 \omega \mathbf{E}_0 \quad (1.47)$$

2. On utilise ici les unités rad/s pour les fréquences angulaires ω et les Hz pour les simples fréquences f_0

où on note généralement

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_\beta(\mathbf{V}) &:= e^{i\beta z} \operatorname{rot} \left(\mathbf{V} e^{-i\beta z} \right) \\ &= \left(-i\beta V_y - \frac{\partial V_z}{\partial y}, \frac{\partial V_z}{\partial x} + i\beta V_x, \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ \operatorname{div}_\beta(\mathbf{V}) &:= e^{i\beta z} \operatorname{div} \left(\mathbf{V} e^{-i\beta z} \right) \\ &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} - i\beta V_z\end{aligned}$$

pour $\beta \in \mathbb{C}$ et pour un champ vectoriel $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, qu'on supposera suffisamment dérivable au sens classique pour l'instant. Notons que ces nouveaux opérateurs consistent simplement à remplacer les dérivées $\frac{\partial}{\partial z}$ par une multiplication par $-i\beta$. Afin d'isoler le champ magnétique \mathbf{B}_0 ou électrique \mathbf{E}_0 , on prend le rotationnel de part et d'autres de 1.46 et on divise 1.47 par n^2 avant de prendre le rotationnel là aussi. Ce faisant, on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_\beta(\operatorname{rot}_\beta(\mathbf{E}_0)) &= \operatorname{rot}_\beta(-i\omega \mathbf{B}_0) = n^2 \omega^2 \mathbf{E}_0 \\ \operatorname{rot}_\beta \left(\frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta(\mathbf{B}_0) \right) &= \operatorname{rot}_\beta(i\omega \mathbf{E}_0) = \omega^2 \mathbf{B}_0\end{aligned}$$

ce qui donne finalement les systèmes découplés

$$\operatorname{rot}_\beta(\operatorname{rot}_\beta(\mathbf{E}_0)) = n^2 \omega^2 \mathbf{E}_0 \quad (1.48)$$

$$\operatorname{div}_\beta(n^2 \mathbf{E}_0) = 0 \quad (1.49)$$

et

$$\operatorname{rot}_\beta \left(\frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta(\mathbf{B}_0) \right) = \omega^2 \mathbf{B}_0 \quad (1.50)$$

$$\operatorname{div}_\beta(\mathbf{B}_0) = 0 \quad (1.51)$$

Ce modèle contient toute les hypothèses physiques nécessaires pour l'étude des modes guidés. Certaines manipulations mathématiques seront nécessaires si on veut bien formuler les équations permettant le calcul de β en fonction de ω . Nous gardons celles-ci pour le prochain chapitre, où on fera une analyse plus rigoureuse du modèle.

Chapitre 2

Analyse spectrale du problème de modes dans les fibres optiques

En mathématiques appliquées, il est parfois utile de travailler dans un cadre abstrait afin de dégager les idées nous permettant de généraliser un concept ou démontrer un théorème. Dans ce chapitre, nous travaillerons dans le cadre de l'analyse fonctionnelle et de la théorie spectrale afin de dégager les caractéristiques des fibres à saut d'indices nous permettant de décrire de façon générale les propriétés des courbes de dispersion de toutes sortes de fibres optiques. Ceci aura des répercussions pratiques, comme par exemple lorsque nous justifierons plus loin la recherche des indices effectifs (bornes, valeurs de coupure, etc) en utilisant le principe du min-max. Mais pour l'instant, concentrons-nous sur la formulation mathématique du problème.

2.1 Formulation du problème

Cette section a comme objectif de formuler le problème d'analyse modale dans le cadre mathématique des opérateurs non-bornés dans des espaces de Hilbert. Nous ferons une démonstration mathématique de l'équivalence entre la formulation du champ électrique et les deux formulations du champ magnétique. Mais pour ce faire, on doit introduire les espaces sur lesquels seront définis les opérateurs et formulations variationnelles pour les guides d'ondes optiques, et plus particulièrement pour les fibres optiques.

2.1.1 Espaces fonctionnels et opérateurs de base pour fibres optiques

Définissons les espaces fonctionnels et opérateurs différentiels nécessaires pour formuler notre problème de modes dans les fibres optiques. Nous noterons le produit scalaire et la norme sur un espace de Hilbert \mathcal{H} par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$. Nous supposerons que le produit scalaire sur $L^2(\Omega)^n$ est de la forme A.24. Enfin, nous utiliserons dans ce chapitre les variables (x_1, x_2, x_3) pour désigner les coordonnées (x, y, z) .

Définition 2.1. Soient un ouvert¹ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\beta \in \mathbb{C}$. On appellera *rotationnel vectoriel* l'application linéaire $\text{rot}_\beta : \mathcal{D}'(\Omega)^3 \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)^3$ définie par

$$\text{rot}_\beta(\mathbf{\Lambda}) = \left(i\beta\Lambda_2 + \frac{\partial\Lambda_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial\Lambda_3}{\partial x_1} - i\beta\Lambda_1, \frac{\partial\Lambda_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Lambda_1}{\partial x_2} \right) \quad (2.1)$$

L'idée ici est que pour une transformée de Fourier, prendre la dérivée revient à multiplier par $i\beta$.

Proposition 2.2. L'application linéaire rot_β devient un opérateur non-borné et fermé sur $L^2(\Omega)^3$ lorsque son ensemble de définition est restreint à $\{\mathbf{F} \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{rot}_\beta\mathbf{F} \in L^2(\Omega)^3\}$.

Démonstration. La linéarité de rot_β est évidente et cet opérateur est non-borné car $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ selon [7] et $\mathcal{D}(\Omega)^3 \subset D(\text{rot}_\beta)$.

Il reste à démontrer que rot_β est fermé. Soit une suite $(\mathbf{F}_n)_{n=1}^\infty \subset D(\text{rot}_\beta)$ telle que $\mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{F}$ et $\text{rot}_\beta(\mathbf{F}_n) \rightarrow \mathbf{G}$ dans $L^2(\Omega)^3$. Nous allons simplement montrer que G_1 est égal à $i\beta F_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$ au sens des distributions, un argument similaire s'appliquant aux autres composantes de \mathbf{G} . Par hypothèse sur \mathbf{F}_n , on a que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$i\beta \int_{\Omega} F_{n,x_2} \phi d\Omega - \int_{\Omega} F_{n,x_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} d\Omega = \int_{\Omega} \left(i\beta F_{n,x_2} + \frac{\partial F_{n,x_3}}{\partial x_2} \right) \phi d\Omega \quad (2.2)$$

Étant donné l'inégalité de Cauchy-Schwartz et comme la convergence de chaque composante se fait dans $L^2(\Omega)$, on prend la limite de part et d'autres et on obtient

$$i\beta \int_{\Omega} F_2 \phi d\Omega - \int_{\Omega} F_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} d\Omega = \int_{\Omega} G_1 \phi d\Omega \quad (2.3)$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui signifie que $G_1 = i\beta F_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$ au sens des distributions. \square

Définition 2.3. Le domaine de rot_β est noté $H(\text{rot}_\beta; \Omega)$. Le résultat A.3 nous dit que cet espace fonctionnel devient un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{H(\text{rot}_\beta; \Omega)} = \langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle \text{rot}_\beta(\mathbf{F}), \text{rot}_\beta(\mathbf{G}) \rangle_{L^2(\Omega)^3} \quad (2.4)$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^2$, cet espace sera noté $H(\text{rot}_\beta)$.

Définition 2.4. Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On appellera *rotationnel scalaire* l'application linéaire $\text{rot} : \mathcal{D}'(\Omega)^2 \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$\text{rot}(\mathbf{\Lambda}) = \frac{\partial\Lambda_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Lambda_1}{\partial x_2} \quad (2.5)$$

Proposition 2.5. L'application linéaire rot devient un opérateur non-borné et fermé de $L^2(\Omega)^2$ vers $L^2(\Omega)$ lorsque son ensemble de définition est restreint à $\{\mathbf{F} \in L^2(\Omega)^2 \mid \text{rot}(\mathbf{F}) \in L^2(\Omega)\}$.

1. Sans le mentionner à chaque fois, on supposera toujours que Ω est non-vidé.

Démonstration. Il suffit d'adapter à rot les arguments de la démonstration de 2.2. \square

Définition 2.6. Comme en 2.3, on définit l'espace de Hilbert $H(\text{rot}; \Omega)$ en munissant le domaine du rotationnel scalaire avec le produit scalaire

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{H(\text{rot}; \Omega)} = \langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_{L^2(\Omega)^2} + \langle \text{rot}(\mathbf{F}), \text{rot}(\mathbf{G}) \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (2.6)$$

Ici aussi, lorsque $\Omega = \mathbb{R}^2$, cet espace sera noté $H(\text{rot})$.

Proposition 2.7. Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on a que les espaces fonctionnels $H(\text{rot}_\beta; \Omega)$ et $H(\text{rot}; \Omega) \times H^1(\Omega)$ sont égaux et les norme induites des deux espaces sont équivalentes.

Démonstration. Commençons par l'égalité. Soit $(F_1, F_2, F_3) \in L^2(\Omega)^3$. Alors, on a clairement que $(i\beta F_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - i\beta F_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ si et seulement si $F_3 \in H^1(\Omega)$. De plus, on a par définition que $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$ si et seulement si $(F_1, F_2) \in H(\text{rot}; \Omega)$.

Terminons avec l'équivalence des normes. Soit $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) \in H(\text{rot}_\beta; \Omega)$. Alors on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\|_{H(\text{rot}_\beta; \Omega)} &\leq \sqrt{2} \left(\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\text{rot}_\beta(\mathbf{F})\|_{L^2(\Omega)^3} \right) \\ &\leq \sqrt{6} \left(\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)^3} + \left\| i\beta F_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| -\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - i\beta F_1 \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{rot}(F_1, F_2)\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \sqrt{6}(1 + |\beta|) \left(\|F_3\|_{H^1(\Omega)} + \|(F_1, F_2)\|_{H(\text{rot}; \Omega)} \right) \\ &\leq \sqrt{6}(1 + |\beta|) \|\mathbf{F}\|_{H(\text{rot}; \Omega) \times H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\|_{H(\text{rot}; \Omega) \times H^1(\Omega)} &\leq \sqrt{2} \left(\|(F_1, F_2)\|_{H(\text{rot}; \Omega)} + \|F_3\|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &\leq \sqrt{3} \left(\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{rot}(F_1, F_2)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \sqrt{3}(1 + |\beta|) \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{3} \|\text{rot}_\beta(\mathbf{F})\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &\leq \sqrt{6}(1 + |\beta|) \|\mathbf{F}\|_{H(\text{rot}_\beta; \Omega)} \end{aligned}$$

où on a utilisé les inégalités $\sum_i^n |a_i| \leq \sqrt{\sum_i^n |a_i|^2} \leq \sqrt{n} \sum_i^n |a_i|$ et $\|f\| \leq \|f - g\| + \|g\|$ pour tout $(a_i) \in \mathbb{R}^n$ et toute norme $\|\cdot\|$. \square

Ce résultat nous dit que l'ensemble $H(\text{rot}_\beta; \Omega)$ et sa topologie ne dépendent pas de β , mais que la norme et le produit scalaire en dépendent.

Définition 2.8. Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Alors, on définit les applications linéaires $\text{grad}_\beta : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)^3$ et $\text{div}_\beta : \mathcal{D}'(\Omega)^3 \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ par

$$\text{grad}_\beta(\Lambda) = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1}, \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2}, -i\beta \Lambda \right) \quad (2.7)$$

$$\text{div}_\beta(\mathbf{\Lambda}) = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_2}{\partial x_2} - i\beta \Lambda_3 \quad (2.8)$$

La proposition suivante est facile à vérifier mais sera utile par la suite.

Proposition 2.9. Soit $\beta \in \mathbb{C}$. Alors pour tout $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^3$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a que

$$\langle \text{rot}_\beta(\mathbf{F}), \mathbf{G} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)^3} = \langle \mathbf{F}, \text{rot}_{\bar{\beta}}(\mathbf{G}) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)^3} \quad (2.9)$$

$$\langle \text{div}_\beta(\mathbf{F}), g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle \mathbf{F}, -\text{grad}_{\bar{\beta}}(g) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)^3} \quad (2.10)$$

où $L^2(\mathbb{R}^2)^n$ est muni du produit scalaire A.24 avec $\epsilon \in \mathbb{R}$ constant.

Démonstration. Comme $\partial\Omega$ est vide, il suffit d'appliquer la formule de Green. Le terme de bord est nul car \mathbf{F} et \mathbf{G} sont à support compact. \square

Définition 2.10. Soit $\beta \in \mathbb{C}$. Alors on définit les applications linéaires suivantes

$$\text{rot}_\beta^* = \text{rot}_{\bar{\beta}} \quad \text{div}_\beta^* = -\text{grad}_{\bar{\beta}} \quad \text{grad}_\beta^* := -\text{div}_{\bar{\beta}} \quad (2.11)$$

Ces définitions peuvent être considérés comme des opérateurs adjoints si on les restreint au cadre des opérateurs non-bornés sur l'espace des champs vectoriels de carrés intégrables. Les identités suivantes justifient cependant leur définition dans le cadre plus général des distributions.

Proposition 2.11. Pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{D}'(\Omega)^3$, on a

$$\text{rot}_\beta(\text{grad}_\beta(\Lambda)) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

$$\text{div}_\beta(\text{rot}_\beta \mathbf{\Lambda}) = 0 \quad (2.13)$$

De plus, lorsque $\beta > 0$, alors

$$\text{rot}_\beta^*(\text{rot}_\beta(\mathbf{\Lambda})) + \text{div}_\beta^*(\text{div}_\beta \mathbf{\Lambda}) = \text{grad}_\beta^*(\text{grad}_\beta(\Lambda)) \quad (2.14)$$

où $\text{grad}_\beta^*(\text{grad}_\beta(\Lambda))$ est défini en appliquant $\text{grad}_\beta^* \circ \text{grad}_\beta$ sur chaque composante de Λ .

Le résultat suivant est une conséquence directe des définitions et résultats précédents.

Corollaire. Pour tout $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$ et tout $\beta > 0$

$$\int_\Omega \text{rot}_\beta(\mathbf{F}) \cdot \overline{\text{rot}_\beta(\mathbf{G})} d\Omega + \int_\Omega \text{div}_\beta(\mathbf{F}) \overline{\text{div}_\beta(\mathbf{G})} d\Omega = \int_\Omega \text{grad}_\beta \mathbf{F} \cdot \overline{\text{grad}_\beta \mathbf{G}} d\Omega \quad (2.15)$$

Proposition 2.12. L'application linéaire div_β devient un opérateur non-borné et fermé de $H(\text{rot}_\beta; \Omega)$ vers $L^2(\Omega)$ lorsque son ensemble de définition est restreint à $\{\mathbf{F} \in H(\text{rot}_\beta; \Omega) \mid \text{div}_\beta(\mathbf{F}) \in L^2(\Omega)\}$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser les mêmes arguments qu'en 2.2 et 2.5. \square

Le résultat suivant est important pour l'analyse mathématique du champ magnétique. Notons qu'il n'est valide que pour $\Omega = \mathbb{R}^2$. Afin de traiter le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un compact à frontière régulière, il serait sans doute nécessaire de considérer les traces de nos champs vectoriels. Rappelons à titre d'exemple que $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$, mais plutôt dans le sous-espace $H_0^1(\Omega)$.

Définition 2.13. Étant donné $\beta > 0$, on note V_β l'espace de Hilbert associé à l'opérateur non-borné et fermé div_β avec $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Théorème 2.14. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a que V_β et $H^1(\mathbb{R}^2)^3$ sont des ensembles égaux et des espaces de Hilbert isomorphes.

Démonstration. Voir [2]. □

Le théorème précédent nous dit que, pour tout $\mathbf{F} \in L^2(\mathbb{R}^2)^3$, on a que $\text{grad}(\mathbf{F}) \in L^2(\mathbb{R}^2)^6$ si et seulement si $\text{rot}_\beta(\mathbf{F}) \in L^2(\mathbb{R}^2)^3$ et $\text{div}_\beta(\mathbf{F}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Or, selon la preuve du théorème précédant on peut conclure que 2.15 tient pour tout $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in H_1(\mathbb{R}^2)^3$. Ces deux remarques seront importants dans la formulation selon le champ magnétique.

2.1.2 Définition des modes guidés, de radiation et de fuite

Dans la littérature mathématique sur les fibres optiques microstructurées (voir par exemple [33]), on considère généralement trois types de solutions aux équations de Maxwell de la forme

$$(\mathbf{x}, x_3, t) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \exp(i(\omega t - \beta x_3)) \quad \begin{array}{l} \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \omega > 0 \end{array} \quad (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad (2.16)$$

où on note $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Après substitution de 2.16 et en utilisant les applications linéaires définis ci-dessus, les équations de Maxwell se résument à

$$\text{rot}_\beta(\mathbf{E}) = -i\mu\omega\mathbf{H} \quad (2.17)$$

$$\text{rot}_\beta(\mathbf{H}) = i\epsilon\omega\mathbf{E} \quad (2.18)$$

où $\mu > 0$ est constant, $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et $0 < \inf \epsilon \leq \sup \epsilon < \infty$. Il est très peu probable qu'on arrive à traiter le cas général où $\epsilon(\mathbf{x}) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sur un ensemble de mesure non-nulle dans le cadre de la théorie des opérateurs auto-adjoints.

De plus, la dépendance de ϵ envers ω doit être ignorée afin d'avoir un problème linéaire en ω . Cela sera justifié numériquement au prochain chapitre, où on montrera que la dispersion totale peut être approximée par les dispersions causées séparément par le matériau et le guide d'onde.

Le lecteur remarquera qu'on a omis les lois de Gauss dans le dernier système d'équations. Dans le contexte des modes et grâce à l'identité 2.13, on obtient en divisant par les coefficients constants et en appliquant div_β de part et d'autres de 2.17 et 2.18

$$\text{div}_\beta(\mathbf{H}) = \text{div}_\beta \left(\frac{1}{-i\mu\omega} \text{rot}_\beta(\mathbf{E}) \right) = 0 \quad (2.19)$$

$$\text{div}_\beta(\epsilon\mathbf{E}) = \text{div}_\beta \left(\frac{1}{i\omega} \text{rot}_\beta(\mathbf{H}) \right) = \frac{1}{i\omega} \text{div}_\beta(\text{rot}_\beta(\mathbf{H})) = 0 \quad (2.20)$$

Ces conditions devront être plus loin prises en compte afin d'obtenir une formulation coercive. Pour l'instant, introduisons les définitions mathématiques de modes guidés, radiatifs et de fuite.

Définition 2.15. Un champ vectoriel non-nul de la forme 2.16 respectant les équations 2.17 et 2.18 est un *mode guidé* lorsque $\beta > 0$ et $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in L^2(\mathbb{R}^2)^6$.

On redéfinira plus loin le problème des modes guidés comme un problème aux valeurs propres (voir [2] et [4]).

Définition 2.16. Un champ vectoriel non-nul de la forme 2.16 respectant les équations 2.17 et 2.18 est un *mode radiatif* lorsque $\beta > 0$ et $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \notin L^2(\mathbb{R}^2)^6$ mais $(\psi_\Gamma \mathbf{E}, \psi_\Gamma \mathbf{H}) \in L^2(\mathbb{R}^2)^6$ pour tout $\Gamma > 0$, où $\psi_\Gamma(\mathbf{x}) = e^{-\Gamma\|\mathbf{x}\|}$.

Le problème de modes radiatifs est généralement associé à la détermination du spectre essentiel des opérateurs de fibres optiques. Intuitivement, on peut voir un mode radiatif comme une onde sinusoïdale bornée s'étendant à l'infini dans l'espace.

Définition 2.17. Un champ vectoriel non-nul de la forme 2.16 respectant les équations 2.17 et 2.18 est un *mode de fuite* lorsque $\beta \in \mathbb{C}^+$ et $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \notin L^2(\mathbb{R}^2)^6$ mais $(\psi_\Gamma \mathbf{E}, \psi_\Gamma \mathbf{H}) \in L^2(\mathbb{R}^2)^6$ pour au moins un $\Gamma > 0$, où $\psi_\Gamma(\mathbf{x}) = e^{-\Gamma\|\mathbf{x}\|}$ et $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.

Intuitivement, on peut voir un mode de fuite comme divergeant exponentiellement vers ∞ lorsque $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$. Finalement, pour obtenir une formulation du champ électrique et mettre en évidence la symétrie entre les champs magnétique et électrique, on fait parfois (comme dans [18] et [4]) le changement de variables suivant :

$$\mathbf{E}' := (E_1, E_2, iE_3) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{H}' := (E_1, E_2, -iH_3) \quad (2.22)$$

On remarque que les normes entre \mathbf{E} et \mathbf{E}' ainsi qu'entre \mathbf{H} et \mathbf{H}' restent inchangées. Après substitutions, on obtient le système d'équations équivalent suivant

$$\text{rot}_{i\beta} \mathbf{E}' = \mu\omega \mathbf{H}' \quad (2.23)$$

$$\text{rot}_{i\beta}^* \mathbf{H}' = \epsilon \omega \mathbf{E}' \quad (2.24)$$

Ce système a l'avantage d'être davantage symétrique en fonction des champs électrique et magnétique et de ϵ et μ . Cependant, on sait que dans une fibre optique, ϵ varie et μ est constant. Cette particularité n'est généralement pas utilisée lorsqu'on désire avoir une formulation selon le champ électrique. On supposera alors plus généralement que μ respecte les mêmes conditions que ϵ . Cependant, si on souhaite simuler le champ magnétique, alors cette asymétrie peut s'avérer utile.

2.1.3 Reformulation du problème de mode guidé

Si $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in L^2(\mathbb{R}^2)^6$ composent un mode guidé, alors on obtient de 2.17 et 2.18 (par la même méthode qu'au chapitre 1) que

$$\text{rot}_\beta(\text{rot}_\beta(\mathbf{E})) = k^2 n^2 \mathbf{E} \quad (2.25)$$

$$\text{rot}_\beta \left(\frac{1}{n^2} \text{rot}_\beta(\mathbf{H}) \right) = k^2 \mathbf{H} \quad (2.26)$$

On n'utilisera pas la formulation en \mathbf{E} donnée par 2.25, car, contrairement à 2.26, elle ne présente aucun avantage sur celles qui suivent, qu'on obtient à partir de 2.23 et 2.24

$$\frac{1}{\epsilon} \text{rot}_{i\beta}^* \left(\frac{1}{\mu} \text{rot}_{i\beta}(\mathbf{E}') \right) = \omega^2 \mathbf{E}' \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{\mu} \text{rot}_{i\beta} \left(\frac{1}{\epsilon} \text{rot}_{i\beta}^*(\mathbf{H}') \right) = \omega^2 \mathbf{H}' \quad (2.28)$$

où on rappelle que k et ω ainsi que ϵ et ϵ_r sont directement proportionnels ($k = \frac{\omega}{c}$ et $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$). On voit à nouveau la symétrie gagnée avec les changements de variables 2.21 et 2.22.

2.1.4 Formulation de $\beta(\omega)$ versus $\omega(\beta)$

Physiquement, la fréquence angulaire ω est généralement fixée et le nombre d'onde β en dépend. En fait, lorsqu'elle transfère d'un milieu à un autre (qui diffèrent selon leur indice de réfraction), la lumière garde sa fréquence angulaire mais sa constante de propagation varie. Cependant, d'un point de vue mathématique et numérique, le choix de la variable indépendante importe peu dans la description des courbes de dispersion.

Nous démontrerons plus tard que sous certaines conditions la courbe $\beta \mapsto \omega(\beta)$ (il peut y en avoir plusieurs dans le cas des fibres multimodes) est strictement croissante et continûment dérivable. En fait, il est même possible de montrer qu'elle est infiniment dérivable presque partout, ce qui nous permet de considérer rigoureusement la dérivée seconde et donc la dispersion chromatique. La fonction $\omega(\beta)$ est donc inversible et son inverse est infiniment dérivable presque partout. On peut alors considérer le calcul de la dispersion chromatique en considérant le problème de ω en fonction de β . Or, l'analyse mathématique de ce problème est beaucoup plus facile que le problème inverse.

Selon notre recherche littéraire, l'analyse spectrale du problème $\omega \mapsto \beta(\omega)$ avec guide d'ondes ouvert a été peu étudié par la communauté mathématique. Cela s'explique d'une part par le fait que ce problème spectral est caractérisé par un opérateur qui n'est ni à résolvante compacte dans le cas d'un guide d'onde fermé, ni auto-adjoint dans le cas d'un guide d'ondes ouvert. Mentionnons les résultats de [31] pour une étude approfondie dans le cas des guides d'ondes fermés. Pour une approche différente appliquant des techniques d'analyse complexe au cas des guides d'ondes ouverts, on réfère vers [19].

2.2 Analyse spectrale avec le champ magnétique

Il est recommandé de lire l'annexe avant d'aborder cette section. Notre objectif est d'abord de trouver dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^2)^3$ une forme $a : D(a) \times D(a) \rightarrow \mathbb{C}$ qui soit densément définie, hermitienne, coercive et fermée. On veut également que

$$a(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2) = \langle T(\mathbf{H}_1), \mathbf{H}_2 \rangle_{\mathcal{H}} \quad (2.29)$$

pour tout $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^3$, où

$$T(\mathbf{H}) = \text{rot}_{\beta} \left(\frac{1}{n^2} \text{rot}_{\beta}(\mathbf{H}) \right) \quad (2.30)$$

Par la proposition 2.9, on a que $\text{rot}_{\beta}^* = \text{rot}_{\beta}$ lorsque $\beta > 0$ et donc

$$\langle T(\mathbf{H}_1), \mathbf{H}_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{n^2} \text{rot}_{\beta}(\mathbf{H}_1) \cdot \overline{\text{rot}_{\beta}(\mathbf{H}_2)} dx \quad (2.31)$$

pour tout $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^3$. Le terme de droite s'avère à première vue une forme densément définie et hermitienne tout à fait convenable avec $H(\text{rot}_{\beta})$ comme domaine.

Si on considère les champs vectoriels de la forme $\mathbf{H} = \text{grad}_{\beta}(\phi)$ avec $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, alors on voit par 2.12 que cette forme n'est pas coercive. Une solution est d'ajouter un terme (on verra que cette forme est compatible avec les équations de Maxwell) à cette forme en considérant plutôt

$$a_{\beta}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{n^2} \text{rot}_{\beta}(\mathbf{H}_1) \cdot \overline{\text{rot}_{\beta}(\mathbf{H}_2)} dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{n_{\infty}} \text{div}_{\beta}(\mathbf{H}_1) \cdot \overline{\text{div}_{\beta}(\mathbf{H}_2)} dx \quad (2.32)$$

avec $D(a_{\beta}) = H^1(\Omega)$.

Ici, on suppose qu'il existe $n_{\infty} > 0$ et $R > 0$ (le rayon du coeur) tels que $n(x, y) = n_{\infty}$ pour tout $x^2 + y^2 > R^2$. Ensuite, on pose

$$n_+ := \sup_{\mathbb{R}^2} n(x, y) \quad (2.33)$$

$$n_- := \inf_{\mathbb{R}^2} n(x, y) \quad (2.34)$$

et rappelle que physiquement, on suppose que $0 < n_- < n_+ < \infty$. Avec ces hypothèses on peut maintenant démontrer le théorème suivant

Théorème 2.18. Soit $\beta > 0$. L'application sesquilinéaire définie en 2.32 est une forme densément définie, hermitienne, fermée, coercive et qui vérifie

$$a_\beta(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \leq \frac{1}{n_-^2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\text{grad}(\mathbf{H})|^2 + \beta^2 |\mathbf{H}|^2) dx \quad (2.35)$$

$$a_\beta(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \geq \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\text{grad}(\mathbf{H})|^2 + \beta^2 |\mathbf{H}|^2) dx \quad (2.36)$$

pour tout $\mathbf{H} \in H^1(\mathbb{R}^2)^3$.

Démonstration. L'application en 2.32 est évidemment hermitienne. Elle est densément définie car $H^1(\mathbb{R}^2)^3 \subset D(a_\beta)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^2)^3$. Les inégalités 2.35 et 2.36 sont obtenues en utilisant 2.15 après avoir remarqué que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_-^2}$ et $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n_+^2}$: La coercivité dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ est alors évidente car $\beta > 0$. De plus, si $\beta > 0$, alors la norme $\|\mathbf{H}\|_{a_\beta} := a_\beta(\mathbf{H}, \mathbf{H})^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à celle de $H^1(\mathbb{R}^2)^3$, qui est un espace de Hilbert. La forme a_β est donc fermée. \square

Étant donné ce dernier théorème et A.25, il existe un opérateur auto-adjoint et coercif S_{a_β} tel que $D(S_{a_\beta}) \subset D(a_\beta)$ et

$$a(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2) = \int_{\mathbb{R}^2} S_{a_\beta}(\mathbf{H}_1) \cdot \overline{\mathbf{H}_2} dx \quad \forall (\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2) \in D(S_{a_\beta}) \times D(a_\beta) \quad (2.37)$$

En particulier, en appliquant 2.9, on a pour tout $\mathbf{H} \in D(S_{a_\beta}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^3$

$$S_{a_\beta}(\mathbf{H}) = \text{rot}_\beta \left(\frac{1}{n^2} \text{rot}_\beta(\mathbf{H}) \right) - \frac{1}{n_\infty^2} \text{grad}_\beta(\text{div}_\beta(\mathbf{H})) \quad (2.38)$$

La proposition suivante confirme la compatibilité de cette formulation avec les équations de Maxwell. L'idée est d'utiliser la transformée de Fourier sur l'espace des distributions $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ (plus précisément sur le sous-espace des *distributions tempérées* (voir [27])).

Proposition 2.19. Soit $\mathbf{H} \in H^1(\mathbb{R}^2)^3$. Alors, au sens des distributions, on a que

$$\begin{cases} \text{rot}_\beta \left(\frac{1}{n^2} \text{rot}_\beta(\mathbf{H}) \right) = k_0^2 \mathbf{H} \\ \text{div}_\beta(\mathbf{H}) = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

si et seulement si

$$\text{rot}_\beta \left(\frac{1}{n^2} \text{rot}_\beta(\mathbf{H}) \right) - \frac{1}{n_\infty^2} \text{grad}_\beta(\text{div}_\beta(\mathbf{H})) = k_0^2 \mathbf{H} \quad (2.40)$$

Démonstration. L'implication de 2.39 vers 2.40 est évidente. Montrons l'implication en sens inverse. Appliquons div_β au sens des distributions de part et d'autres de 2.40. En appliquant l'identité 2.13 et en posant $\phi = \text{div}_\beta \mathbf{H} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on obtient que

$$-\frac{1}{n_\infty^2} \text{div}_\beta(\text{grad}_\beta(\phi)) = k_0^2 \phi \quad (2.41)$$

Par définition de div_β et $\operatorname{grad}_\beta$, on déduit que

$$-\frac{1}{n_\infty^2} \Delta \phi = \left(k_0^2 - \frac{\beta^2}{n_\infty^2} \right) \phi \quad (2.42)$$

où Δ est le laplacien usuel, au sens des distributions. Comme $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on peut prendre la transformée de Fourier au sens des distributions tempérées de part et d'autres et on calcule que

$$\frac{\xi^2}{n_\infty^2} \hat{\phi} = \left(k_0^2 - \frac{\beta^2}{n_\infty^2} \right) \hat{\phi} \quad (2.43)$$

En réarrangeant les constantes, on conclut que

$$(\xi^2 - (n_\infty^2 k_0^2 - \beta^2)) \hat{\phi} = 0 \quad (2.44)$$

Or, la solution à cette équation au sens des distributions tempérées est une combinaison linéaire de deltas de dirac de la forme

$$\hat{\phi} = A\delta(C - \xi) + B\delta(C + \xi) \quad (2.45)$$

où $C := n_\infty^2 k_0^2 - \beta^2$. Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, alors on aurait que $\phi \notin L^2(\mathbb{R}^2)$. On conclut donc que $\hat{\phi} = 0$ et $\operatorname{div}_\beta \mathbf{H} = \phi = 0$, ce qui complète la démonstration. \square

Par ce résultat, on a que toute solution $\mathbf{H} \in H^1(\mathbb{R}^2)^3$ de

$$\operatorname{rot}_\beta \left(\frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta(\mathbf{H}) \right) - \frac{1}{n_\infty^2} \operatorname{grad}_\beta(\operatorname{div}_\beta(\mathbf{H})) = k_0^2 \mathbf{H} \quad (2.46)$$

vérifie les équations de Maxwell (au sens des distributions).

2.2.1 Bornes sur les valeurs propres

Proposition 2.20. *Le spectre de S_{a_β} vérifie*

$$\sigma(S_{a_\beta}) \subset \left[\frac{\beta^2}{n_+^2}, \infty \right) \quad (2.47)$$

De plus, $\frac{\beta^2}{n_+^2}$ n'est jamais une valeur propre de S_{a_β} . Lorsqu'on reformule ceci en fonction des indices effectifs n_{eff} , ceci revient à

$$n_{\text{eff}} < n_+ \quad (2.48)$$

Démonstration. Selon l'inégalité 2.36, on a pour tout $\mathbf{H} \in D(S_{a_\beta})$ que

$$\left\langle S_{a_\beta}(\mathbf{H}), \mathbf{H} \right\rangle_{\mathcal{H}} = a_\beta(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \geq \frac{\beta^2}{n_\infty^2} \|\mathbf{H}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (2.49)$$

L'inclusion 2.47 suit par la proposition A.22. De plus, si $S_{a_\beta}(\mathbf{H}) = \frac{\beta^2}{n_+^2} \mathbf{H}$, alors en invoquant 2.36 de nouveau, on a

$$\frac{\beta^2}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{H}|^2 dx = \langle S_{a_\beta}(\mathbf{H}), \mathbf{H} \rangle_{\mathcal{H}} = a_\beta(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \geq \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\text{grad}(\mathbf{H})|^2 + \beta^2 |\mathbf{H}|^2) dx \quad (2.50)$$

En soustrayant par $\frac{\beta^2}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{H}|^2 dx$ des deux côtés, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\text{grad}(\mathbf{H})|^2 dx \leq 0 \quad (2.51)$$

ce qui implique que \mathbf{H} est constant presque partout (donc nul) et que \mathbf{H} ne peut pas être un vecteur propre associé à $\frac{\beta^2}{n_+^2}$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. \square

Nous ne montrerons pas le résultat suivant. Il utilise la régularité par morceaux de l'indice de réfraction.

Proposition 2.21. *Supposons que l'indice de réfraction n est régulier par morceaux, i.e. qu'il existe des ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_m \subset \mathbb{R}^2$ réguliers tels que*

$$\mathbb{R}^2 = \cup_{j=1}^m \overline{\Omega}_j \quad \text{et} \quad n^2|_{\overline{\Omega}_j} \in C^\infty(\Omega_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (2.52)$$

Alors les valeurs propres de S_{a_β} sont plus petites ou égales à β^2/n_∞^2 .

Démonstration. Voir [2]. \square

Le théorème suivant résume les propositions précédentes 2.20 et 2.21.

Théorème 2.22. *Si la condition de régularité 2.52 est vérifiée, alors une condition nécessaire pour l'existence d'une valeur propre dans $\sigma(S_{a_\beta})$ est que*

$$n_+ > n_\infty \quad (2.53)$$

Si 2.53 est vérifié, alors l'ensemble des valeurs propres est contenu dans l'intervalle $\left(\frac{\beta^2}{n_+^2}, \frac{\beta^2}{n_\infty^2}\right]$.

On supposera dans la suite de ce chapitre que les conditions 2.52 et 2.53 sont vérifiées.

2.2.2 Spectre essentiel des fibres optiques

Bien que ce sous-ensemble du spectre corresponde à un continuum de modes de radiation, la détermination de σ_{ess} reste néanmoins importante dans la recherche des modes guidés. En effet, ses valeurs interviennent dans l'application qui suivra du principe du min-max.

Or, le spectre essentiel de S_{d_β} est donné par le résultat suivant.

Théorème 2.23. *Pour tout $\beta > 0$, on a que*

$$\sigma_{\text{ess}}(S_{a_\beta}) = \left[\frac{\beta^2}{n_\infty^2}, \infty \right) \quad (2.54)$$

Démonstration. Voir [2]. □

Par la suite, on notera

$$\alpha_\beta := \frac{\beta^2}{n_\infty^2} \quad (2.55)$$

Le théorème 2.23 est d'une grande utilité. Jumelé au théorème 2.22, il dit que toutes les valeurs propres de S_{a_β} (à l'exception de possiblement α_β), sont isolées, de multiplicité finie et situées en dessous en α_β , qui est la borne inférieure du spectre essentiel.

2.2.3 Application du principe du min-max

On a toutes les conditions nécessaires pour appliquer le principe du min-max afin de caractériser ces valeurs propres. On note celles-ci (en tenant compte de la multiplicité)

$$\lambda_1(\beta) \leq \lambda_2(\beta) \leq \lambda_3(\beta) \leq \dots \quad (2.56)$$

On reprend ici la construction de la section A.2.4. Rappelons que si le nombre de valeurs propres est fini (on verra plus loin que c'est le cas), alors on note $\lambda_n = \alpha_\beta$ pour tout n à partir d'un certain N .

Il s'agit de fonctions de β bien définies qui, par le principe du min-max, peuvent être définies par les formules A.15 et A.16. En reprenant les notations de ce chapitre, on a

$$\lambda_k(\beta) = \sup_{M \in \mathcal{F}_{k-1}} \inf_{\substack{\mathbf{H} \in D(t_s), \|\mathbf{H}\|=1 \\ \mathbf{H} \perp M}} a_\beta(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \quad k \geq 1 \quad (2.57)$$

où \mathcal{F}_k est l'ensemble de tous sous-espaces $M \subset \mathcal{H}$ de dimension k . Énonçons quelques résultats utiles sur ces fonctions.

Proposition 2.24. *Soit deux profils d'indice réfraction n et n' tels que $n(x, y) \leq n'(x, y)$ presque partout. Alors les valeurs propres correspondantes vérifient $\lambda_k(\beta) \geq \lambda'_k(\beta)$.*

Démonstration. Comme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{(n')^2} |\text{rot}_\beta(\mathbf{H})|^2 + \frac{1}{n_\infty} |\text{div}_\beta(\mathbf{H})|^2 \right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{n^2} |\text{rot}_\beta(\mathbf{H})|^2 + \frac{1}{n_\infty} |\text{div}_\beta(\mathbf{H})|^2 \right) dx$$

le résultat suit par la caractérisation 2.57. □

Proposition 2.25. Les fonctions $\beta \mapsto \lambda_k(\beta)$ sont analytiques par morceaux et continues pour tout $\beta > 0$. De plus, elles sont strictement croissantes si

$$\frac{n_+}{n_\infty} < x_0 \approx 1.32472 \quad \text{et} \quad \frac{n_-}{n_\infty} > \left(\frac{1}{1+x_0} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 0.83620 \quad (2.58)$$

où x_0 est l'unique racine réelle du polynôme $x^3 - x - 1$.

Démonstration. Voir [2]. □

La proposition 2.25 nous dit que si l'indice de réfraction dans le coeur est suffisamment près de l'indice dans la gaine, alors on est assuré que les courbes de dispersion seront inversibles. Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire.

Or, les fibres de As_2S_3 (celles qui nous intéressent) ne vérifient pas la condition 2.58, en raison de la grande différence d'indice de réfraction entre ces verres et les trous d'air. Il faut cependant se rappeler que les verres de chalcogénures constituent un milieu dispersif, i.e. que l'indice de réfraction varie en fonction de la longueur d'onde. Dans la plage de longueurs d'ondes qui nous intéresse, l'indice de réfraction diminue significativement lorsque la longueur d'onde λ augmente² Sans entrer dans les détails, nos simulations suggèrent que cette dispersion du matériau nous assure en pratique de l'inversibilité des courbes de dispersion.

2.2.4 Théorème d'existence de valeurs propres

La condition suivante est suffisante pour s'assurer l'existence de valeurs propres et sera utile afin de justifier la modification de l'indice de réfraction à l'extérieur du pont et du coeur.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{n_\infty^2} - \frac{1}{n^2} \right) dx \geq 0 \quad (2.59)$$

Théorème 2.26. Si l'inéquation 2.59 est respectée, alors $\lambda_1(\beta) \leq \lambda_2(\beta) < \alpha_\beta$ pour tout $\beta > 0$. Autrement dit, pour tout $\beta > 0$, le spectre discret contient au moins deux valeurs propres (en tenant compte d'une possible multiplicité double).

Démonstration. Voir [2]. □

Ce théorème dit donc qu'on peut obtenir à la fois l'unicité de la valeur propre et de la multiplicité pour un quelconque $\beta > 0$. On obtient des résultats intéressants lorsqu'on tient compte de la condition supplémentaire suivante

$$n(x, y) \geq n_\infty \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^2 \quad (2.60)$$

2. La prudence est de mise ici, car selon la formule de Sellmeier, l'indice de réfraction est une fonction de la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, qui est inversement proportionnel à $k = \sqrt{\lambda_n(\beta)}$ où $k^2 = \lambda_n(\beta)$.

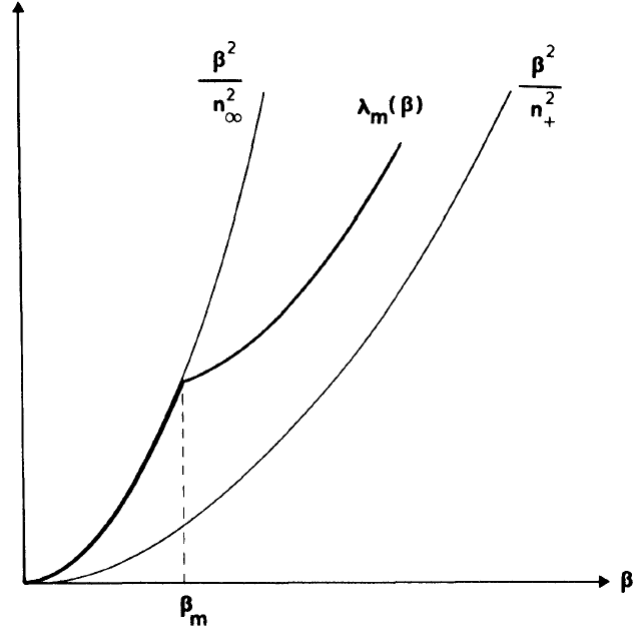


FIGURE 2.1 – Visualisation de la m^e valeur de coupure (figure tirée de [2])

Le résultat qui suit nous dit que toute fibre devient multi-mode pour une valeur de $\beta > 0$ suffisamment grande.

Théorème 2.27. *Supposons que les conditions 2.58, 2.59 et 2.60 soient respectées. Alors, il existe une suite $(\beta_m)_{m=1}^\infty$ qui tend vers l'infini, telle que $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots$ et qui vérifie (voir la figure 2.1)*

$$\begin{cases} \lambda_m(\beta) = \frac{\beta^2}{n_\infty^2} & \text{si } \beta \in (0, \beta_m] \\ \lambda_m(\beta) < \frac{\beta^2}{n_\infty^2} & \text{si } \beta \in (\beta_m, \infty) \end{cases} \quad (2.61)$$

pour chaque $m \geq 1$. Les nombres β_m sont appelés les valeurs de coupures.

Démonstration. Voir [2]. □

Corollaire. *Si les conditions 2.58, 2.59 et 2.60 sont vérifiées, alors pour toute longueur d'onde, il existe un nombre fini plus grand ou égal à deux (en tenant compte de la multiplicité) de modes guidés pour lesquels les indices effectifs sont strictement compris entre $\frac{\beta^2}{n_+^2}$ et $\frac{\beta^2}{n_\infty^2}$.*

Démonstration. Voir [2]. □

2.3 Généralisation au cas tensoriel

On généralise ici au cas tensoriel, car il s'agit généralement du problème résolu dans le logiciel de simulation numérique Comsol Multiphysics. Notons cependant que la nature tensoriel de la formulation ne sera pas exploitée dans nos modèles.

On suppose que l'indice de réfraction tensoriel a la forme

$$\epsilon_T = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \mu_T = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

où chacun de ces coefficients dépend généralement de de la position (x, y) . On notera également

$$\epsilon_{\perp} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} \quad \mu_{\perp} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla_{\perp} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Étant donné $\omega > 0$, ce problème revient alors à trouver (β, \mathbf{E}) tels que

$$\begin{cases} \beta > 0, & \mathbf{E} = (\mathbf{E}^t, E^l) \neq \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} P\nabla_{\perp} \frac{1}{\mu_{zz}} \nabla_{\perp} \cdot P - \beta^2 P \mu_{\perp}^{-1} P & -i\beta P \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp} \\ -i\beta \nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P & \nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^t \\ E_z \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} \mathbf{E}^t \\ \epsilon_{zz} E_z \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.65)$$

La proposition suivante établit l'équivalence entre le problème 2.65 et celui pour lequel on a énoncé les résultats d'existence. On obtient donc les mêmes relations de dispersion.

Proposition 2.28. *Supposons que le milieu est un diélectrique isotrope, i.e. que $\epsilon_T = \epsilon I$ et $\mu_T = \mu_0 I$, où I est la matrice identité 3×3 et $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive. Alors (β, \mathbf{E}) satisfait 2.65 si et seulement si*

$$\text{rot}_{-\beta}(\text{rot}_{-\beta}(\mathbf{E})) = \omega^2 \mu_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (2.66)$$

Démonstration. Simplifions d'abord la matrice de 2.65. Comme $\mu_T = \mu_0 I$ et $PP = -I$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P\nabla_{\perp} \frac{1}{\mu_{zz}} \nabla_{\perp} \cdot P - \beta^2 P \mu_{\perp}^{-1} P & -i\beta P \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp} \\ -i\beta \nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P & \nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} P\nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot P - \beta^2 PP & -i\beta PP \nabla_{\perp} \\ -i\beta \nabla_{\perp} \cdot PP & \nabla_{\perp} \cdot PP \nabla_{\perp} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} P\nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot P + \beta^2 I & i\beta \nabla_{\perp} \\ i\beta \nabla_{\perp} \cdot I & -\nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si on multiplie cette matrice par \mathbf{E} , alors on obtient le champ vectoriel

$$\frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} (P\nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot P) \mathbf{E}^t + \beta^2 \mathbf{E}^t + i\beta \nabla_{\perp} E_z \\ i\beta \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}^t - \nabla_{\perp} \cdot (\nabla_{\perp} E_z) \end{pmatrix}$$

On développe alors

$$(P\nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

Ceci nous permet de simplifier davantage pour obtenir que le système 2.65 est équivalent à

$$-\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} + \beta^2 E_x + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} = \omega^2 \mu_0 \epsilon E_x \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \beta^2 E_y + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} = \omega^2 \mu_0 \epsilon E_y \quad (2.68)$$

$$i\beta \frac{\partial E_x}{\partial x} + i\beta \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \omega^2 \mu_0 \epsilon E_z \quad (2.69)$$

Pour conclure, on n'a qu'à développer le $\text{rot}_{-\beta}(\text{rot}_{-\beta}(\mathbf{E}))$ dans 2.66. En utilisant 2.14, on obtient

$$\begin{aligned} \text{rot}_{-\beta}(\text{rot}_{-\beta}(\mathbf{E})) &= \text{grad}_{-\beta}^*(\text{grad}_{-\beta}(\mathbf{\Lambda})) - \text{div}_{-\beta}^*(\text{div}_{-\beta}\mathbf{\Lambda}) \\ &= -\text{div}_{-\beta}(\text{grad}_{-\beta}(\mathbf{\Lambda})) + \text{grad}_{-\beta}(\text{div}_{-\beta}\mathbf{\Lambda}) \\ &= -\text{div}_{-\beta} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & i\beta E_z \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & i\beta E_z \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & i\beta E_z \end{pmatrix} + \text{grad}_{-\beta} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + i\beta E_z \right) \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \beta^2 E_x \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \beta^2 E_y \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \beta^2 E_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ i\beta \frac{\partial E_x}{\partial x} + i\beta \frac{\partial E_y}{\partial y} - \beta^2 E_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \beta^2 E_x + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \beta^2 E_y + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \beta^2 E_z + i\beta \frac{\partial E_x}{\partial x} + i\beta \frac{\partial E_y}{\partial y} - \beta^2 E_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \beta^2 E_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \beta^2 E_y + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial x} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + i\beta \frac{\partial E_x}{\partial x} + i\beta \frac{\partial E_y}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On conclut en comparant ce champ vectoriel avec les termes à gauche des équations 2.67, 2.68 et 2.69. Ils sont identiques. \square

On remarque que nous avons utilisé $\text{rot}_{-\beta}(\text{rot}_{-\beta}(\mathbf{E}))$ avec un signe négatif devant β . Cette équation est physiquement équivalente, car cela revient à supposer que le champ électrique tridimensionnel est de la forme $\mathbf{E}(x, y)e^{i(-\omega t + \beta z)}$ au lieu de $\mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)}$ comme nous l'avons fait précédemment. La différence est purement mathématique.

Afin d'obtenir un problème ayant β comme valeurs propres généralisées, il est convenable de faire le changement de variable $\tilde{E}_z := \beta E_z$. Le système 2.65 devient

$$\begin{aligned} (P\nabla_{\perp} \frac{1}{\mu_{zz}} \nabla_{\perp} \cdot P) \mathbf{E}^t - (\beta^2 P \mu_{\perp}^{-1} P) \mathbf{E}^t - (i\beta P \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp}) \frac{1}{\beta} \tilde{E}_z &= \omega^2 \epsilon_{\perp} \mathbf{E}^t \\ -(i\beta \nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P) \mathbf{E}^t + (\nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp}) \frac{1}{\beta} \tilde{E}_z &= \omega^2 \epsilon_{zz} \frac{1}{\beta} \tilde{E}_z \end{aligned}$$

En multipliant la deuxième équation par β , en simplifiant et en réarrangeant les termes, on obtient le système équivalent

$$\begin{aligned} (P\nabla_{\perp} \frac{1}{\mu_{zz}} \nabla_{\perp} \cdot P) \mathbf{E}^t - \omega^2 \epsilon_{\perp} \mathbf{E}^t - (iP \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp}) \tilde{E}_z &= \beta^2 (P \mu_{\perp}^{-1} P) \mathbf{E}^t \\ (\nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp}) \tilde{E}_z - \omega^2 \epsilon_{zz} \tilde{E}_z &= \beta^2 (i \nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P) \mathbf{E}^t \end{aligned}$$

ce qui peut être réécrit

$$A \mathbf{E} = \beta^2 B \mathbf{E} \quad (2.70)$$

où on note généralement

$$A := \begin{pmatrix} P\nabla_{\perp} \frac{1}{\mu_{zz}} \nabla_{\perp} \cdot P - \omega^2 \epsilon_{\perp} & -(iP \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp}) \\ 0 & \nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P \nabla_{\perp} - \omega^2 \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

$$B := \begin{pmatrix} P \mu_{\perp}^{-1} P & 0 \\ i \nabla_{\perp} \cdot P \mu_{\perp}^{-1} P & 0 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

On remarquera que ces matrices ne dépendent pas de β . Le système 2.70 est donc la preuve qu'une reformulation mathématique du problème de dispersion avec β en fonction ω est possible.

Chapitre 3

Simulation par éléments finis de fibres à coeur suspendu

Si les prévisions données par les modèles numériques diffèrent des mesures faites en laboratoires, le coût associé à leur exécution sur un ordinateur reste néanmoins une fraction du coût associé à une fabrication en laboratoire. Le cas des fibres optiques ne fait pas exception à cet égard. Dans ce chapitre, nous étudierons le modèle linéaire de modes guidés avec indice de réfraction complexe ainsi que ses nombreuses variantes numériques. Nos principaux outils de travail seront le logiciel de simulations par éléments finis Comsol Multiphysics pour créer les modèles et le logiciel de calculs numériques Matlab pour l'analyse des résultats.

D'abord, on comparera les différents modèles numériques construits et on discutera des différentes hypothèses qui les sous-tendent. Ensuite, on présentera les résultats sous forme de prédictions sur les valeurs de dispersion et de pertes.

3.1 Modélisation numérique de la dispersion

Lorsqu'on désire prédire la dispersion chromatique d'une fibre optique avec Comsol Multiphysics, plusieurs choix s'offrent au numéricien. Si certaines variantes peuvent simplifier les simulations, certaines hypothèses doivent cependant être vérifiées afin de garder une erreur d'approximation raisonnable sur la dispersion calculée. Avant de discuter des résultats numériques, introduisons chacune de ces variantes.

3.1.1 Simplification du cas vectoriel au cas scalaire

Rappelons que toute onde électromagnétique se propageant dans un matériau diélectrique linéaire se comporte selon l'équation des ondes suivante (dite de Maxwell, i.e. avec le double rotationnel).

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{E})) = -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Or, on vérifie facilement l'identité vectorielle $\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{E})) = \text{grad}(\text{div}(\mathbf{E})) - \Delta\mathbf{E}$, ce qui permet de reformuler 3.1

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \text{grad}(\text{div}(\mathbf{E})) \quad (3.2)$$

Le lecteur se rappelant les équations de Maxwell serait alors tenté d'annuler le dernier terme en utilisant l'équation de Gauss pour le champ électrique, qui dit que

$$\text{div}(\mathbf{D}) = 0$$

où \mathbf{D} est étroitement relié à \mathbf{E} par une relation de proportionnalité $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ où la constante a une dépendance spatiale. Ainsi, lorsque l'indice de réfraction $n(x, y, z) = \sqrt{\epsilon(x, y, z)/\epsilon_0}$ est presque constant, l'omission du dernier terme dans 3.2 est justifiée. Après substitution de $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)}$ dans 3.2, on obtient

$$\Delta\mathbf{E} = \beta^2\mathbf{E} - n^2\omega^2\mathbf{E} \quad (3.3)$$

Selon [33], dans ce contexte, la composante longitudinale (en z) est généralement nulle et les composantes transversales sont découplées. Ceci nous permet donc de considérer le champ électrique E comme étant un scalaire. Malheureusement, l'indice de réfraction varie grandement dans une fibre à coeur suspendue et l'approximation ne tient plus, ce qui sera d'ailleurs vérifié dans nos simulations.

3.1.2 Utilisation d'une couche absorbante parfaitement adaptée (PML)

Au chapitre précédent, nous avons discuté d'un point de vue mathématique de la différence entre les guides d'ondes ouverts et fermés. D'un point de vue plus numérique, il est bien sûr impossible de représenter explicitement en mémoire un maillage recouvrant \mathbb{R}^2 . La solution à ce problème est alors d'utiliser une couche absorbante parfaitement adaptée (qu'on appellera plus concisément PML, de l'anglais "perfectly matched layer").

Physiquement, il s'agit ici de recouvrir la fibre d'un anneau (voir figure 3.1) qui ne reflète pas l'onde électromagnétique (i.e. qui l'absorbe sans réflexion). Mathématiquement, sans en donner explicitement la construction, cela se traduit par un changement de coordonnées vers le plan complexe (voir [3]). Ce changement de coordonnées vers \mathbb{C} a comme conséquence qu'on obtient alors des indices effectifs à valeurs complexes, malgré le fait que l'indice de réfraction demeure à valeur réels.

Comme nous le verrons numériquement en modifiant l'indice de réfraction à l'extérieur du coeur, il est possible d'utiliser une condition limite de conducteur parfait et d'obtenir malgré tout une excellente approximation des courbes de dispersion. Ceci s'explique selon nous par la décroissance exponentielle du champ électrique à l'extérieur du coeur. Les conditions limites auraient donc peu d'impact sur les valeurs des indices effectifs qui nous intéressent. On réfère vers [17] pour plus de détails à ce sujet.

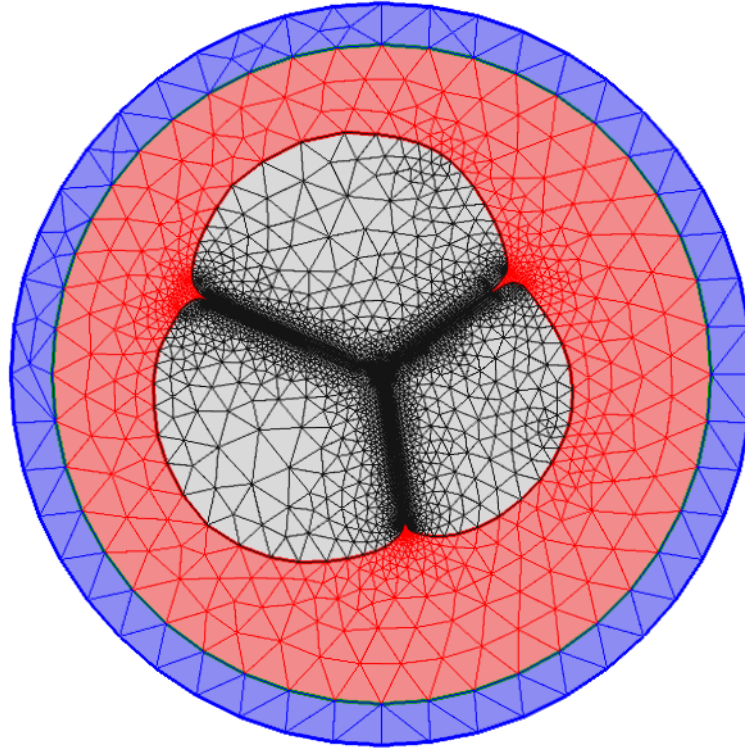


FIGURE 3.1 – Le PML est l’anneau mauve recouvrant la fibre optique. La région grise correspond aux trous d’air et la section rouge correspond au verre. Notons que le coeur et les ponts (qui sont faits de verre) ne sont pas distinguables sur cette figure en raison du maillage.

3.1.3 D’une fibre à coeur suspendu vers une fibre à saut d’indices

L’étude des conditions d’existence des valeurs propres dans le spectre des opérateurs de fibres optiques nous a amené à reconsidérer la distribution de l’indice de réfraction pour les fibres à coeur suspendu. D’une part, nous avons déterminé numériquement que l’indice de réfraction à l’extérieur du coeur et des ponts n’avait que très peu d’impact sur les indices et la dispersion chromatique. D’autre part, les conditions d’existence mentionnent bien que l’indice de réfraction devrait être plus grand dans le coeur que dans la gaine d’une fibre (on rappelle la distribution réelle de l’indice à la figure 3.2). Rien ne nous empêche de simuler une fibre dont $n=1$ partout sauf dans les ponts et le coeur (bien qu’une telle fibre ne puisse bien sûr pas être reproduite en laboratoire). Comme nous verrons dans la prochaine sous-section, cette modification accélère grandement les calculs tout en donnant une excellente approximation.

3.1.4 Discussion des résultats numériques sur la dispersion

Nous reviendrons plus loin sur l’impact des paramètres géométriques sur la dispersion. Pour l’instant, comparons les variantes numériques présentées ci-dessus à l’aide des résultats (les

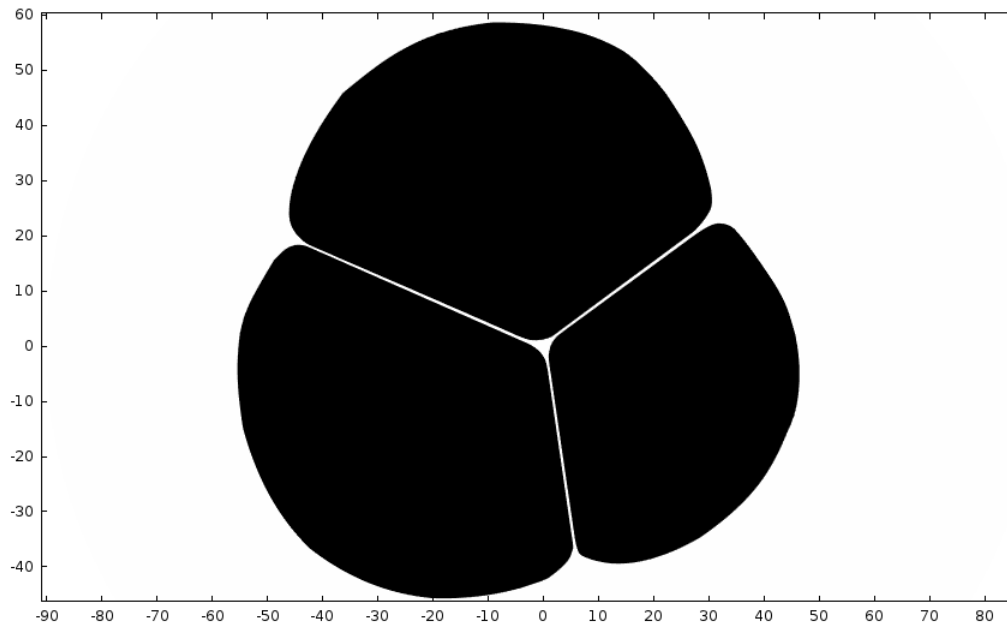


FIGURE 3.2 – Distribution de l'indice de réfraction d'une fibre à coeur suspendu faite de As_2S_3 à une longueur d'onde de $2.1 \mu m$. L'indice associé à la partie en blanc est donné par la formule de Sellmeier ($n \approx 2.4$). Les trois trous en noirs sont remplis d'air ($n \approx 1$).

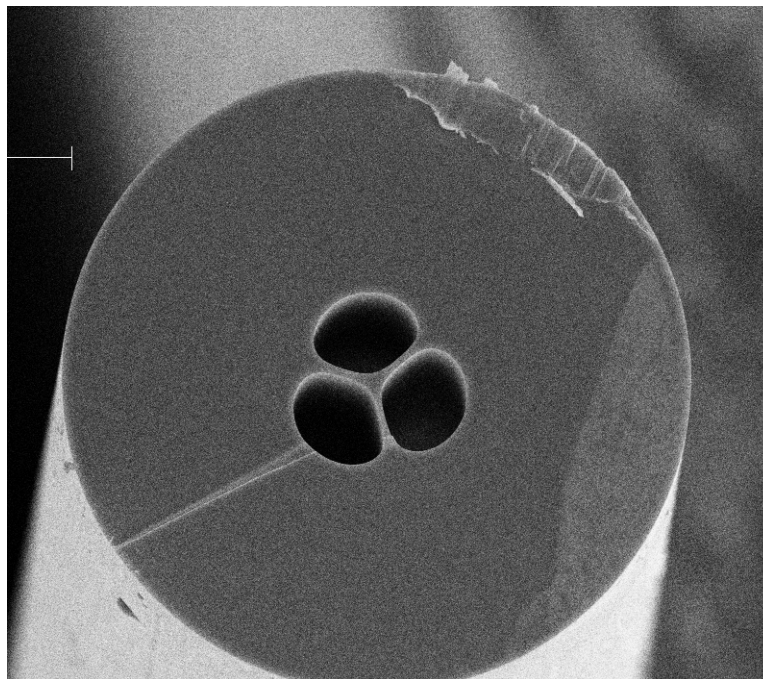


FIGURE 3.3 – Photo d'une fibre à coeur suspendu (Source : [1]).

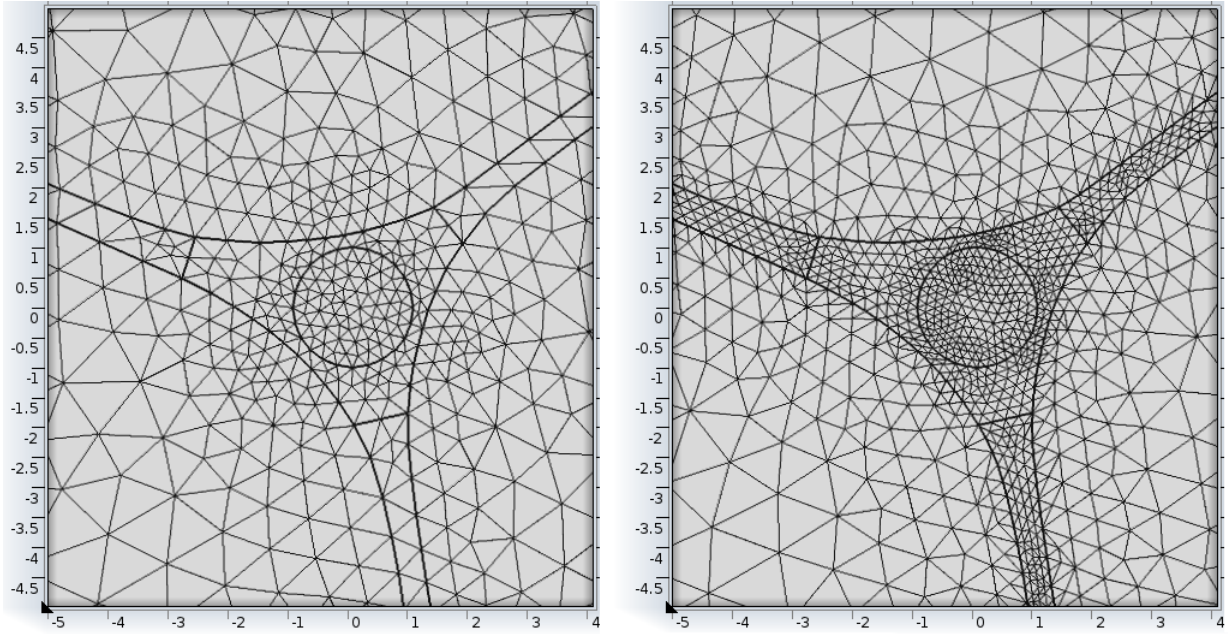


FIGURE 3.4 – Maillages 1 et 2 utilisés pour le calcul de la dispersion chromatique. On présente le coeur car la finesse du maillage loin du coeur a très peu d’impact sur les indices effectifs et la dispersion.

figures 3.6 et 3.5) sur la dispersion obtenus dans Comsol Multiphysics avec la géométrie illustrée en 3.2.

On remarque d’abord que les deux courbes des indices effectifs et de la dispersion chromatique des modèles vectoriels (en vert pâle et vert foncé) ne sont pas distinguables l’une de l’autre. Le plus grand écart (i.e. le maximum de la valeur absolue pris sur l’ensemble des longueurs d’onde) est d’à peine $2.70615 \cdot 10^{-5} \mu\text{m}$ et $0.193217 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm})$ pour les indices effectifs et la dispersion chromatique respectivement.

Rappelons que la dispersion chromatique est obtenue à partir des indices effectifs en utilisant une formule de différence finie approximant la dérivée seconde (on a vu au chapitre précédent que $n_{\text{eff}}(\lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \beta \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)$ est analytique par morceaux) dans l’expression de la dispersion chromatique :

$$-\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_{\text{eff}}}{d\lambda^2} \quad (3.4)$$

On pourrait s’intéresser aux effets de dispersion du troisième et du quatrième ordre en considérant les dérivée d’ordre supérieurs, mais leur impact est habituellement négligeable.

Le but premier des simulations bidimensionnelles est de trouver les longueurs d’ondes pour lesquelles la dispersion chromatique est nulle (on n’a pas nécessairement existence ni unicité). Or, on constate la différence notable entre les zéros de dispersion du cas vectoriel versus

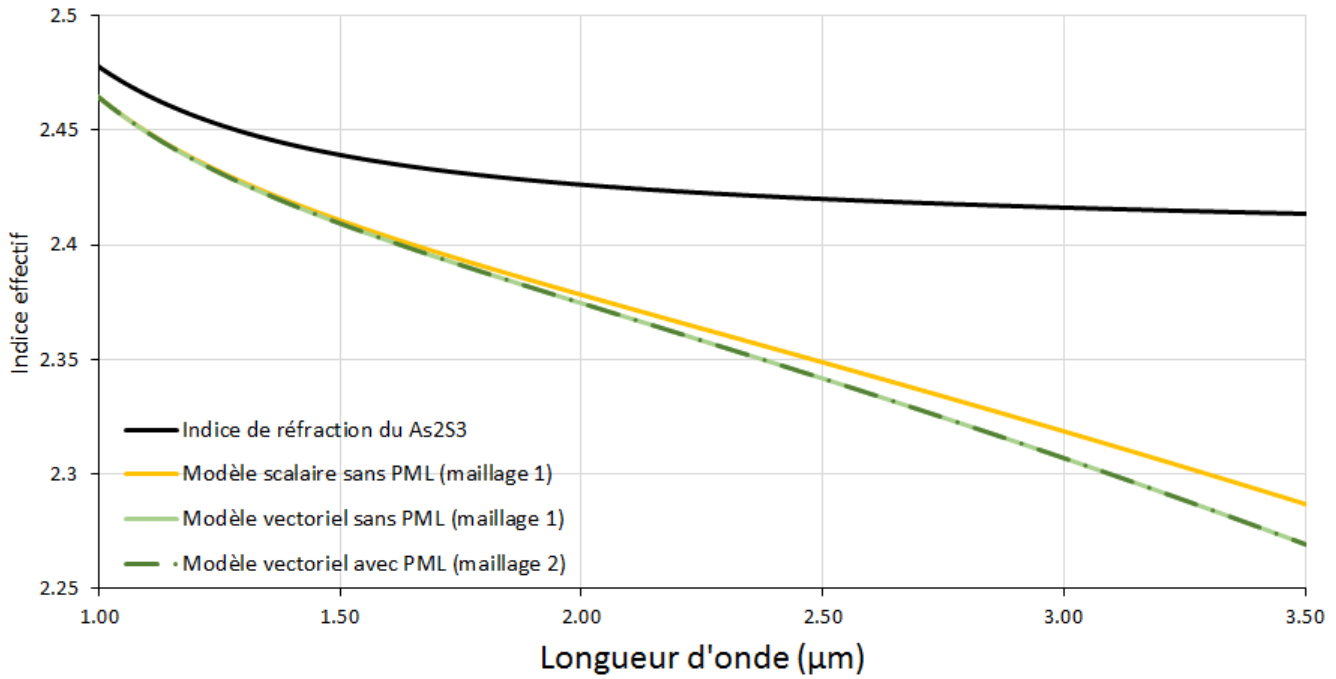


FIGURE 3.5 – Comparaison des indices effectifs obtenus avec les modèles vectoriel et scalaire d’une fibre optique à coeur suspendu

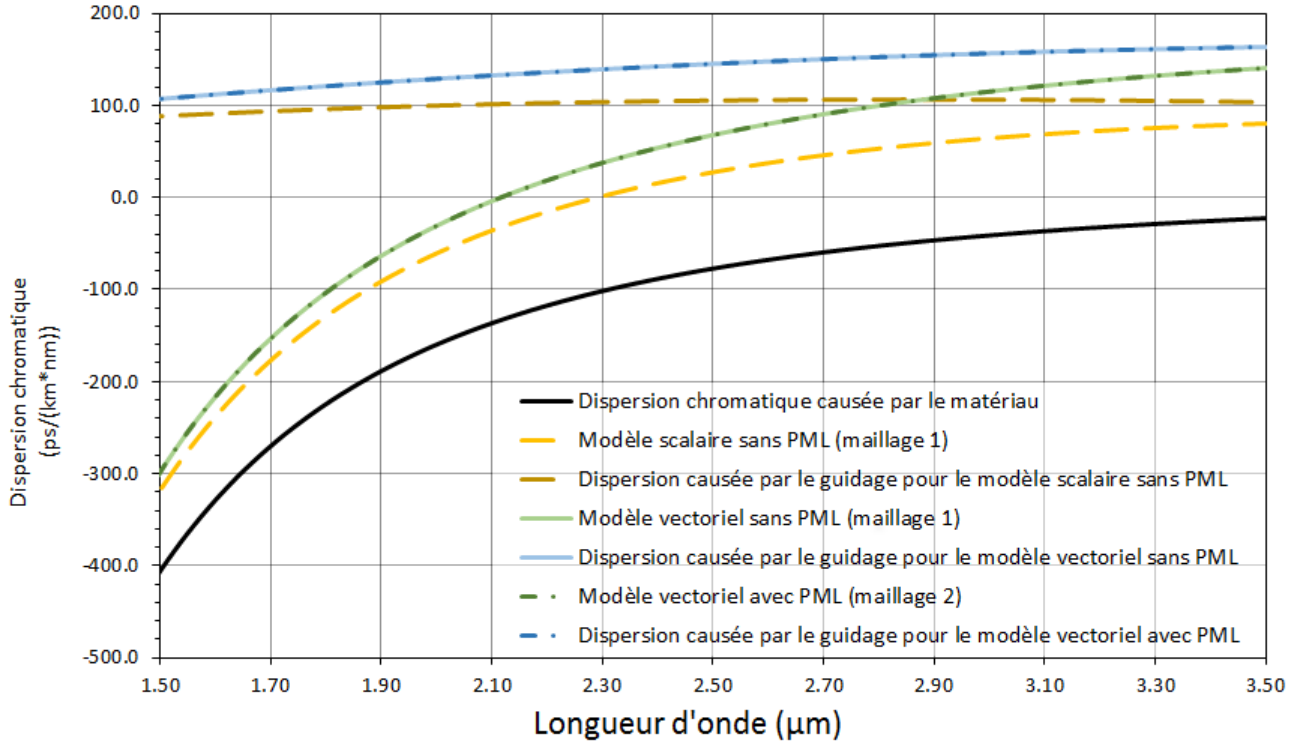


FIGURE 3.6 – Comparaison de la dispersion chromatique obtenue avec les modèles vectoriel et scalaire d’une fibre optique à coeur suspendu

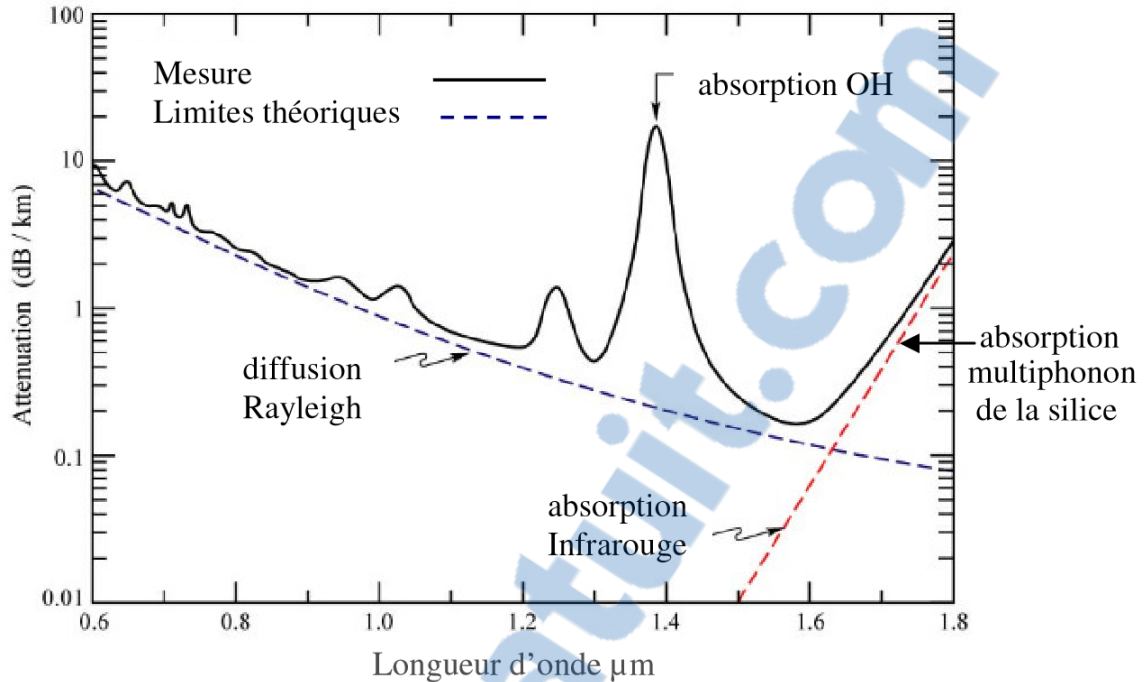


FIGURE 3.7 – Spectre d’atténuation d’une fibre optique à saut d’indice faite de silice (image tirée de [1]). μm

le cas scalaire. Ceci justifie la complexité supplémentaire apportée par l’utilisation du double rotationnel.

3.2 Modèles numériques des pertes

Le développement de modèles numériques pour une meilleure compréhension et prévision des pertes (en particulier celles causées par les impuretés OH^-) était un des objectifs de ce mémoire.

D’un point de vue pratique, le problème de l’atténuation des impulsions lumineuses dans les fibres optiques a longtemps freiné leur utilisation à large échelle dans les réseaux de télécommunications. Des techniques de purification ont donc été développées au fil des années afin de réduire l’atténuation aux valeurs qu’on connaît aujourd’hui, soit d’environ 0.2 dB/km à 1.55 μm (voir [20]) dans les fibres de silice. Cette longueur d’ondes est d’ailleurs généralement choisie pour transmettre les signaux en raison des faibles pertes engendrées, qui varient fortement en fonction de la fréquence angulaire ω .

D’un point de vue théorique, il est impossible de traiter mathématiquement le problème de mode guidé avec un indice de réfraction complexe qui modéliserait l’absorption intrinsèque du matériau et celle des impuretés. En fait, par définition, un mode guidé doit être vu mathématiquement comme ne décrivant aucune perte car sa constante de propagation β est

réelle.

Cependant, d'un point de vue numérique, il est possible de simuler par éléments finis un guide d'ondes d'ondes avec des pertes, (voir [20] pour une description numérique du modèle). Sans donner expliciter la formulation du problème aux valeurs propres, cette façon de faire permet de modéliser les pertes causées par une conductivité non-nulle ($n^2(\omega) = \epsilon_r(\omega) - i\frac{\sigma}{\omega}$) en résolvant $\beta \in \mathbb{C}$ en fonction de $\omega \in \mathbb{R}$. Dans Comsol Multiphysics, il nous est possible de même généraliser en tenant compte d'une dépendance quelconque envers ω de la partie imaginaire de l'indice de réfraction complexe (voir [11]).

Ces possibilités se sont cependant avérées peu fructueuses d'un point de vue prédictif. Rappelons que pour une onde plane de longueur d'onde λ traversant un matériau décrit par un indice de réfraction complexe $n_c = n - i\kappa$, le coefficient d'atténuation α est donné par la relation

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\kappa \quad (3.5)$$

Or, cette relation donne une très bonne approximation des résultats obtenus dans Comsol Multiphysics avec une fibre optique microstructurée à ponts suspendus. Nous reviendrons empiriquement sur cette approximation à la section 3.4.

3.2.1 Modéliser chaque source de pertes séparément

Nous nous sommes intéressés à la modélisation des impuretés dans une perspective de prédiction et de compréhension des mécanismes de pertes. Nous nous sommes cependant limités à une modélisation au niveau macroscopique du phénomène d'atténuation, évitant ainsi toute considération quantique. Or, particulièrement à propos des pertes causées par les impuretés, la littérature est relativement faible au niveau macroscopique.

Notons les travaux décrits dans [9], où on reprend le modèle de Lorentz afin d'étudier l'effet des impuretés OH sur les modes polarisés linéairement d'une fibre monomode à saut d'indice. Plus récemment, on note les travaux de [32], où on modélise dynamiquement l'interaction entre les impuretés et les impulsions lumineuses en utilisant le modèle non-linéaire de Schrödinger.

Nos travaux ont principalement consisté à recenser les formules mathématiques décrivant chacune des sources de pertes, qui sont illustrées à la figure 3.7 pour une fibre de silice. Il s'agit de résultats classiques établis par des démarches d'approximation physique. Parmi ces formules mentionnons les plus significatives dans le proche infrarouge :

$$\alpha_I(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\sigma_i^2 + (\lambda^{-1} - \lambda_i^{-1})^2} \quad \text{Absorption des impuretés}$$

$$\alpha_R(\lambda) = \frac{A}{\lambda^4} \quad \text{Diffusion Rayleigh}$$

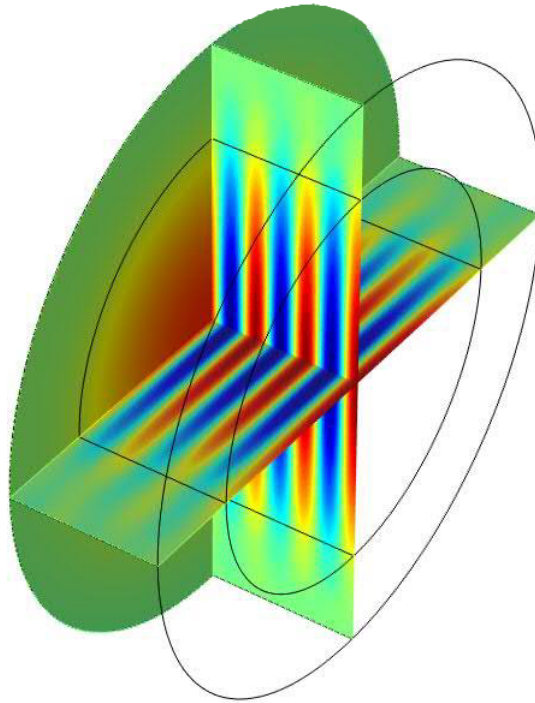


FIGURE 3.8 – Mode guidé tridimensionnel décrivant l'oscillation de la composante en x du champ électrique.

$$\alpha_U(\lambda) = B_1 \exp\left(\frac{B_2}{\lambda}\right) \quad \text{"Urbach tail"}$$

$$\alpha_M(\lambda) = C_1 \exp\left(\frac{C_2}{\lambda}\right) \quad \text{Absorption multiphonon}$$

où $\lambda > 0$ est bien sûr la longueur d'onde dans le vide et toutes les autres constantes dépendent du matériau. Rappelons l'importance des longueurs d'ondes λ_i de résonance.

3.2.2 Simulation bidimensionnelle versus tridimensionnelle

Bien que la simulation bidimensionnelle d'une fibre optique en régime harmonique nous donne des informations importantes sur l'évolution d'une impulsion en temps et en espace (i.e. selon l'axe longitudinal à la propagation) via une superposition de modes, il serait néanmoins intéressant de résoudre directement l'équation des ondes en considérant une dépendance quelconque en (x, y, z, t) du champ électrique. Cela permettrait entre autres la simulation de l'interaction entre les impulsions lumineuses et les impuretés. Ces impuretés indésirables sont une cause importante de diffusion des impulsions lumineuses, particulièrement aux fréquences de résonance de ces molécules.

Dans Comsol Multiphysics, nous nous sommes inspirés d'un modèle de guide d'ondes planaire afin de simuler en régime harmonique une fibre optique à saut d'indice. Cependant,

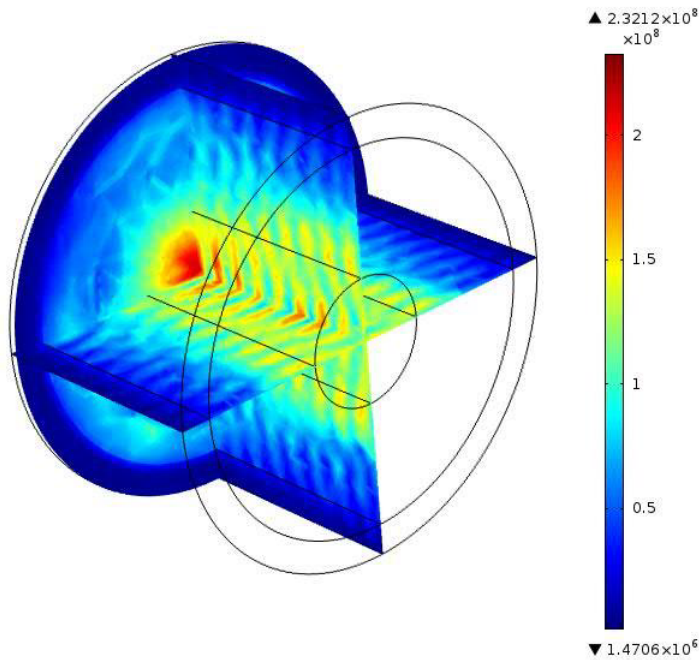


FIGURE 3.9 – Mode guidé tridimensionnel décrivant la norme du champ électrique. Cette figure illustre la nécessité d’avoir un maillage tridimensionnel très fin pour obtenir une solution physique.

ce modèle nous apparaît peu utile dans la modélisation des impuretés, car il reproduit essentiellement les résultats du modèle bidimensionnel. Nous illustrons aux figures 3.8 et 3.9 des exemples de simulations tridimensionnelles avec des fibres à saut d’indices. De tels calculs sont impossibles à réaliser sur un ordinateur personnel, en raison de la mémoire vive nécessaire (plus de 100 GB). De plus, en raison du temps de calcul, il est en pratique impossible de mesurer les pertes avec précision à partir d’un tel modèle

3.3 Influence des impuretés sur le champ électrique

Une partie de nos travaux a consisté à explorer les possibilités de modéliser l’effet des impuretés en les incluant explicitement dans la géométrie de la fibre. Un des problèmes fut d’abord de déterminer l’indice de réfraction de telles impuretés. On voit l’importance de ce point en examinant le champ électrique du modèle bidimensionnel aux figures 3.10 et 3.11. Le problème ici est que le modèle ne voit que l’indice de réfraction, i.e. que les impuretés peuvent être vu comme un verre d’indice de réfraction plus ou moins élevé. Cela fait en sorte que le mode se concentre dans les impuretés, comme à la figure 3.11, ce qui ne nous apparaissait pas justifiable physiquement.

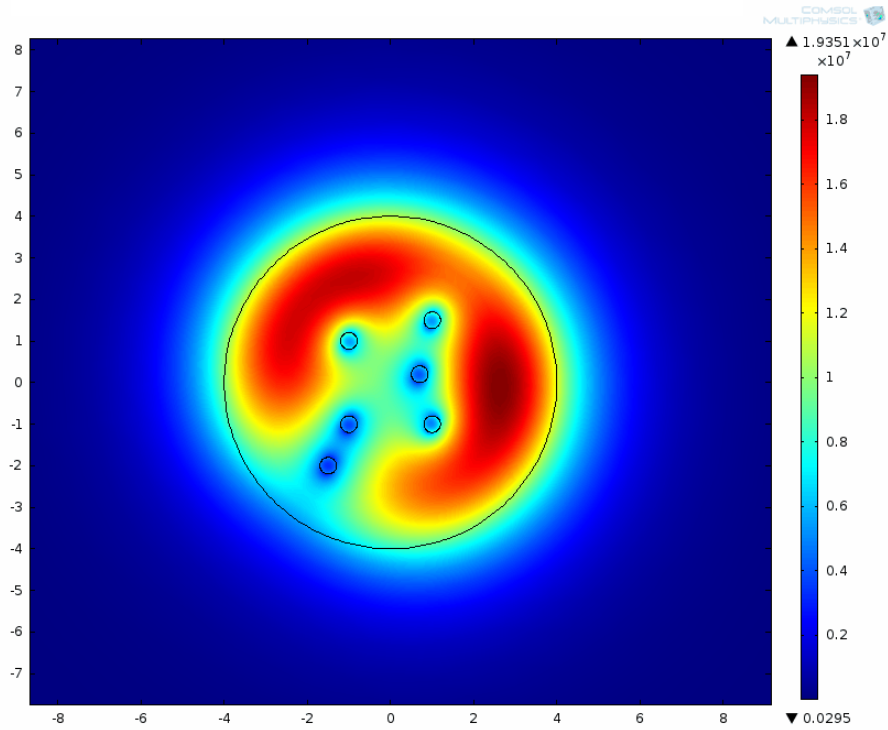


FIGURE 3.10 – Fibre à saut d'indice de silice ($n \approx 1.45$) avec six impuretés de forme circulaire et d'indice de réfraction $n = 1$

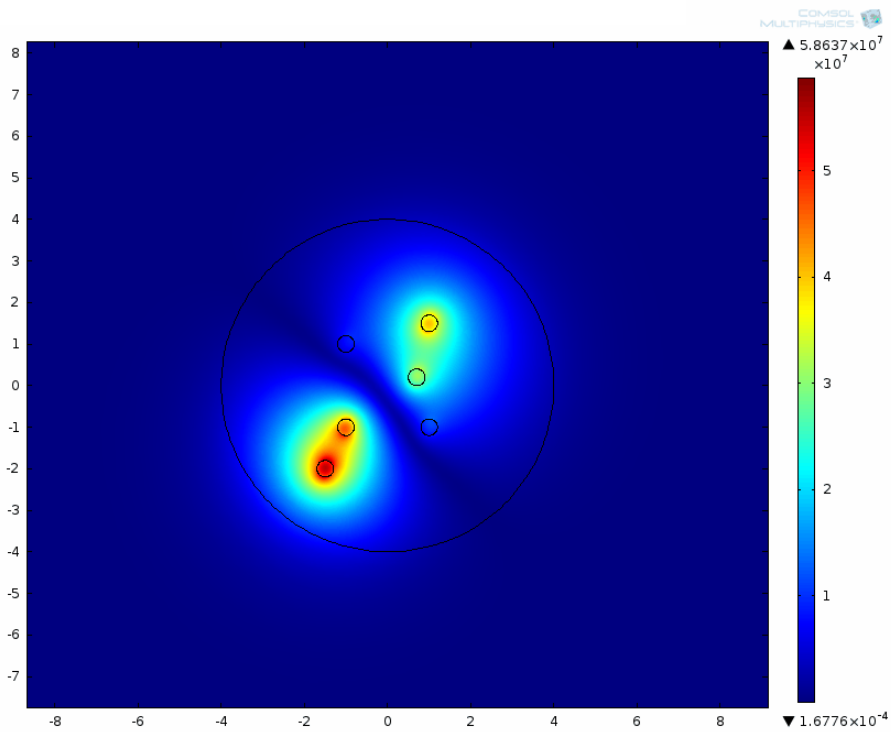


FIGURE 3.11 – Fibre à saut d'indice de silice ($n \approx 1.45$) avec six impuretés de forme circulaire et d'indice de réfraction $n = 1.59$

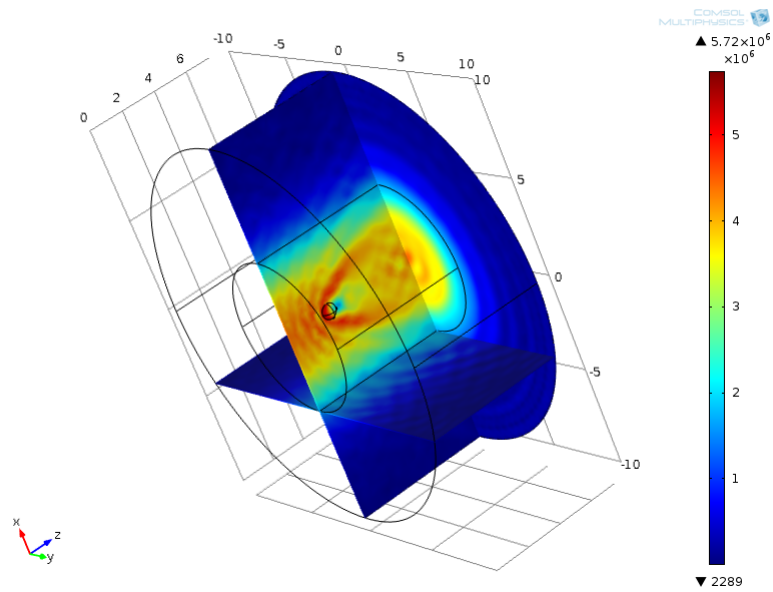


FIGURE 3.12 – Modèle 3D avec impureté sphérique au centre du coeur.

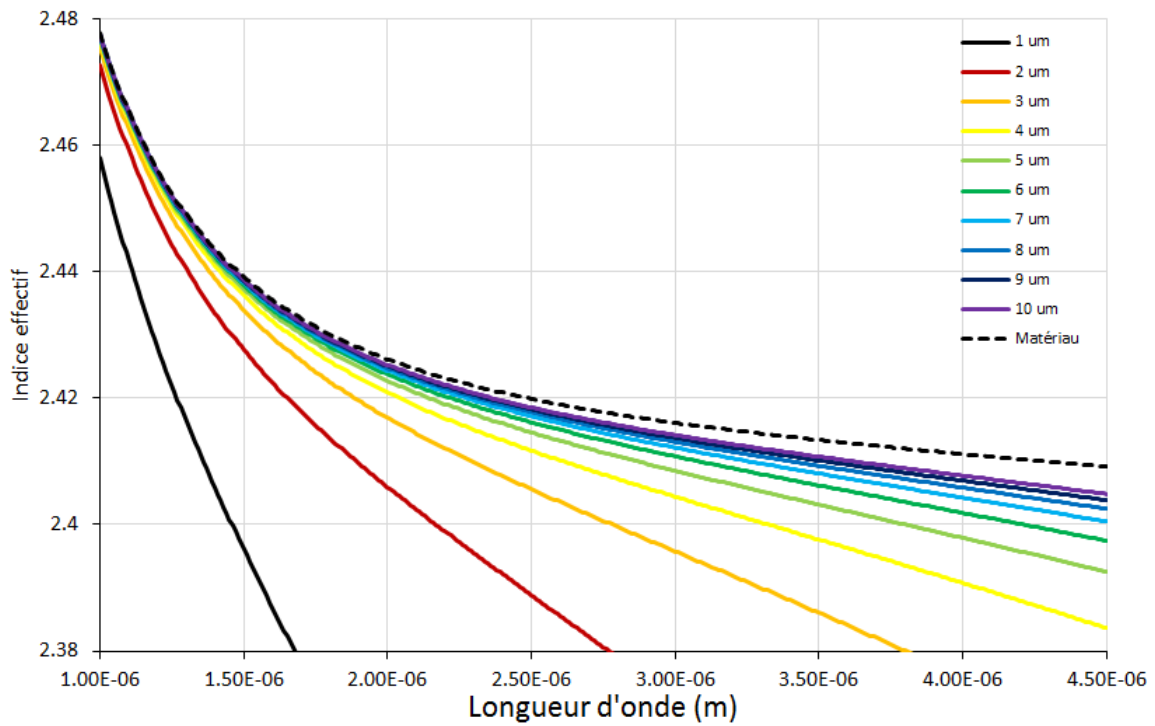


FIGURE 3.13 – Courbes des indices effectifs selon le rayon du coeur (de 1 micron à 10 microns).

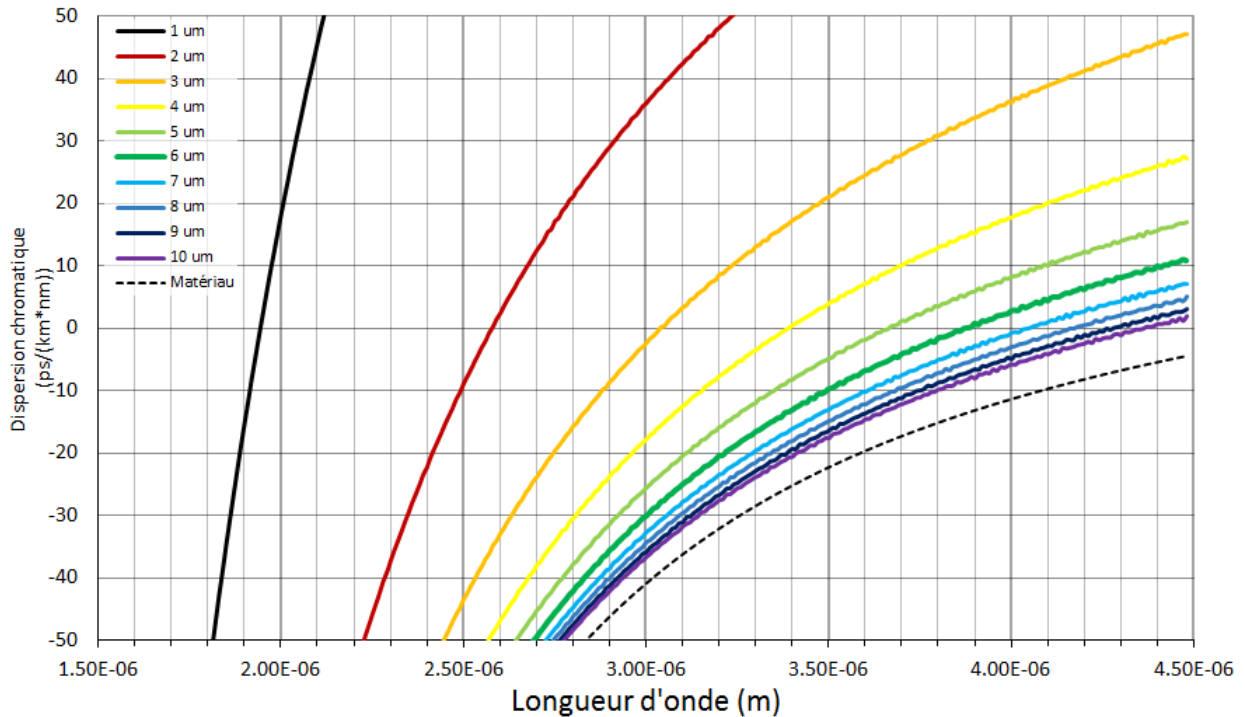


FIGURE 3.14 – Courbes de dispersion chromatique selon le rayon du coeur (de 1 micron à 10 microns)

3.4 Influence des paramètres géométriques

Nous avons créé une géométrie paramétrisée nous permettant d'étudier l'influence des caractéristiques géométriques des fibres à coeur suspendu dans le but de prédire avec précision la dispersion chromatique. L'objectif était de découvrir une géométrie de fibre à coeur suspendue telle que le zéro de dispersion se situe autour de $1.55 \mu\text{m}$.

La figure 3.13 nous permet de visualiser les indices effectifs. Agrandir le coeur a l'effet que le mode se comporte de plus en plus comme une onde plane, car la courbe se rapproche de la courbe d'un milieu homogène (voir section 1.4).

La figure 3.14 nous permet de visualiser les zéros de dispersion obtenus. On voit bien que le zéro de dispersion diminue lorsqu'on considère des coeurs de plus en plus petits. Malheureusement, un coeur de $1 \mu\text{m}$ n'est pas réalisable en pratique. Notons aussi que la même observation pour les indices effectifs s'applique à la figure 3.14 sur l'effet de l'agrandissement du coeur.

3.5 Utilisation du logiciel Comsol Multiphysics 4.3b

Pour conclure, donnons un tutoriel complet montrant comment construire un modèle de fibre optique microstructurée dans Comsol Multiphysics 4.3b. Si on se restreint aux modèles décrits dans ce mémoire, il s'agit de suivre les étapes suivantes :

1. Créer le modèle
 - a) Choisir la dimension de la géométrie :2 ou 3 coordonnées
 - b) Choisir une physique, i.e. le modèle à résoudre
 - c) Choisir une étude, i.e. le plan de résolution du modèle
2. Configurer le modèle
 - a) Créer une liste de paramètres physiques et numériques
 - b) Créer la géométrie et le maillage
 - c) Déterminer les conditions limites : PML, conducteur parfait ou Dirichlet
 - d) Spécifier la distribution de l'indice de réfraction complexe $n_c = n - i\kappa$
 - e) Choisir une ou plusieurs fréquences $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$
 - f) Donner un nombre autour duquel on cherche les indices effectifs $n_{\text{eff}} = \frac{c\beta}{\omega}$
3. Lancer la résolution du modèle
4. Visualiser les résultats

Reprenons chacune de ces étapes en détails

3.5.1 Création du modèle

Il s'agit ici d'utiliser le "Model wizard" afin d'obtenir un modèle pré-configuré selon nos besoins. On commence par choisir la dimension du modèle (3.15). Pour l'étude de la dispersion et des modes, on choisira un modèle bidimensionnel, mais un modèle tridimensionnel est également possible pour modéliser une fibre optique.

Ensuite, on choisit la physique (figure 3.16). Dans notre cas, trois choix pertinents se présentent à l'utilisateur :

1. "Electromagnetic Waves, Beam Envelopes (ewbe)" : il s'agit de la physique utilisée pour modéliser efficacement en temps de calcul une fibre optique tridimensionnelle.
2. "Electromagnetic Waves, Frequency Domain (ewfd)" : c'est la physique idéale pour le calcul des indices effectifs en deux dimensions, i.e. la version vectorielle du modèle de modes.
3. "Coefficient Form PDE" : cette physique permet la création d'une version scalaire du modèle de modes dans les fibres optiques avec conditions limites de Dirichlet (aucun PML implémenté dans ce cas).

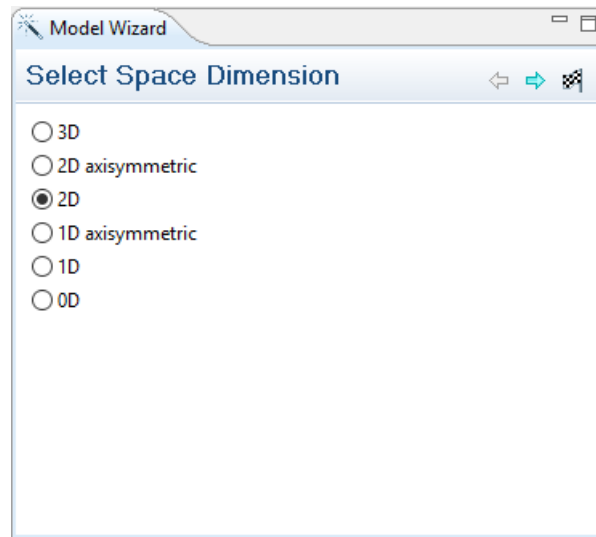


FIGURE 3.15 – Choix de la dimension (nombre de coordonnées) de la géométrie dans Comsol.

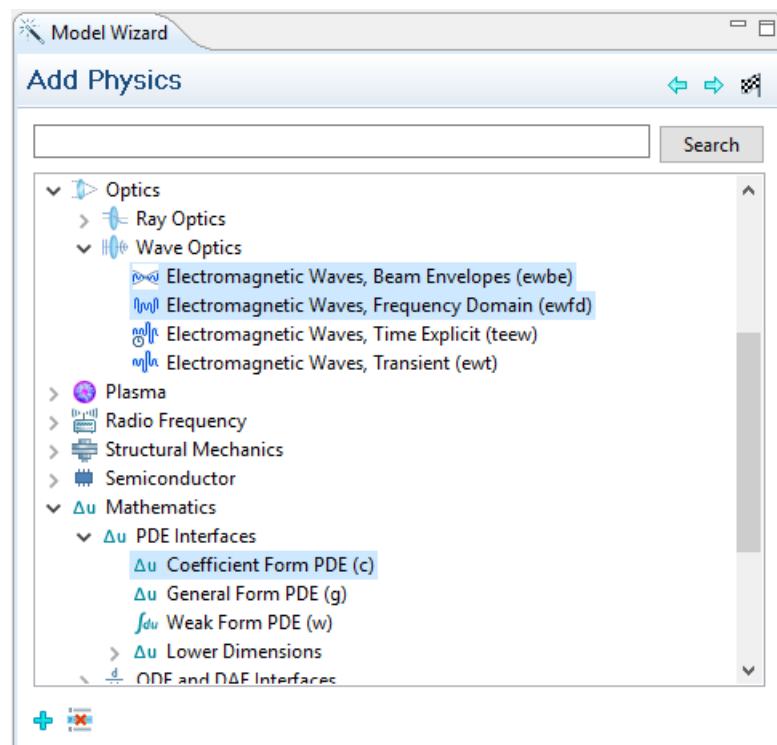


FIGURE 3.16 – Choix de la physique. Trois choix pertinents se présentent pour modéliser des fibres optiques (tels que sélectionnés en bleu).

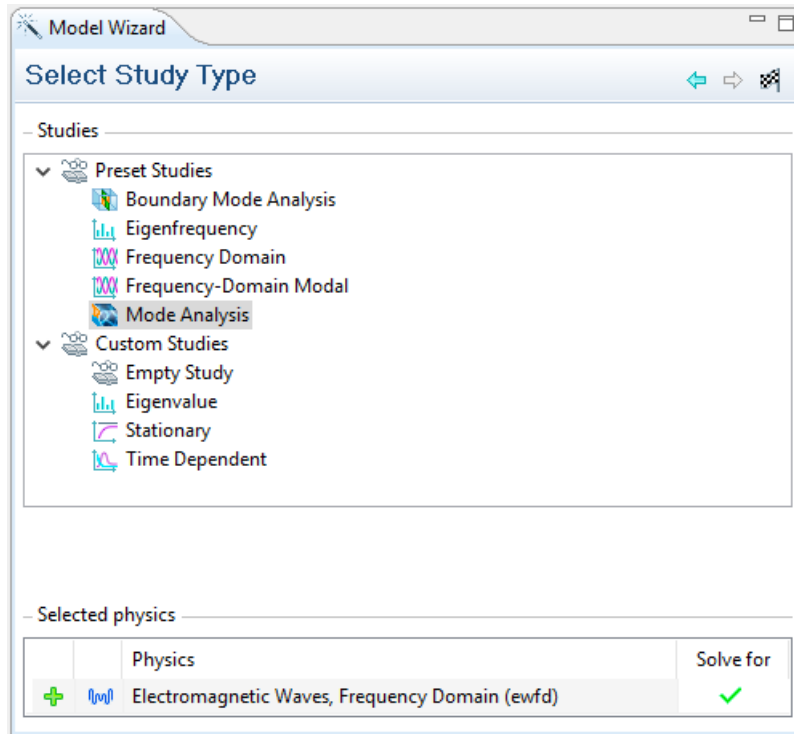


FIGURE 3.17 – Choix de l'étude dans Comsol. Trois choix pertinents se présentent : "Boundary Mode Analysis", "Mode Analysis" et "Eigenvalue".

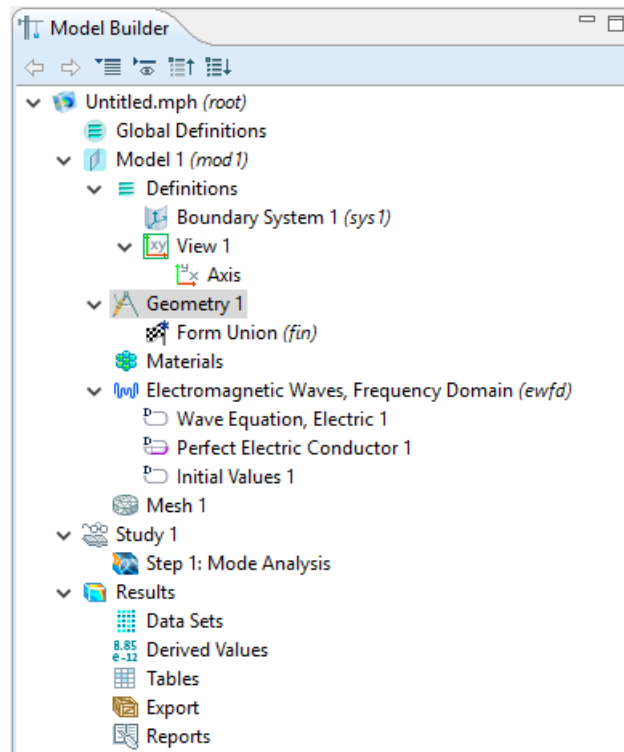


FIGURE 3.18 – Arbre présentant les différentes composantes à configurer du modèle.

Name	Expression	Value	Description
tBridges	0.500000[um]	5.0000E-7 m	Thickness of bridges
lBridges	4.7000000e+00...	4.7000E-5 m	Length of bridges
rHoles	7.100000000e+...	7.1000E-5 m	Hole dimensions
rGlass	80[um]	8.0000E-5 m	Fiber radius
dCore	rCore*2	8.0000E-6 m	Core diameter
wl	1.98[um]	1.9800E-6 m	Free-space wavelenth
rCore	4[um]	4.0000E-6 m	Core radius
tPML	10[um]	1.0000E-5 m	
nGlass	2.42649276938...	2.4265	
nHoles	1	1.0000	
kappaGlass	0	0	
kappaHoles	0	0	
modesAround	2.42154014e+00	2.4215	
maxElemSizeGlass	4[um]	4.0000E-6 m	
minElemSizeGlass	0.2[um]	2.0000E-7 m	
maxElemSizePML	1.5[um]	1.5000E-6 m	

FIGURE 3.19 – Exemple de liste de paramètres pertinents pour un modèle de fibre optique avec trois trous.

Enfin, on choisit l'étude (figure 3.17). Ici encore, selon la physique choisie précédemment, trois choix pertinents se présentent à l'utilisateur :

1. "Boundary Mode Analysis" : Si l'utilisateur a choisi le modèle tridimensionnel et la physique "Beam Envelopes (ewbe)". Cette étude consiste à faire une analyse modale aux deux extrémités de la fibre et ensuite résoudre l'équation vectorielle des ondes à l'intérieur.
2. "Mode Analysis" : Si l'utilisateur a choisi le modèle bidimensionnel et la physique "Electromagnetic Waves, Frequency Domain (ewfd)". Il s'agit de résoudre la version vectorielle du modèle de β en fonction de ω .
3. "Eigenvalue" : Si l'utilisateur a choisi le modèle bidimensionnel et la physique "Coefficient Form PDE". On résoud ici la version scalaire et l'utilisateur spécifie les équations et paramètres par lui-même.

Une fois ces choix réalisés, on peut finaliser la création en cliquant sur le drapeau blanc et noir situés en haut à droite de l'onglet.

3.5.2 Configuration du modèle vectoriel dans le cas bidimensionnel

Abordons maintenant la configuration du modèle, qui est au coeur du travail de modélisation dans Comsol Multiphysics.

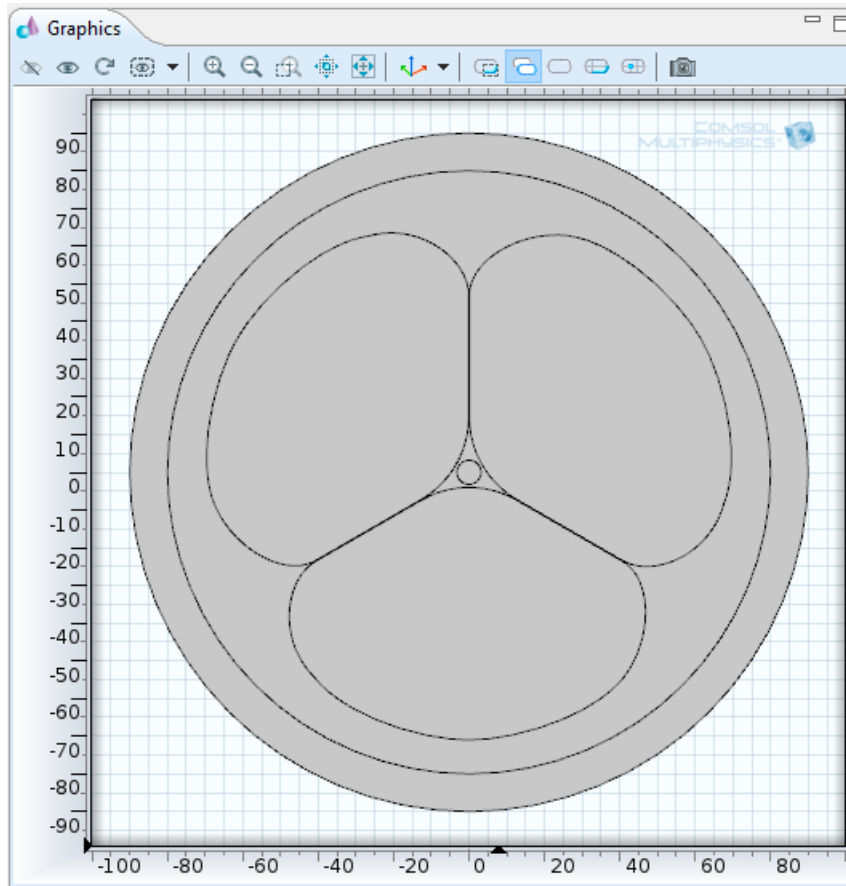


FIGURE 3.20 – Géométrie d'une fibre à coeur suspendu à trois trous construite avec des cercles, des droites, des courbes de Bézier, etc.

D'abord, il est convenable de commencer en créant une liste des paramètres physiques et numériques pertinents dans la section "Global Definitions" du modèle (voir figure 3.18). Un exemple de liste pour une fibre avec géométrie paramétrisée est présenté en 3.19. On remarque les paramètres géométriques ainsi que les indices de réfraction des matériaux.

Ensuite, on crée la géométrie qui correspond au domaine Ω . Nous n'entrerons pas dans les détails à ce niveau, mais mentionnons que différentes formes utiles se présentent à l'utilisateur : cercles, droites, courbes de Bézier, etc. Un exemple de géométrie construite à partir de ces outils est illustrée en 3.20.

Une fois la géométrie construite, on construit un maillage sur celle-ci. Notons que chaque région de la géométrie est naturellement décomposée en domaines par le logiciel. On spécifie une finesse appropriée pour chaque domaine, en spécifiant en particulier la taille maximale et la taille minimale des éléments (voir figure 3.21). Une particularité des simulations de fibres optiques est qu'on sait dès le départ où le maillage doit être fin. Il s'agit bien entendu de la région du coeur.

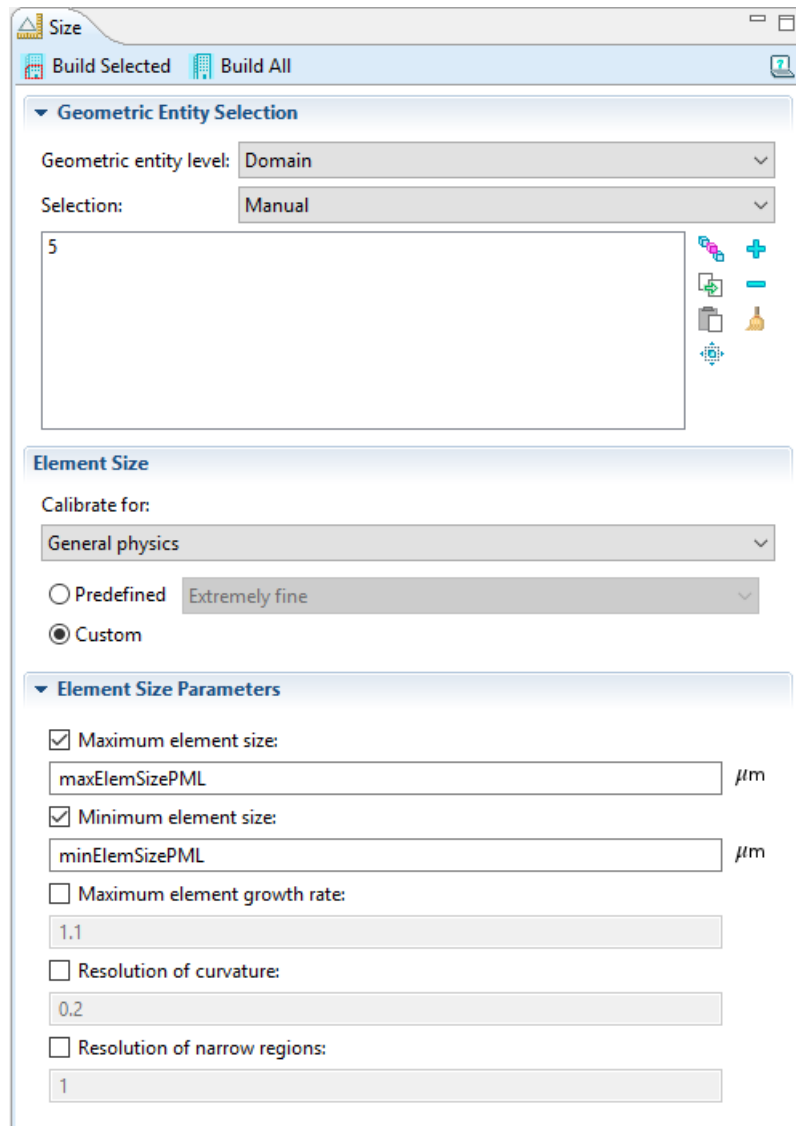


FIGURE 3.21 – Création d'un maillage. Les deux paramètres les plus utiles sont "Maximum element size" et "Minimum element size". On note l'utilisation des paramètres tels que définis dans la figure 3.19

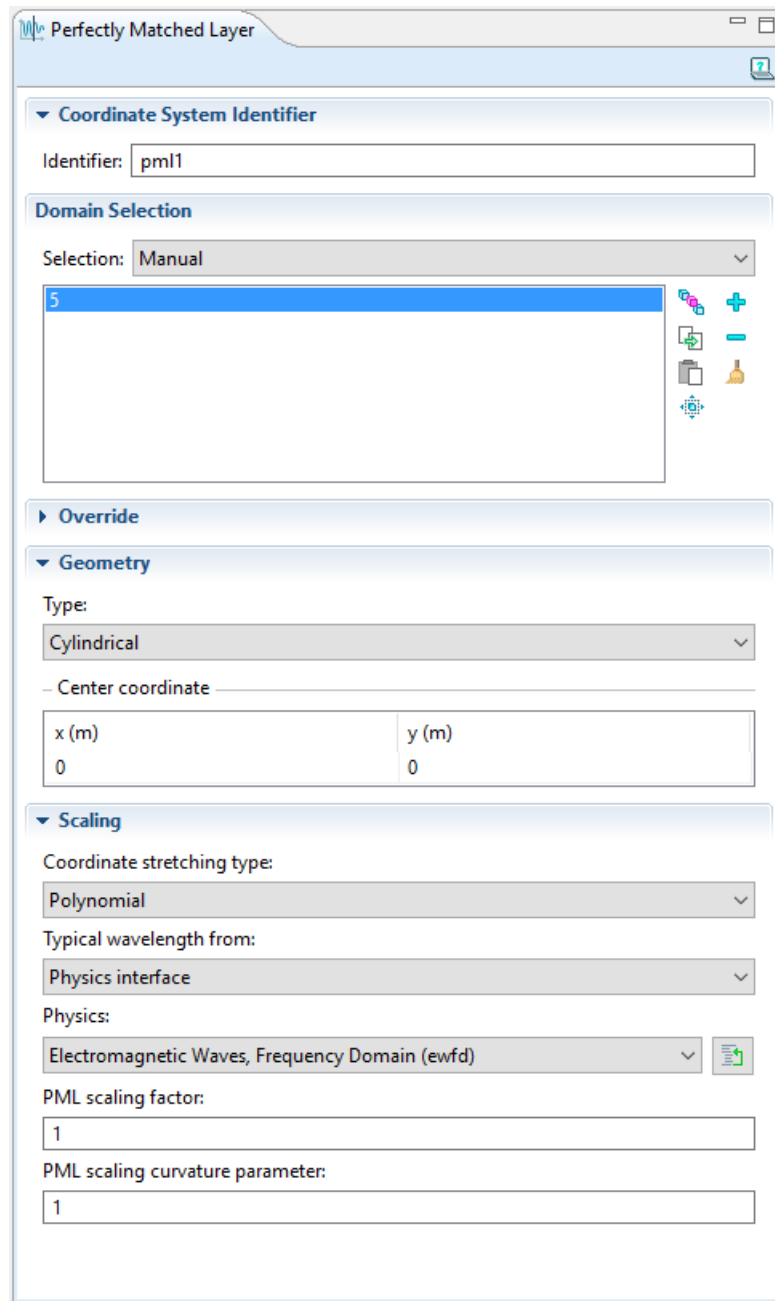


FIGURE 3.22 – Configuration du PML. L'important ici est de spécifier la région correspondant à la géométrie du PML (cylindrique ici) dans la boîte de dialogue "Type" pour assurer de ne pas avoir d'erreurs à l'exécution.

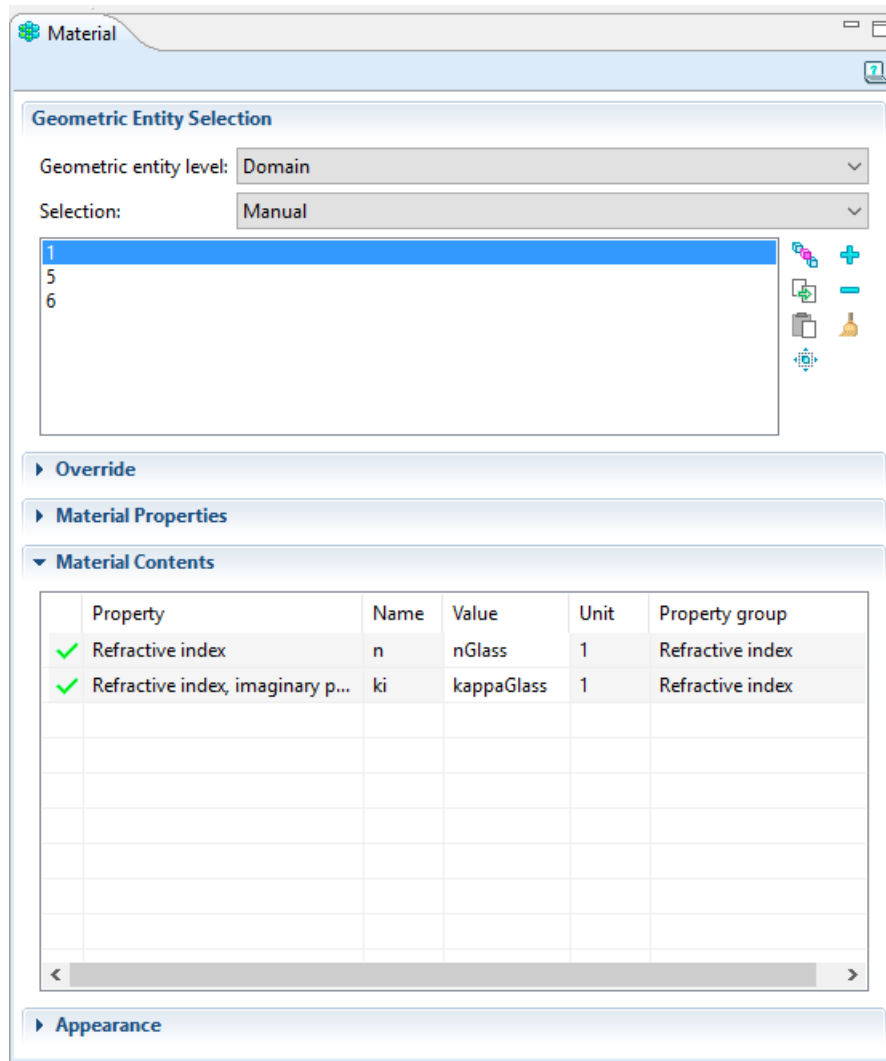


FIGURE 3.23 – Choix de l'indice de réfraction. Il est approprié d'utiliser les paramètres définis dans la liste plus tôt.

Par la suite, on détermine les conditions limites. Si l'utilisateur décide d'utiliser un PML, il doit l'ajouter dans la section "Définitions" du modèle (voir figure 3.18). Dans ce cas, la seule modification à apporter à 3.22 est de modifier le type de géométrie du PML, qui est cartésien par défaut. Ici, le PML est assigné à un anneau entourant la fibre : le type "Cylindrical" convient donc. Si l'utilisateur choisit plutôt une condition limite de conducteur parfait, alors aucune modification n'est nécessaire, car elle est appliquée par défaut.

La prochaine étape consiste à spécifier les matériaux et à les assigner aux bons domaines. Il s'agit simplement de créer le nombre de matériaux nécessaires et d'ajouter un lien vers les paramètres d'indices de réfraction définis plus tôt dans la liste de la figure 3.19. Dans nos fibres optiques, on a typiquement deux matériaux : le verre et l'air. On notera que pour permettre de trouver facilement les modes guidés, on assignera le matériau d'air partout

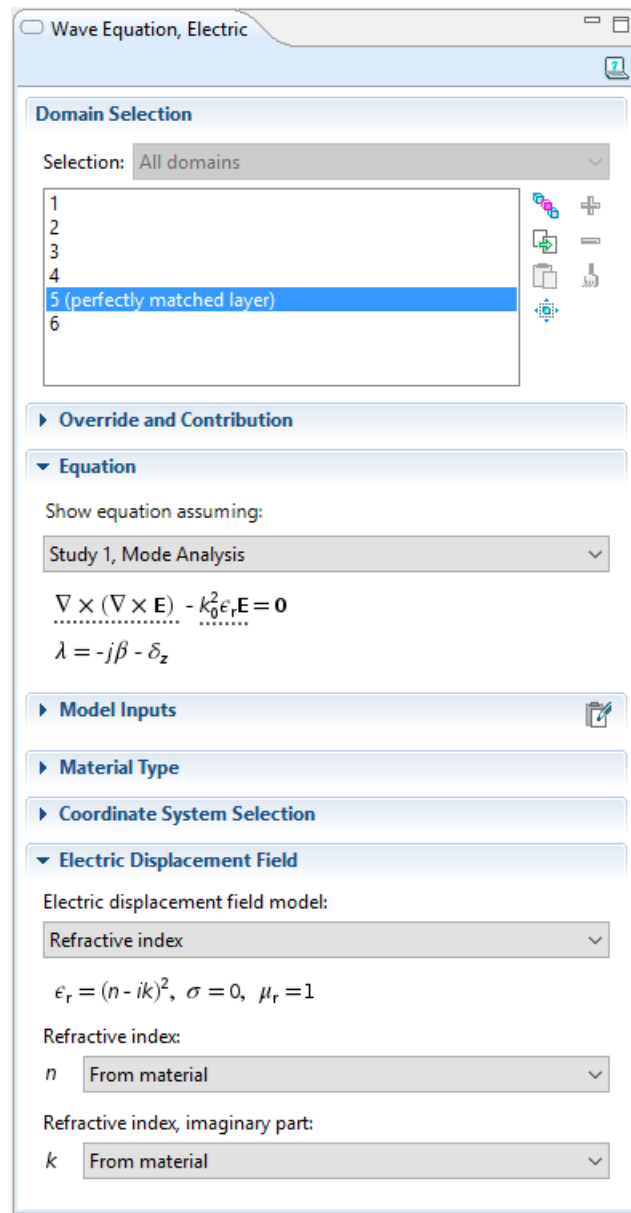


FIGURE 3.24 – Configuration des équations à résoudre. Notons d’abord que le domaine 5 n’est pas géré par les équations soulignées en pointillés, mais plutôt par le PML. De plus, il est important de lier l’indice de réfraction aux équations en choisissant dans le bas du panneau le bon modèle décrivant les matériaux.

dans la fibre sauf dans le coeur et les ponts. Ceci n’aura numériquement pas d’impact sur les valeurs de dispersion et d’atténuation.

Finalement, afin de terminer la configuration du modèle, il reste à déterminer la fréquence de la lumière ainsi que l’indice effectif autour duquel on cherche les indices effectifs. Cette étape est présentée à la figure 3.25.

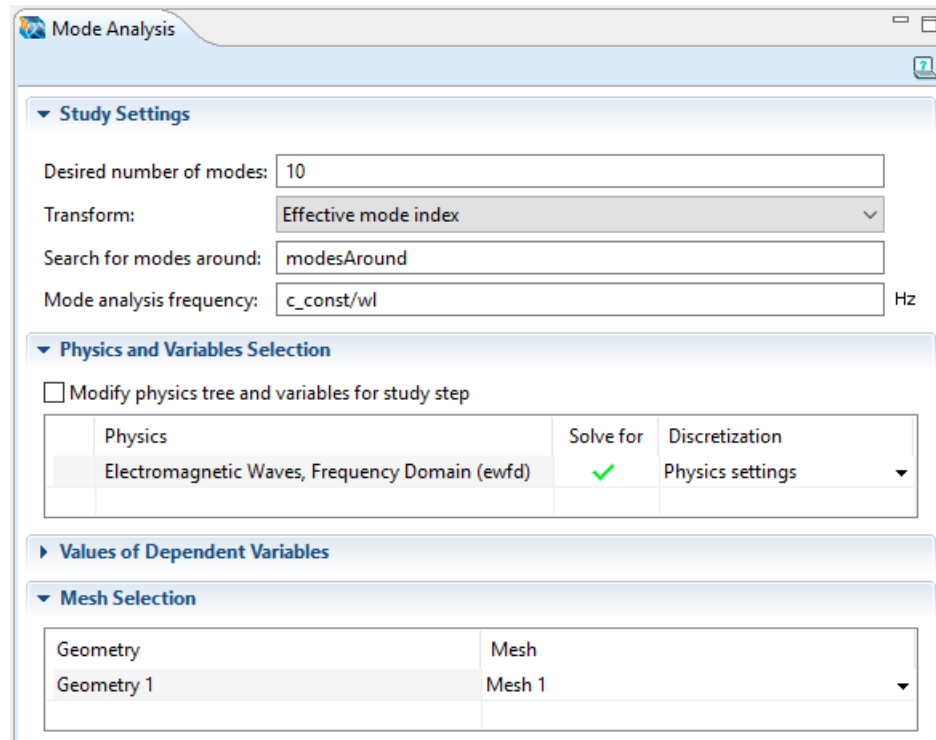


FIGURE 3.25 – Choix des paramètres d'étude. Les paramètres les plus importants sont : le nombre de modes, l'indice effectif initial et la fréquence de la lumière

3.5.3 Résolution du modèle

Maintenant que le modèle est configuré, il suffit de lancer les calculs en cliquant sur le bouton "Compute". On obtient les informations pertinentes sur la résolution telles que présentées à la figure 3.26.

3.5.4 Visualisation des résultats

La visualisation des résultats ne pose généralement pas de problème. Il s'agit simplement de récupérer les indices effectifs pour qu'il soient analysés dans Matlab ou Excel.

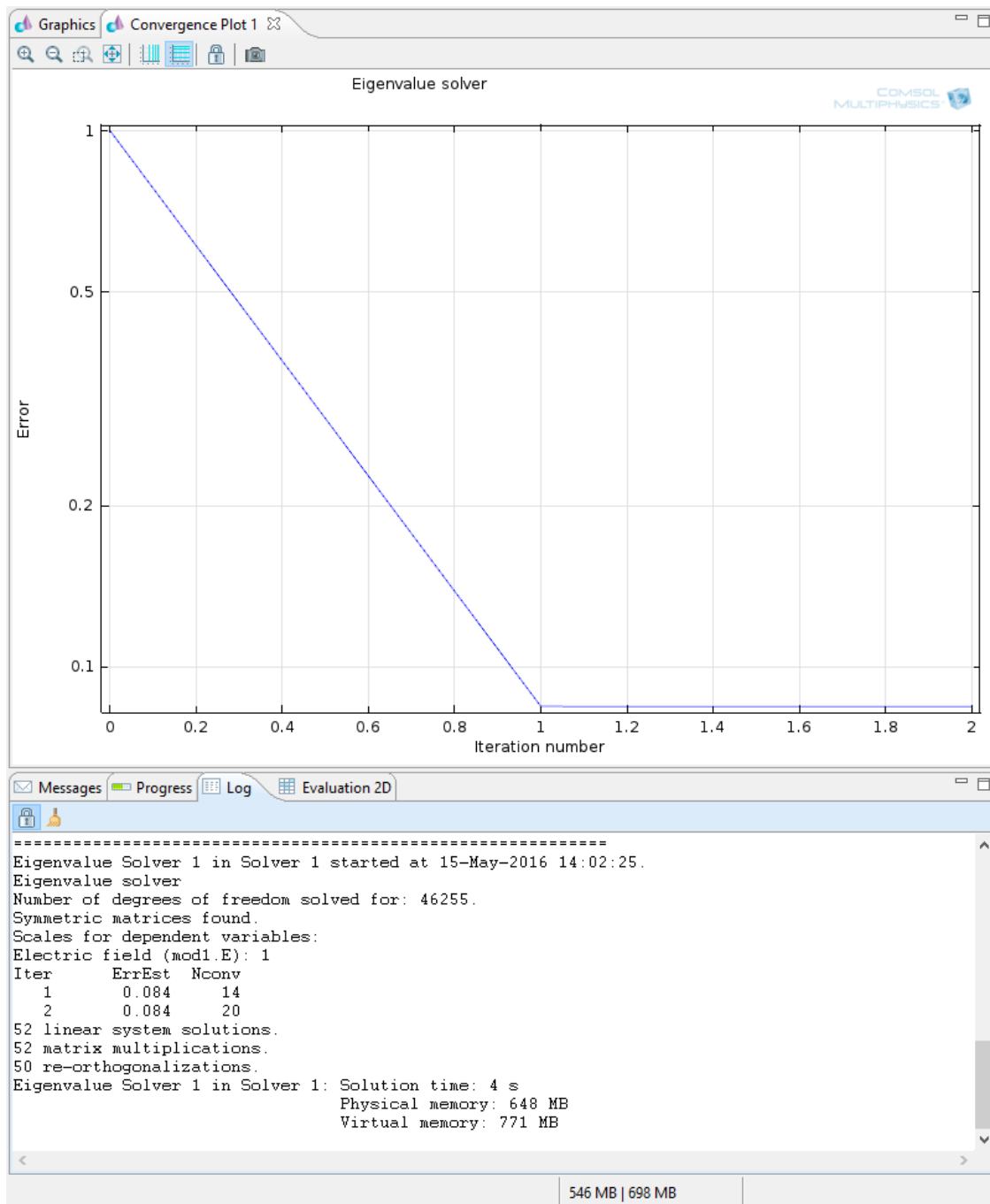


FIGURE 3.26 – Résultats obtenus lors de la résolution du modèle. On obtient quelques informations pertinentes sur les algorithmes de résolution.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons modélisé, analysé puis simulé les modèles de dispersion et d'atténuation dans les fibres optiques à saut d'indice et les fibres microstructurées à coeur suspendu. Nous avons exposé les forces et les limites du paradigme linéaire dans la modélisation de la propagation des impulsions lumineuses. D'une part, la dispersion est prédite avec succès en considérant un modèle bidimensionnel avec invariance selon l'axe de propagation. D'autre part, l'atténuation est davantage un phénomène tridimensionnel et on doit tenir compte de l'invariance en z afin de par exemple tenir compte des impuretés, qui sont encore aujourd'hui une source importante de pertes dans les fibres optiques. Au niveau théorique, notons les limites de l'analyse mathématique à tenir compte de la nature complexe de l'indice de réfraction. Au niveau numérique, en nous limitant au niveau macroscopique, nous avons montré les limites des modèles de propagation. Il serait sans doute intéressant d'étudier comment intégrer les effets des impuretés en tenant compte d'une variance en z , que ce soit en régime linéaire ou non-linéaire. Cependant, il faudra reconsidérer certaines hypothèses, telles que celle de travailler en régime harmonique.

Annexe A

Rappels d'analyse fonctionnelle

Nous supposons ici que le lecteur maîtrise les notions vues dans un cours gradué d'analyse fonctionnelle et de mesure et intégration. Parmi celles-ci, mentionnons les formes sesquilineaires, la mesure et l'intégrale de Lebesgue, les projections orthogonales et les opérateurs bornés (et en particulier compacts et/ou auto-adjoints) dans un espace de Hilbert, ainsi que plus généralement les notions associées aux espaces topologiques, tels que les ensembles ouverts, les ensembles denses, l'espace dual associé à une topologie dans un espace vectoriel, etc. On réfère le lecteur vers [26] pour une introduction aux notions analytiques et topologiques et vers [27] pour un traitement plus général de l'analyse fonctionnelle (et en particulier pour la théorie des distributions).

Mentionnons que dans ce mémoire, le corps associé à un espace vectoriel sera toujours \mathbb{C} , car on travaille en régime harmonique.

A.1 Théorie des opérateurs non-bornés

Commençons par introduire les notions importantes reliées aux opérateurs non-bornés auto-adjoints dans des espaces de Hilbert. Ce cadre mathématique est nécessaire dans l'étude du problème de modes dans les fibres optiques. Pour les démonstrations et pour plus de détails entourant cette théorie, on réfère à [29].

Définition A.1. Étant donné deux espaces de Hilbert \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , on appelle *opérateur de \mathcal{H}_1 vers \mathcal{H}_2* toute application linéaire $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}_2$, définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}_1$. Si \mathcal{V} est dense dans \mathcal{H}_1 , alors on dira de T qu'il est *non-borné*. On appelle \mathcal{V} le *domaine* de T et on le note généralement $D(T)$. Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, on dira de T que c'est un *opérateur sur \mathcal{H}_1* .

Selon cette définition, un opérateur borné (i.e. une application linéaire, continue et définie partout) est aussi un opérateur non-borné. Cependant, comme les opérateurs non-bornés T

définis dans ce mémoire seront partiellement définis, ils ne seront donc pas bornés, ce qui justifie la terminologie.

Mentionnons que la composition de deux opérateurs non-bornés T_1, T_2 est défini comme un autre opérateur (pas nécessairement non-borné) $T_1 T_2$ dont le domaine est donné par

$$D(T_1 T_2) := \{x \in \mathcal{D}(T_2) : T_2(x) \in D(T_1)\} \quad (\text{A.1})$$

qui est non-vide et pour lequel $(T_1 T_2)x := T_1(T_2(x))$ est bien défini. Il s'agit du plus grand sous-espace de \mathcal{H} tel que $T_1 T_2$ est bien défini.

A.1.1 Opérateurs fermés

La définition suivante est importante dans l'analyse spectrale des opérateurs non-bornés, qui fera plus loin l'objet d'une sous-section.

Définition A.2. Le *graphe* d'un opérateur T de \mathcal{H}_1 vers \mathcal{H}_2 , noté $\mathcal{G}(T)$, est défini comme l'ensemble des paires $(x, T(x))$ avec $x \in D(T)$. De plus, T est dit *fermé* lorsque $\mathcal{G}(T)$ est fermé dans $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$.

Les deux caractérisations suivantes s'avèrent utiles pour démontrer qu'un opérateur est fermé ou pour construire des espaces de Hilbert.

Proposition A.3. Soit un opérateur non-borné T de \mathcal{H}_1 vers \mathcal{H}_2 . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est fermé
2. Si $(x_n)_{n=1}^\infty \subset D(T)$, $x_n \xrightarrow{\mathcal{H}_1} x$ et $T(x_n) \xrightarrow{\mathcal{H}_2} y$, alors on a que $x \in D(T)$ et $T(x) = y$
3. $(D(T), \langle \cdot, \cdot \rangle_T)$ est un espace de Hilbert, où $\langle x_1, x_2 \rangle_T := \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle T(x_1), T(x_2) \rangle_{\mathcal{H}_2}$.

Rappelons que selon le théorème du graphe fermé (voir [7]), un opérateur défini partout dans un espace de Hilbert est continue si et seulement si il est fermé. Or, on démontre facilement que si T est un opérateur non-borné et continu sur son domaine, alors T est fermé si et seulement si $D(T) = \mathcal{H}_1$. Comme tous les opérateurs pour fibres optiques seront fermés et partiellement définis (i.e. $D(T) \neq \mathcal{H}_1$), on conclut qu'ils ne seront pas continus.

A.1.2 Opérateurs symétriques et auto-adjoints

Les opérateurs non-bornés reliés aux fibres optiques vérifient l'importante propriété d'être égaux à leur opérateur adjoint. Lorsque T est un opérateur, l'opérateur adjoint n'est pas bien défini. Il ne s'agira dans ce cas en général que d'une relation, telle que définie ci-dessous.

Définition A.4. Étant donné un opérateur T de \mathcal{H}_1 vers \mathcal{H}_2 , son adjoint est une relation dans $\mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1$ selon laquelle x est relié à y si $\langle T(w), x \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle w, y \rangle_{\mathcal{H}_1}$ pour tout $w \in D(T)$.

La proposition suivante justifie l'inclusion de la condition de densité de $D(T)$ dans la définition d'un opérateur non-borné T .

Théorème A.5. *Si T est un opérateur non-borné de \mathcal{H}_1 vers \mathcal{H}_2 , alors l'adjoint de T est un opérateur fermé, i.e. que si on note $T^*(x) = y$ lorsque x et y sont reliés, alors T^* est un opérateur fermé et bien défini, appelé opérateur adjoint. De plus, si T est fermé, alors T^* est non-borné.*

Par construction, on a que $\langle T(x), y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, T^*(y) \rangle_{\mathcal{H}_1}$ pour tout $(x, y) \in D(T) \times D(T^*)$ et que $D(T^*)$ est le plus grand sous-espace pour lequel cette équation est vérifiée. On peut maintenant définir ce qu'est un opérateur symétrique et un opérateur auto-adjoint dans le cas non-borné.

Définition A.6. On dit d'un opérateur non-borné T sur un espace de Hilbert \mathcal{H} qu'il est *symétrique* lorsque $\langle T(x), y \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, T(y) \rangle_{\mathcal{H}}$ pour tout $x, y \in D(T)$ et qu'il est *auto-adjoint* lorsque $T = T^*$.

Cette définition met en évidence le rôle important que joue le domaine dans le contexte des opérateurs non-bornés. En effet, un opérateur est symétrique si et seulement si $T \subset T^*$, c'est-à-dire $D(T) \subset D(T^*)$ et $T(x) = T^*(x)$ pour tout $x \in D(T)$. En pratique, s'il est souvent aisé de démontrer qu'un opérateur non-borné est symétrique, il est beaucoup plus difficile de démontrer qu'il est auto-adjoint.

Par exemple, grâce à l'identité de polarisation

$$4 \langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle + \langle T(x-y), x-y \rangle \\ + i \langle T(x+iy), x+iy \rangle - i \langle T(x-iy), x-iy \rangle$$

on déduit facilement que T est symétrique si et seulement si $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in D(T)$. Terminons avec une proposition nous permettant de conclure que tout opérateur auto-adjoint est fermé.

Proposition A.7. *Si T et T^* sont des opérateurs non-bornés, alors $T = T^{**}$ si et seulement si T est fermé. En particulier, si T est auto-adjoint, alors T est fermé.*

A.2 Théorie spectrale dans des espaces de Hilbert

Afin de définir la notion de spectre d'un opérateur fermé, introduisons d'abord son ensemble résolvant.

Définition A.8. Soit T un opérateur fermé sur \mathcal{H} . Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble *résolvant* (qu'on note $\rho(T)$) lorsque $T - \lambda I$ est un opérateur bijectif et que son inverse est borné. Si $\lambda \in \rho(T)$, alors la *résolvante* de T est l'opérateur borné $R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$.

Comme on suppose T fermé, il est possible de montrer que la condition d'inverse borné peut être omise sans changer $\rho(T)$. Rappelons que les opérateurs différentiels au sens faible et à coefficients constants sont généralement fermés.

Définition A.9. Le spectre $\sigma(T)$ d'un opérateur fermé T est défini comme le complément de $\rho(T)$ dans \mathbb{C} . En particulier, on dit d'un $\lambda \in \sigma(T)$ qu'il s'agit d'une *valeur propre* de T lorsque le noyau de $T - \lambda I$ contient des éléments non-nuls, appelés *vecteur propres*.

Pour étudier le spectre des opérateurs pour fibres optiques, il est utile d'utiliser la notion de mesure spectrale.

A.2.1 Mesure et intégrale spectrales

Cette section se veut une brève introduction aux outils nécessaires à la formulation du calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Cette théorie permet d'établir une correspondance directe entre d'une part les opérateurs auto-adjoints et coercifs et d'autre part les formes sesquilineaires qui sont fermées, coercives et densément définies. On reviendra sur ces notions plus loin.

Définition A.10. Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable. Alors une *mesure spectrale* E est une application définie sur \mathcal{F} vers l'espace des projections orthogonales dans un espace de Hilbert \mathcal{H} et telle que

1. $E(\Omega) = I$
2. Pour toute suite $(M_n) \subset \mathcal{F}$ d'ensembles disjoints, on a que $\sum_n E(M_n) = E(\cup_n M_n)$

Il n'est pas difficile de montrer que si la condition 1 est vérifiée, alors la condition 2 est équivalente au fait que $E_x := \langle E(\cdot)x, x \rangle$ soit une mesure à valeur réelles sur (Ω, \mathcal{F}) , pour tout $x \in \mathcal{H}$.

L'espace mesurable qui nous intéresse ici est la tribu de Borel sur la droite réelle (qu'on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). En effet, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, chaque opérateur auto-adjoint T est associé à une et une seule mesure spectrale. Le lien entre mesure spectrale et opérateur auto-adjoint se fait via l'intégrale spectrale.

Définition A.11. Fixons une mesure spectrale E sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit un nombre fini de $M_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjoints ainsi qu'une fonction f à valeurs complexes de la forme $f(x) = \sum_n a_n \chi_{M_n}(x)$. Alors, l'*intégrale spectrale* de f selon E est l'opérateur auto-adjoint et borné défini par

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dE(x) = \sum_n a_n E(M_n). \quad (\text{A.2})$$

Similairement à l'intégrale de Lebesgue, l'opérateur A.2 ne dépend pas de la représentation de f . Il est possible d'étendre cette construction à toute fonction mesurable et bornée g en

prenant une limite d'opérateurs de la forme A.2 dans l'espace de Banach des opérateurs bornés.

Le théorème spectral dans le cas borné nous dit que si T est un opérateur auto-adjoint et borné tel que $\sigma(T) \subset [a, b]$, alors il existe une et une seule mesure spectrale E_T sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour laquelle $T = \int_{[a,b]} x dE_T(x) := \int x \chi_{[a,b]}(x) dE_T(x)$.

Nous aurons cependant besoin d'une généralisation de ce résultat aux opérateurs auto-adjoints et non-bornés. Sans en faire une exposition détaillée, on généralise à nouveau la construction avec g borné et mesurable aux fonctions h appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), E)$.

Définition A.12. On dit d'une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qu'elle appartient à l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), E)$ lorsqu'elle est mesurable et $E(\{x \in \mathbb{R} : h(x) = \infty\}) = 0$.

Il est possible de montrer que par construction, l'intégrale spectrale selon E de $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), E)$ est un opérateur non-borné et auto-adjoint et son domaine est (à titre indicatif)

$$D \left(\int_{\mathbb{R}} h(x) dE(x) \right) = \left\{ v \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 d \langle E(x)v, v \rangle < \infty \right\} \quad (\text{A.3})$$

où l'intégrale de Lebesgue de $|h|^2$ est selon la mesure $\langle E(\cdot)v, v \rangle$. On obtient le résultat fondamental suivant. On réfère vers [29] pour la démonstration.

Théorème A.13 (Théorème spectral). *Pour chaque opérateur auto-adjoint T sur \mathcal{H} , il existe une unique mesure spectrale E_T sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $T = \int_{\mathbb{R}} x dE_T(x)$.*

Un lien fondamental entre les mesures spectrales E et le spectre des opérateurs auto-adjoints est donné par le résultat suivant.

Théorème A.14. *Soit un opérateur auto-adjoint T et sa mesure spectrale E_T . Si on définit en général le support $\text{supp}(E)$ d'une mesure spectrale E comme étant le complément de la réunion de tous les ouverts $U \subset \mathbb{R}$ tels que $E(U) = 0$, alors*

$$\sigma(T) = \text{supp}(E_T) \quad (\text{A.4})$$

De façon équivalente, on a que $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si $E_T([\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]) \neq 0$ pour tout $\epsilon > 0$. Enfin, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T si et seulement si $E_T(\{\lambda\}) \neq 0$.

Dans le même ordre d'idées, les définitions suivantes seront fondamentales dans notre étude du spectre des opérateurs pour fibres optiques.

Définition A.15. *Étant donné un opérateur auto-adjoint T , son spectre essentiel $\sigma_{\text{ess}}(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\epsilon > 0$, l'image de $E_T([\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon])$ est de dimension infinie. De plus, le spectre discret $\sigma_d(T)$ est défini comme le complément de $\sigma_{\text{ess}}(T)$ dans $\sigma(T)$*

En appliquant cette définition, il n'est pas difficile de montrer que le spectre essentiel est un sous-ensemble fermé dans \mathbb{R} . Afin de déterminer le spectre essentiel de nos opérateurs pour fibres optiques, on utilisera la notion de suite singulière.

Définition A.16. Étant donné un opérateur non borné T et $\lambda \in \mathbb{R}$, on dira que $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(T)$ est une *suite singulière de T à λ* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées

1. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| > 0$
2. Pour tout $x \in \mathcal{H}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle = 0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)x_n = 0$

On donne dans ce qui suit deux caractérisations importantes du spectre essentiel pour notre étude des fibres optiques (voir [29] pour la démonstration).

Théorème A.17 (Critère de Weyl). *Étant donné un opérateur auto-adjoint T et $\lambda \in \mathbb{R}$, les trois énoncés suivants sont équivalents*

1. $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)$
2. Il existe une suite singulière de T à λ .
3. λ est un point d'accumulation dans $\sigma(T)$ ou est une valeur propre dont l'espace propre est de dimension infinie

Corollaire. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et un opérateur auto-adjoint T . Alors $\lambda \in \sigma_d(T)$ si et seulement si λ est une valeur propre isolé du reste du spectre et de multiplicité finie.*

On dira du spectre d'un opérateur T qu'il est *purement discret* lorsque $\sigma(T) = \sigma_d(T)$ (i.e. $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$). C'est le cas par exemple lorsque \mathcal{H} est de dimension finie ou encore lorsque T l'opérateur d'un guide d'ondes fermé, i.e. lorsque le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est borné (dans le cas des fibres optiques, le spectre essentiel est non-vidé). On a par ailleurs la caractérisation suivante d'un opérateur auto-adjoint avec spectre purement discret. Mentionnons qu'un opérateur fermé T est à *résolvante compacte* lorsque $R_\lambda(T)$ est compact pour tout $\lambda \in \rho(T)$.

Théorème A.18. *Soit T un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension infinie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. T est à résolvante compacte.
2. Le spectre de T est purement discret.
3. Il existe une base orthonormale de vecteurs propres $(e_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ et une suite de valeurs propres associées $(\lambda_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.
4. Le plongement $\mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$ est compact selon la norme induite par T .

A.2.2 Calcul fonctionnel pour opérateurs auto-adjoints

Étant donné un espace de Hilbert \mathcal{H} , nous avons vu en A.13 qu'il y a bijection entre l'ensemble des opérateurs auto-adjoints T et celui des mesures spectrales E sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ce théorème de structure d'analyse fonctionnelle nous permet de généraliser aux opérateurs auto-adjoints certains résultats portant sur les matrices symétriques. La définition suivante fournit la base du calcul fonctionnel pour opérateurs auto-adjoints.

Définition A.19. Soit un opérateur auto-adjoint T et $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), E)$. Alors on définit l'opérateur non-borné $h(T) := \int_{\mathbb{R}} h(x) dE_T(x)$ dont le domaine est donné en A.3 avec $E = E_T$.

Notons quelques propriétés utiles de ces opérateurs nouvellement définis. De la même manière que pour la mesure de Lebesgue, on dira qu'une propriété tient E -presque partout s'il existe un $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure spectrale nulle ($E(M) = 0$) et tel que cette propriété tient sur $\mathbb{R} \setminus M$.

Théorème A.20. Soit un opérateur auto-adjoint T et $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), E)$.

1. Si f est à valeurs réelles E_T -presque partout, alors $f(T)$ est auto-adjoint.
2. Si $f(T)g(T)$ est fermé, alors $(fg)(T) = f(T)g(T)$
3. Si f est non-négative E_T -presque partout, alors $\langle f(T)x, x \rangle \geq 0$, pour tout $x \in D(f(T))$.

Avant d'aborder une application importante, définissons un autre concept important, celui d'opérateur semi-borné inférieurement.

Définition A.21. Soit un opérateur auto-adjoint T . On dira que T est semi-borné inférieurement lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\langle Tx, x \rangle \geq m\|x\|^2$ pour tout $x \in D(T)$. On notera dans ce cas que $T \geq m$. Finalement, on dira de $T \geq 0$ qu'il est positif et de $T \geq m$ qu'il est coercif lorsque $m > 0$.

Proposition A.22. Soit T un opérateur semi-borné inférieurement (disons $T \geq m$). Alors

$$\sigma(T) \subset [m, \infty) \tag{A.5}$$

Pour nous, une application importante de ce calcul fonctionnel est l'existence de la racine carrée pour tout opérateur positif. Rappelons qu'étant donné A.1, on a que $D(T) \subset D(B)$ et pas nécessairement $D(T) = D(B)$ dans ce qui suit.

Théorème A.23. Soit T un opérateur auto-adjoint et positif. Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint $B \geq 0$ tel que $BB = T$. On note alors $T^{\frac{1}{2}} = B$.

Démonstration. Nous nous contenterons de démontrer l'existence (voir [29] pour l'unicité). Par les propositions A.14 et A.22, on a que $\text{supp}(E_T) \subset [m, \infty)$. La fonction $f(x) := \sqrt{x}$ est

donc non-négative E_T -presque partout. L'opérateur $B := f(T)$ est donc bien défini et par le théorème A.20, on a que B est auto-adjoint et non-négatif. Finalement, comme BB est aussi auto-adjoint, il est fermé et on conclut que par A.20 que $T = BB$. \square

A.2.3 Formes hermitiennes, coercives et fermées

Commençons par de multiples définitions. On dira d'une application sesquilinéaire

$$t : D(t) \times D(t) \rightarrow \mathbb{C}$$

qu'il s'agit d'une *forme densément définie* (ou simplement une *forme*) lorsque $D(t) \subset \mathcal{H}$ est un sous-espace dense. On dit d'une forme t qu'elle est *hermitienne* lorsque $t(x, y) = \overline{t(y, x)}$ pour tout $x, y \in D(t)$. Une forme t est *semi-bornée inférieurement* lorsqu'il existe $m > 0$ tel que $t(x, x) \geq m\|x\|^2$ pour tout $x \in D(t)$. On écrira alors $t \geq m$ et on dira que $t \geq m$ est *coercive* lorsque $m > 0$ et *positive* lorsque $t \geq 0$. Enfin, une forme hermitienne $t \geq m$ est *fermée* si $D(t)$ devient un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_t = t(x, y) + (1 - m) \langle x, y \rangle \quad (\text{A.6})$$

Finalement, on utilisera souvent la notation $t(x)$ pour dénoter $t(x, x)$, i.e. la forme quadratique associée à t .

Définition A.24. Si t est une forme positive et fermée, alors on définit l'opérateur A_t par

$$D(A_t) = \{x \in D(t) : \exists u_x \in \mathcal{H} \text{ tel que } \langle u_x, y \rangle, \forall y \in D(t)\} \quad (\text{A.7})$$

et $A_t x = u_x$. Inversement, si A est un opérateur auto-adjoint et positif, alors on définit la forme t_A par $D(t_A) = D(A^{\frac{1}{2}})$ et

$$t_A(x, y) := \left\langle A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}y \right\rangle = \langle Ax, y \rangle \quad (\text{A.8})$$

Théorème A.25. Soit t une forme positive et fermée et A un opérateur auto-adjoint et positif. Alors t_A est bien défini, est une forme positive et fermée et A_t est un opérateur auto-adjoint et positif. On a

$$t_{A_t} = t \quad (\text{A.9})$$

$$A_{t_A} = A \quad (\text{A.10})$$

On a donc une bijection entre des formes positives et fermées vers les opérateurs auto-adjoints et positifs. De plus,

$$t_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle \quad \forall (x, y) \in D(A) \times D(t_A) \quad (\text{A.11})$$

$$t(x, y) = \langle A_t x, y \rangle \quad \forall (x, y) \in D(A_t) \times D(t) \quad (\text{A.12})$$

A.2.4 Principe du min-max

Lorsque \mathcal{H} est de dimension infinie et $\sigma_{ess}(T)$ est non-vide, on donne dans cette section une caractérisation des valeurs propres de T plus petites ou égales à $\alpha := \inf \sigma_{ess}(T)$. Notons que $\alpha \in \sigma_{ess}(T)$ car c'est un ensemble fermé.

En tenant compte de la multiplicité, s'il y a un nombre fini m (possiblement nul) de valeurs propres plus petites que α , alors on les note

$$\lambda_1(T) \leq \lambda_2(T) \leq \dots \leq \lambda_m(T) < \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots \quad (\text{A.13})$$

où on pose $\lambda_n = \alpha$ pour tout $n > m$.

S'il y a une infinité de valeurs propres plus petites que α , alors encore une fois en tenant compte de la multiplicité, on peut les noter

$$\lambda_1(T) \leq \lambda_2(T) \leq \lambda_3(T) \leq \dots \quad (\text{A.14})$$

Dans les deux cas, on aura recensé par les $\lambda_i(T)$ tous les éléments du spectre discret en tenant compte de leur multiplicité. Ceci étant dit, notons qu'il est possible que α soit une valeur propre, mais elle sera nécessairement un point d'accumulation ou de multiplicité infinie. Ce sont deux cas indésirables en pratique d'un point de vue numérique.

Théorème A.26 (Principe du min-max). *Supposons que \mathcal{H} est de dimension infinie. Soit S un opérateur auto-adjoint et semi-borné inférieurement tel que $\sigma_{ess}(S) \neq \emptyset$, t_S sa forme fermée associée et E_S sa mesure spectrale associée. Pour chaque $n \geq 0$, posons \mathcal{F}_n l'ensemble des sous-espaces de \mathcal{H} de dimension au plus n .*

$$\mu_n(S) = \sup_{M \in \mathcal{F}_{n-1}} \inf_{\substack{x \in D(S), \|x\|=1 \\ x \perp M}} \langle Sx, x \rangle \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{\mu}_n(t_S) = \sup_{M \in \mathcal{F}_{n-1}} \inf_{\substack{x \in D(t_S), \|x\|=1 \\ x \perp M}} t_S(x, x) \quad (\text{A.16})$$

Alors on conclut que

$$\lambda_n(T) = \mu_n(T) = \tilde{\mu}_n(T) = \inf_{\{\lambda \in \mathbb{R} : \dim(\text{Im}(E_S(-\infty, \lambda])) \geq n\}} \lambda \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{A.17})$$

A.2.5 Applications à l'opérateur du laplacien

Afin d'illustrer certains points importants, appliquons ces notions à un exemple suffisamment simple pour le lecteur familier avec les formulations faibles des équations aux dérivées partielles. Si l'auteur n'est pas familier avec les espaces fonctionnels usuels, il est suggéré de lire les sections A.3 et A.4 avant d'aborder cette section.

Considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Supposons qu'on désire étudier le spectre de l'opérateur T défini par le domaine $D(T) = H^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$T(u) = -\Delta u + u \quad (\text{A.18})$$

où Δ est le laplacien au sens faible, qui est bien défini dans $H^2(\mathbb{R}^n)$, mais pas dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. Or, on souhaiterait utiliser une formulation variationnelle (i.e. une forme fermée) qui est en quelque sorte équivalente à cet opérateur. On définit alors l'application sesquilinéaire t dont le domaine est $D(t) = H^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}$ et

$$t(u, v) := \int_{\Omega} \text{grad}(u) \overline{\text{grad}(v)} dx + \int_{\Omega} u \bar{v} dx \quad (\text{A.19})$$

Il est clair que t est densément définie (selon le produit scalaire de \mathcal{H}), hermitienne, coercive et fermée. En appliquant A.25, on obtient l'existence d'un unique opérateur auto-adjoint et coercif S tel que $D(S) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ (où $D(S)$ est maximal) et qui vérifie

$$\langle Su, v \rangle_{\mathcal{H}} := \int_{\mathbb{R}^n} \text{grad}(u) \overline{\text{grad}(v)} dx + \int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx \quad (\text{A.20})$$

Or, par la formule de Green, on sait que pour tout $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ et $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle Tu, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u) \bar{v} dx + \int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \text{grad}(u) \overline{\text{grad}(v)} dx + \int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \langle Su, v \rangle_{\mathcal{H}} \quad (\text{A.21})$$

Comme il y a unicité de S , on peut alors se demander si on a égalité entre S et T . En utilisant A.21, on déduit facilement que T est symétrique et coercif. La question revient alors à déterminer si T est non-seulement symétrique, mais aussi auto-adjoint et si son domaine est maximal.

Nous semblons alors arrivés face à un mur, car on aurait besoin d'une théorie plus élaborée des espaces de Sobolev et du laplacien pour établir l'équivalence entre l'opérateur auto-adjoint T et la forme fermée t . Remarquons cependant qu'il est clair que $Su = Tu$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ car A.21 tient pour tout $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Nous verrons à la prochaine sous-section comment on peut facilement résoudre ce problème sans faille au niveau de la rigueur.

A.2.6 L'importance de bien poser le problème

En général, supposons qu'on veuille étudier en toute rigueur le spectre d'un opérateur différentiel T dont on sait qu'il est symétrique et coercif (comme par exemple celui défini en A.18). On aimerait appliquer la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints à cet opérateur non-borné. À priori, on ne sait pas cependant si cet opérateur est auto-adjoint. On sait cependant qu'il existe un opérateur auto-adjoint S tel que $Su = Tu$ pour toute fonctions infiniment dérivables à support compact.

La solution à ce problème est de poser comme problème de départ la forme fermée associée à notre opérateur. Le théorème A.25 nous dit alors qu'il existe un opérateur auto-adjoint S égale à T sur $D(T)$ équivalente à cette forme. On peut appliquer ensuite les résultats vus dans cette annexe à cette forme, en négligeant l'expression précise de S (il pourrait s'avérer que $S = T$ bien entendu).

C'est ce qui est fait dans [2], et ce qui explique pourquoi on peut déclarer rigoureusement que l'opérateur de notre problème est non seulement symétrique, mais auto-adjoint.

A.3 Dérivation au sens des distributions

Généralisons maintenant le concept de dérivée aux fonctions localement intégrables. Nous jugeons nécessaires de bien comprendre cette généralisation dans le contexte des fibres optiques car certains opérateurs différentiels et espaces fonctionnels utilisés ne sont généralement pas enseignés dans un cours d'introduction aux espaces de Sobolev. Pour plus de détails, nous référons le lecteur vers [27].

L'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ désignera pour l'instant un ouvert non-vide quelconque. Nous noterons $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont infiniment dérivables et à support compact. Muni d'une topologie τ judicieusement construite, l'espace topologique $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ devient un espace vectoriel topologique non-métrisable mais avec certaines propriétés remarquables, telles que la complétude et la convexité locale.

L'objet mathématique d'intérêt pour nous est l'espace dual de $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$ et dont les éléments sont appelés "distributions" ou "fonctions généralisées". Rappelons que cet espace correspond par définition à l'ensemble des applications linéaires continues (selon τ) à valeurs complexes définies sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour pouvoir parler de convergence dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$, on le munit de la topologie faible étoilée.

Dans un certain sens, l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ contient l'ensemble des fonctions localement intégrables, noté $L_c^1(\Omega)$. En effet, l'application qui à chaque $f \in L_c^1(\Omega)$ associe la forme linéaire Λ_f suivante

$$\Lambda_f : \phi \mapsto \int_{\Omega} f \phi d\Omega \quad (\text{A.22})$$

est une injection de $L_c^1(\Omega)$ vers $\mathcal{D}'(\Omega)$. Chaque $f \in L_c^1(\Omega)$ est donc associé à une et une seule distribution. On définit alors la dérivée partielle en x d'une distribution Λ quelconque par

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} : \phi \mapsto \Lambda \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (\text{A.23})$$

et on définit la dérivée en y de façon similaire. Mentionnons qu'étant donné que $\frac{\partial \phi}{\partial x} \in \mathcal{D}(\Omega)$ et qu'il y a continuité selon τ , la forme linéaire en A.23 est bien définie et est une distribution. En prenant un certain recul, on s'aperçoit qu'on vient de généraliser ici à toute fonction $f \in L_c^1(\Omega)$ la notion de dérivée partielle en x ou y d'une fonction continuellement dérivable au sens classique. Par exemple, pour la dérivée partielle en x , si on se rappelle l'intégration par parties, on obtient pour tout $f \in C^1(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ que

$$\frac{\partial \Lambda_f}{\partial x}(\phi) = \Lambda_f \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \phi d\Omega = \Lambda_{\frac{\partial f}{\partial x}}(\phi)$$

où le terme de bord est nul car ϕ est à support compact dans l'ouvert Ω . On est donc en mesure de considérer la dérivée de toute fonction localement intégrable sans pour autant modifier la définition classique applicable aux fonctions de $C^1(\Omega)$.

Comme $\frac{\partial \Lambda}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Lambda}{\partial y}$ sont des distributions, on peut définir récursivement (au sens de A.23) toute combinaison linéaire de dérivés partielles d'ordre quelconque. Ceci nous permettra de définir les espaces de Hilbert de fonctions pour lesquelles les opérateurs des équations 1.48 à 1.51 sont bien définies, tels que le rotationnel et la divergence.

Intéressons nous maintenant aux sous-ensembles de $L_c^1(\Omega)$ nous permettant de bien formuler le problème de détermination des courbes de dispersion de nos fibres optiques microstructurées.

A.4 Espaces fonctionnels

Commençons par rappeler l'espace de Hilbert dont tous les modes guidés feront partie. Pour $n \geq 1$, considérons l'ensemble des champs vectoriels $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ où chaque composante F_i est mesurable et $|F_i|^2$ est d'intégrale finie. Comme on souhaite utiliser les méthodes hilbertiennes, on s'intéressera plus précisément à cet ensemble quotienté par la relation d'équivalence \sim selon laquelle $\mathbf{F} \sim \mathbf{G}$ si on a $F_i = G_i$ sauf sur un ensemble de mesure nulle, pour tout i . Cet ensemble, noté $L^2(\Omega)^n$ (on omettra le n dans le cas unidimensionnel), contiendra tous les modes guidés de nos équations de fibres optiques ($n = 3$ dans ce cas).

Théorème A.27. *Soit un entier $n \geq 1$ et $\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $0 < \inf \epsilon(\Omega)$ et $\sup \epsilon(\Omega) < \infty$. Alors l'espace fonctionnel $L^2(\Omega)^n$ devient l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)_\epsilon^n$ lorsqu'on le munit du produit scalaire*

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_\epsilon := \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \epsilon F_i \bar{G}_i d\Omega \quad (\text{A.24})$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $n = 1$ et $\epsilon = 1$. En effet,

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle_1 \inf \epsilon(\Omega) \leq \langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle_\epsilon \leq \langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle_1 \sup \epsilon(\Omega) \quad (\text{A.25})$$

et donc les normes induites par A.24 sont équivalentes. De plus, on voit facilement que la complétude découle du cas $n = 1$. Le théorème devient alors classique et on réfère vers [7] pour la démonstration. \square

On remarque que dans le contexte du théorème précédent, le contenu de $L^2(\Omega)^n$ ne dépend pas de ϵ et seule la géométrie associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon$ varie selon ϵ .

Bibliographie

- [1] Amraoui, M. 2010, *Fibres Optiques Microstructurées Chalcogénures Fortement Non Linéaires à base de As₂S₃ : vers de Nouvelles Sources Supercontinuum Infrarouges*, thèse de doctorat, Université de Bourgogne.
- [2] Bamberger, A. et A. Bonnet. 1990, «Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber», *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 21, n° 6, p. 1487–1510.
- [3] Berenger, J. 1994, «A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves», *Journal of computational physics*, vol. 114, n° 2, p. 185–200.
- [4] Bonnet-Bendhia, A. et P. Joly. 2001, «Mathematical analysis and numerical approximation of optical waveguides», *Mathematical modeling in optical science*, p. 273–324.
- [5] Boyd, R. 2008, *Nonlinear Optics*, Nonlinear Optics Series, Elsevier Science.
- [6] Braun, M. 1993, *Differential Equations and Their Applications : An Introduction to Applied Mathematics*, Applied mathematical sciences, Springer.
- [7] Brezis, H. 2010, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext (Berlin. Print), Springer.
- [8] Cassidy, C. et M. Lavertu. 1994, *Introduction à l'analyse : fonctions d'une variable réelle*, Les Presses de l'Université Laval.
- [9] Chaika, G., L. Grechko, V. Katok et V. Levandovskii. 1997, «Simulation of optical losses for slightly dispersed fibers», dans *Optoelectronic and Hybrid Optical/Digital Systems for Image Processing*, International Society for Optics and Photonics, p. 236–238.
- [10] Cheng, D. 1989, *Field and wave electromagnetics*, The Addison-Wesley series in electrical engineering, Addison-Wesley Publishing Company.
- [11] COMSOL. 2013, «v 4.3b», *Reference Manual, User's Guide*.
- [12] Feynman, R., R. Leighton et M. Sands. 2011, *The Feynman Lectures on Physics : Mainly mechanics, radiation, and heat*, Basic Books, Basic Books.

- [13] Fleisch, D. 2008, *A Student's Guide to Maxwell's Equations*, Cambridge University Press.
- [14] French, A. 1971, *Vibrations and Waves*, M.I.T. introductory physics series.
- [15] Gbur, G. 2011, *Mathematical Methods for Optical Physics and Engineering*, Cambridge University Press.
- [16] Hecht, E. 2002, *Optics*, Addison-Wesley Longman, Incorporated.
- [17] Jedidi, R. 2007, *Modélisation des guides d'ondes optiques courbés et caractérisation des pertes par des méthodes d'éléments finis hiérarchiques*, thèse de doctorat, Université Laval.
- [18] Joly, P. et C. Poirier. 1995, «Mathematical analysis of electromagnetic open waveguides», *RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique*, vol. 29, n° 5, p. 505–575.
- [19] Kartchevski, E., A. Nosich et G. Hanson. 2005, «Mathematical analysis of the generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber», *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 65, n° 6, p. 2033–2048.
- [20] Lee, J. 1994, «Finite element analysis of lossy dielectric waveguides», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, n° 6, p. 1025–1031.
- [21] Lighthill, M. 1965, «Group velocity», *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 1, n° 1, p. 1–28.
- [22] Nussenzveig, H. 1972, *Causality and dispersion relations*, Mathematics in Science and Engineering, Elsevier Science.
- [23] Okamoto, K. 2006, *Fundamentals of Optical Waveguides*, Electronics & Electrical, Elsevier.
- [24] Orfanidis, S. 1999-2014, *Electromagnetic Waves and Antennas*.
- [25] Pinchover, Y. et J. Rubinstein. 2005, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press.
- [26] Rudin, W. 1987, *Real and complex analysis*, Mathematics series, McGraw-Hill.
- [27] Rudin, W. 1991, *Functional Analysis*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill.
- [28] Saleh, B. et M. Teich. 2007, *Fundamentals of Photonics*, Wiley Series in Pure and Applied Optics, Wiley.
- [29] Schmüdgen, K. 2012, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Netherlands.

- [30] Shaw, J. 2004, *Mathematical Principles of Optical Fiber Communication*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [31] Vardapetyan, L. et L. Demkowicz. 2003, «Full-wave analysis of dielectric waveguides at a given frequency», *Mathematics of computation*, vol. 72, n° 241, p. 105–129.
- [32] Villarroel, J. et M. Montero. 2010, «On the effect of random inhomogeneities in kerr media modelled by a nonlinear schrödinger equation», *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 43, n° 13, p. 135 404.
- [33] Zolla, F. 2005, *Foundations of Photonic Crystal Fibres*, World Scientific.