

SOMMAIRE

Résumé	i
Remerciements	iv
Notations	vi
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	x
Sommaire	xi

CHAPITRE 01

INTRODUCTION GENERALE

1.1	Introduction	02
1.2	Objectifs de la thèse	07
1.3	Plan de la thèse	07

CHAPITRE 02

THEORIE DE L'ELASTICITE PLANE ET METHODES ENERGETIQUES

2.1	Elasticité linéaire	10
2.2	Problèmes des valeurs limites	11
2.2.1	Introduction	11
2.2.2	Forme forte du problème	12
2.2.3	Forme faible du problème	14
2.3	Elasticité plane	15
2.3.1	Etat plan de déformation	15

2.3.2	Matrice des constantes élastiques	16
2.3.3	Etat plan de contraintes	17
2.3.4	Matrice des constantes élastiques	18
2.4	Fonctions de forme	20
2.5	Matrice de rigidité Elémentaire	21
2.6	Vecteur des forces nodales équivalentes	22
2.7	Principes énergétiques	23
2.7.1	Introduction	23
2.7.2	Principe du Travail Virtuel	23
2.7.3	Principe du Travail Virtuel Complémentaire	24
2.7.4	Principe de l'énergie potentielle totale	25
2.7.5	Principe de l'énergie potentielle complémentaire totale	25
2.7.6	Energie de déformation	26
2.7.7	Energie de déformation complémentaire	27

CHAPITRE 03

APPROCHE EN DEFORMATION ET CONDENSATION STATIQUE

3.1	Introduction	29
3.2	Différents modèles	29
3.2.1	Modèle en déplacement	29
3.2.2	Modèle en équilibre	30
3.2.3	Modèle mixte	31
3.2.3	Modèle hybride	31
3.3	Modèle en déformation	32
3.3.1	Définition	32
3.3.2	Classification du modèle en déformation	32
3.4	Critères de convergence	33

3.5	Avantages du modèle en déformation	33
3.6	Utilisation du modèle en déformation dans l'analyse des structures	34
3.7	Revue de littérature	35
3.8	Condensation statique	39

CHAPITRE 04

DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT POUR L'ELASTICITE PLANE

4.1	Introduction	42
4.2	Construction de l'élément R4BM	43
4.2.1	Définition	43
4.2.2	Considérations analytiques	44
4.2.3	Evaluation de rigidité élémentaire $[K_e]$	47
4.2.4	Vecteur forces nodales équivalentes	48
4.2.5	Calcul des contraintes	49
4.3	Tests numériques	49
4.3.1	Poutre console mince élancée soumise a une force a l'extrémité	50
4.3.2	Poutre console mince élancée soumise a une flexion pure a l'extrémité	51
4.3.3	Les tests du rapport de forme pour la console (1 ^{er} Cas)	53
4.3.3	Les tests du rapport de forme pour la console (2 ^{eme} Cas)	53
4.3.4	Poutre simplement appuyée chargée au milieu	57

CHAPITRE 05

MODELISATION DES COQUES AVEC ELEMENTS PLANS

5.1	Introduction	60
5.2	Discretisation d'une surface courbée par des éléments plans	61
5.3	Construction de l'élément plan de coque R4BM-ACM	62

5.3.1 Superposition des deux éléments	62
5.3.2 Elément flexionnel	64
5.3.3 Vecteur forces nodales équivalentes	66
5.3.4 Calcul des contraintes	67
5.4 Applications numériques	67
5.4.1 Cylindre pincé avec diaphragmes	67
5.4.2 Cylindre pincé à bords libres	73
5.4.3 Panneau cylindrique	76
Conclusions et recommandations	81
Bibliographie	83
Annexes	90

CHAP.01

Introduction générale

CHAPITRE 01

INTRODUCTION GENERALE

1.1 Introduction :

Cette thèse a un rapport avec la catégorie générale des méthodes de calculs numériques qu'on retrouve dans les sciences de l'ingénieur, en particulier la méthode des éléments finis (MEF) pour analyser des structures. Le but général de l'étude est de fournir une base de travail pour le calcul des structures en élasticité linéaire plane moyennant les hypothèses des petits déplacements et des petites déformations. Le critère fondamental pour une telle tâche est la formulation d'un élément fini membranaire, stable basé sur l'approche en déformation, améliorant ceux existants dans la même catégorie. Les méthodes numériques ont vu un développement rapide au cours des décennies dernières et une quantité énorme d'articles et d'ouvrages a été publiée sur le sujet. Certaines de ces contributions concernent la théorie des éléments finis, on peut citer à titre d'exemple les auteurs suivants : Bathe [Bath.96], Zienkiewicz et Taylor [Zien.00], Hughes [Hugh.87], Belytschko et al. [Bely.00], Mac Neal [Macn.98]. L'utilisation de la MEF et en particulier l'approche en déformation pour modéliser les structures est couverte par beaucoup d'auteurs, parmi eux on peut citer Sabir [Sabi.71-96], Djoudi [Djou.90-04], Belarbi [Bela.97-05] et d'autres.

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique pour obtenir des solutions approximatives à une large variété des problèmes des sciences de l'ingénieur.

A cause de sa diversité et sa flexibilité comme outil d'analyse, elle reçoit beaucoup d'attention dans les écoles d'ingénieurs en même temps que dans l'industrie. De nos jours, dans beaucoup de problèmes on constate que les ingénieurs ont tendance à chercher des solutions approximatives plutôt que des solutions fermes et exactes. Par exemple, si nous voulons connaître les déplacements d'une structure, nous pouvons facilement écrire les équations gouvernant et les conditions aux limites pour ce problème, mais nous constaterons tout de suite qu'on ne peut trouver une solution analytique simple. Les solutions analytiques sont rares pour ces types de problèmes, que l'ingénieur est appelé à résoudre. Le bon sens et le savoir faire de l'ingénieur viennent souvent à sa rescousse, et lui fournissent plusieurs alternatives pour surmonter ce dilemme. Une des possibilités est la simplification des hypothèses (pour ignorer certaines difficultés et réduire le problème pour qu'il puisse être traité). Parfois cette procédure marche, mais le plus souvent non. Maintenant que les ordinateurs sont largement disponibles, une alternative plus fiable se présente, c'est de laisser telles qu'elles les complexités du problème et de trouver une solution numérique approximative.

Le principe de base de la MEF est que le domaine peut être remplacé par un ensemble d'éléments discrets (Figure 1.1). Puisque ces éléments peuvent être réunis de plusieurs manières, ils peuvent donc être employés pour représenter les formes les plus complexes.

Le premier parallèle avec cette méthode peut être fait dès la Grèce antique. Alors qu'Eudoxos utilisait des formes géométriques simplifiées pour approcher des longueurs, des surfaces, des volumes, Archimède imaginait un modèle de calcul du périmètre d'un cercle, c'est la somme d'un nombre fini de cordes droites (éléments). En 1851, Schellbach décrit la solution d'un problème de surface minimale. Cette

solution est extrêmement proche de la méthode des éléments finis. Plus tard, en 1909 et 1915, Ritz et Galerkin publient des articles qui seront les fondements de la méthode.

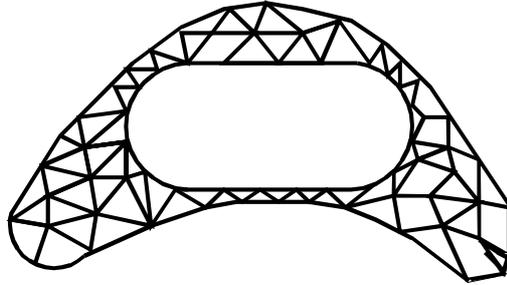


Figure 1.1: Discrétisation par éléments finis

La MEF, avec l'apparition des ordinateurs, devint pour la première fois en 1956, une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures, lorsqu'elle fut utilisée chez Boeing par Turner, Clough, Martin, et Topp [Turn.56] pour calculer des parties de la structure d'un avion. Ces travaux marquèrent la naissance de la méthode des éléments finis comme on l'a connaît aujourd'hui.

La particularité importante de la MEF qui la différencie des autres méthodes numériques, c'est sa capacité de formuler individuellement des solutions pour les éléments avant de les assembler pour représenter le problème entier. Il existe différentes façons pour formuler les propriétés individuelles de chaque élément. La première approche est appelée l'approche directe parce que son origine est liée directement à la méthode de rigidité de l'analyse des structures. En traitant les équations, la connaissance de l'algèbre matricielle est nécessaire pour comprendre l'approche directe. Les propriétés des éléments obtenues par l'approche directe

peuvent être déterminées aussi par l'approche variationnelle, en effet celle-ci se base sur le calcul des variations. Pour les problèmes de mécanique des solides, la fonctionnelle correspond à l'énergie potentielle, l'énergie complémentaire, ou une variante de celle-ci (§2.7). La troisième approche c'est celle des résidus pondérés, cette approche est avantageuse parce qu'il devient ainsi possible d'élargir la MEF aux problèmes, où aucune fonctionnelle n'est disponible. La méthode des résidus pondérés est largement employée pour les applications non structurelles comme le transfert de chaleur et la mécanique des fluides.

Les mathématiciens, les physiciens et les ingénieurs ont développé les idées essentielles de la méthode, indépendamment les uns des autres, dans de différentes périodes et pour de différentes raisons. Les efforts de ces trois groupes de spécialistes ont abouti à trois ensembles de travaux, avec des points de vues différents. Comme la popularité de la MEF a commencé à grandir dans les communautés des ingénieurs et des physiciens, les mathématiciens se sont ensuite intéressés à donner à la méthode une base mathématique ferme. Des études ont été faites pour l'évaluation des erreurs de discrétisation, les taux de convergence et la stabilité pour les différents types d'approximations par éléments finis.

Les applications de la MEF se scindent en trois catégories, selon la nature du problème à résoudre. Dans la première catégorie, on y trouve les problèmes d'équilibre (indépendants de temps). C'est le domaine de la mécanique des solides où nous avons besoin de connaître les déplacements, les déformations et les contraintes pour un chargement mécanique (ou thermique) donné. La majorité des applications de la MEF sont dans cette catégorie. Dans la deuxième catégorie, on retrouve les problèmes appelés problèmes de valeurs propres. Ceux-ci sont des problèmes stationnaires dont la solution nécessite souvent la détermination des fréquences

naturelles et les modes de vibration des solides et des fluides. Dans la troisième catégorie, la dimension temps est intégrée aux problèmes des deux premières catégories. Les domaines d'applications de la MEF s'étendent à toutes les disciplines de l'ingénierie, mais reste que les ingénieurs civils, mécaniques et spatiaux sont les utilisateurs les plus fréquents de cette méthode.

Des milliers d'articles, des centaines de livres qui traitent le sujet ont vu le jour, en parallèle, des milliers de conférences ont été organisées. Le nombre important d'ouvrages publiés illustre bien la croissance exponentielle de cette méthode.

Les éléments développés, prennent souvent quelques mois, voir quelques années pour passer du monde académique universitaire au monde industriel commercial. On peut donc prévoir à travers les publications et articles universitaires ce qui passera dans l'avenir proche au niveau de l'industrie.

Du point de vue d'un expert, cette méthode, comme toute autre technique d'analyse numérique, peut faire toujours l'objet d'une amélioration pour la rendre plus efficace et plus facile à utiliser. Comme la méthode est appliquée à des problèmes de plus en plus grands et complexes, il devient important que le processus de résolution soit économique. La croissance rapide dans les domaines de l'ingénierie et de la technologie des ordinateurs va sans doute continuer à avoir des effets significatifs sur l'évolution de la méthode.

Les programmes d'éléments finis ont joués un rôle important dans la croissance remarquable de la conception assistée par ordinateur (C.A.O). Avec les pressions économiques continues pour l'amélioration de la productivité en ingénierie, on verra dans l'avenir un rythme accéléré de la MEF dans la conception des processus. Cette méthodologie reste toujours passionnante et une partie importante dans « la caisse à outils » de l'ingénieur.

1.2 Objectifs de la thèse :

Les objectifs de la thèse sont de mettre au point, d'une part un élément, rectangulaire destiné à résoudre les problèmes de l'élasticité plane et d'autre part associer ce dernier avec un élément riche en flexion pour l'analyse des structures en coque. L'effort a porté en particulier sur l'étude d'un élément membranaire, l'idée consiste à améliorer les éléments rectangulaires membranaires SBRIE et SBRIE1 de Sabir [Sabi.95a], par un nouvel élément qui permet, d'approcher les phénomènes de flexions des poutres minces dans les états de contraintes planes. Une intégration analytique du champ de déformation, permet d'aboutir aux fonctions d'interpolation. L'élément développé est intégré dans le code de calcul de type universitaire le « ALGMEF » pensé et écrit par Belarbi [Bela.00]. Il a été très largement popularisé par ses différentes versions développées selon les cas analysés, par différents auteurs. C'est un outil de calcul par éléments finis basé sur différentes approches, pour le cas de la présente thèse ce code est adapté aux états de déformations et de contraintes de l'élasticité plane. La rigueur dans l'utilisation de ce code d'un grand niveau fait qu'il est très apprécié dans tous les types de structures.

1.3 Plan de la thèse :

Le premier chapitre décrit une introduction générale. Le second chapitre est consacré à des rappels, des bases théoriques de l'élasticité plane ainsi que les principes variationnels, d'où découlent les principes d'énergies et d'équilibre. Le troisième chapitre est dédié principalement à l'approche en déformation, on essaye d'expliquer les techniques permettant de l'aborder et de la classer parmi les autres modèles connus. Cela permet de comparer l'efficacité de ce type d'approche avec le modèle classique en déplacement. On expose ensuite la technique de condensation statique

utilisée pour réduire le volume de travail et améliorer ainsi les résultats. Les trois chapitres sont liés car la fiabilité de l'élément développé fait appel à toutes ces connaissances. Le quatrième chapitre décrit un nouveau élément fini développé pour l'élasticité plane: l'élément rectangulaire membranaire, le R4BM. On développe dans cette partie la formulation de l'élément pour la modélisation des structures minces bidimensionnelles, où l'on utilise la technique de condensation statique. Le dernier chapitre est consacré à l'élément fini obtenu par superposition de l'élément flexionnel très connu ACM avec le présent élément pour modéliser les coques minces et de manière générale les structures présentant des effets membranaires combinés avec des effets flexionnels.

CHAP.02

Bases théoriques de l'élasticité plane
et principes énergétiques

CHAPITRE 02
BASES THEORIQUES DE L'ELASTICITE PLANE ET PRINCIPES
ENERGETIQUES

2.1 Elasticité linéaire :

Un comportement élastique signifie que l'application des contraintes mène à des déformations, qui sont réversibles quand on retire les contraintes. L'élasticité linéaire implique que la relation entre les contraintes et les déformations est linéaire, qui est valable seulement dans le cas des petites déformations, ou de petits incréments de contraintes. La plupart des applications en mécanique des structures sont basées sur l'élasticité linéaire. Cette dernière est cependant simple et les caractéristiques mécaniques nécessaires des matériaux peuvent être obtenus à partir d'essais en laboratoires.

De ce fait, elle concerne la modélisation des déformations et des contraintes dans les milieux continus caractérisés par des relations linéaires entre contraintes et déformations. Les conditions de compatibilité, imposées aux composantes des déformations, sont nécessaires et suffisantes pour assurer une valeur continue et unique pour le champ de déplacement. La procédure est d'éliminer les déplacements parmi les équations cinématiques pour produire des équations avec seulement des déformations comme inconnues.

Les structures dans lesquelles une dimension est petite devant les deux autres définissent un problème de plaque ou de coque. Une plaque est une structure plate avec une direction mince qui est appelée l'épaisseur, et une coque est une structure courbée dans l'espace avec une pareille épaisseur. Les structures avec deux dimensions petites, sont appelées poutres, barres ou poteaux. Généralement on n'atteint pas une précision satisfaisante de

la solution d'un problème élastique linéaire avec une (ou plus) petite(s) dimension(s) lorsqu'on utilise une formulation par éléments finis 3D.

2.2 Problèmes des valeurs limites :

2.2.1 Introduction :

Il y a deux sortes de forces qui agissent sur un solide, les forces de volume et les forces surfaciques. Les forces de volume sont celles qui agissent partout dans le volume (forces de gravité, électrostatiques, etc.). Les forces surfaciques sont celles qui agissent sur la surface extérieure ou celle de séparation des deux parties d'un corps. La surface peut être réelle, ou imaginaire. Les forces surfaciques sont décrites en termes de vecteurs contraintes. Sur la Figure.2.1, le corps en équilibre occupe le domaine Ω , sa frontière étant $\partial\Omega$. Les conditions aux limites cinématiques sont données sur le sous domaine $\partial\Omega_D$. Lorsque les forces surfaciques \mathbf{t} , et les forces de volume \mathbf{f} sont appliquées sur le système, on essaye de trouver les déplacements \mathbf{u} qui satisfassent les conditions d'équilibre. En d'autres termes les déplacements \mathbf{u} , sont considérés comme un ensemble de toutes les solutions possibles qui satisfassent les fonctions admissibles des déplacements, ou les conditions aux limites cinématiques.

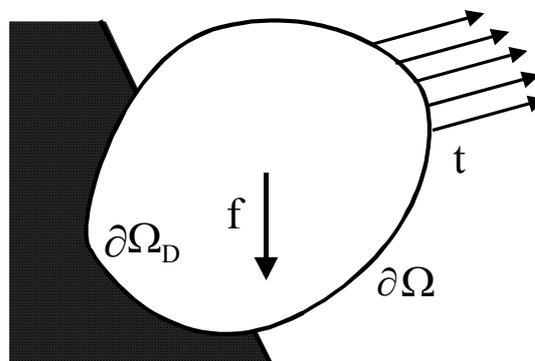


Fig. 2.1 Charges et conditions aux limites d'un corps solide

Le corps est élastique et linéaire donc obéit à la loi de Hooke. On connaît généralement les transformations microscopiques des matériaux, tels que l'acier et le caoutchouc, par exemple, qui sont isotropes et les contraintes internes dépendent toutes des déplacements. On donne les conditions aux limites cinématiques et/ou statiques dans tous les points de la surface du corps $\partial\Omega$. Les forces surfaciques sont données en tout points sauf sur $\partial\Omega_D$.

2.2.2 Forme forte du problème :

Les modèles mathématiques se présentent très souvent sous la forme de systèmes d'équations différentielles qui lient des fonctions inconnues à leurs dérivées partielles. Des conditions initiales et des conditions aux limites sont en général requises pour compléter le modèle. Pour tirer une information pertinente sur le processus physique modélisé, il est essentiel de trouver la fonction satisfaisant l'équation différentielle et les conditions aux limites. En élasticité plane, trois formulations sont généralement employées :

- formulation tensorielle en coordonnées libres,
- formulation en notation indicielle et
- formulation matricielle.

Le problème précédant peut être formulé comme suit, \mathbf{t} et \mathbf{f} sont données, on cherche les déplacements \mathbf{u} qui satisfont :

- Equations d'équilibre (équation de Cauchy pour le mouvement)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0 \quad (2.1)$$

Les équations d'équilibre de Cauchy sont la version continue de la deuxième loi de Newton du mouvement. En état d'équilibre statique, la somme des forces superficielles (divergence du tenseur des contraintes) et les forces de volume (\mathbf{f}) est égale à zéro.

- Equations des conditions aux limites :

$$\sigma_{ij} \cdot n_i = t_j \quad \text{sur } \partial\Omega - \partial\Omega_D \quad (2.2a)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \partial\Omega_D \quad (2.2b)$$

Un champ de contrainte continu, qui satisfait les équations d'équilibres et les conditions aux limites statiques (2.2a) est dit statiquement admissible. Un champ de déplacement continu, qui satisfait les conditions aux limites cinématiques (2.2b) est dit géométriquement admissible. Un champ de contrainte admissible et un champ de déplacement admissible peuvent être formulés indépendamment.

- Relations déformation déplacement :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

- Relations contrainte déformation (Relations constitutives) :

$$\sigma_{ij} = \kappa (\text{div } u) \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij}^D(u) \quad (2.4)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} & \quad \text{Contraintes de Cauchy} \\ \kappa = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} & \quad \text{Module de compression,} \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} & \quad \text{Module de coulomb} \\ \nu & \quad \text{Coefficient de Poisson} \\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} & \quad \text{Symbole de Kronecker} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^D & \quad \text{Déformation linéaire, déformation déviatrice} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} (\text{divu}) \delta_{ij} & \\ \text{divu} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}) & \end{aligned}$$

Les relations constitutives (2.4) peuvent inclure des effets thermiques. Pour beaucoup de matériaux, dans leur gamme d'utilisation, ces lois peuvent être prises comme linéaires.

2.2.3 Forme faible (variationnelle) du problème :

La MEF est toujours associée à l'analyse approximative de la forme faible des équations différentielles. Les forces surfaciques \mathbf{t} et celles du volume \mathbf{f} étant données, on peut déterminer \mathbf{u} qui satisfait :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad (2.5)$$

Et c'est la forme faible du problème. La notation δ est utilisée pour toutes les quantités virtuelles.

Avec,

$$\varepsilon_{ij}(\delta u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right)$$

2.3 Elasticité plane :

2.3.1 Etat plan de déformation :

L'état plan de déformation est associé à une situation, où l'une des dimensions d'un corps (mur par exemple) est très grande par rapport aux deux autres (Figure.2.2), chargé par une force qui est uniformément distribuée et perpendiculaire a la direction de la longueur.

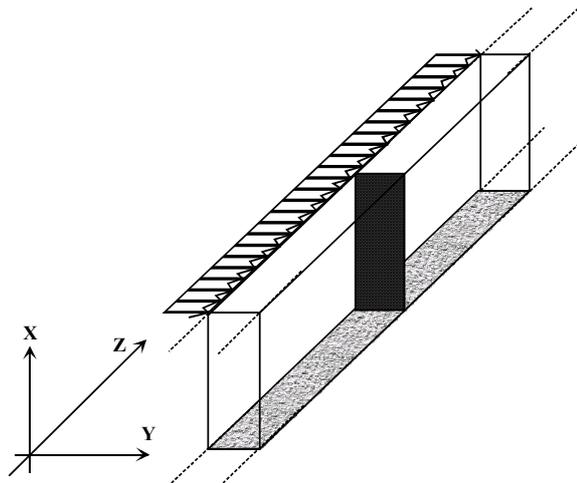


Fig. 2.2 Etat plan de déformation

Dans cette situation, si on enlève une tranche de section, le déplacement dans la direction z peut être considéré comme nul. Les dérivées des déplacements dans cette même direction sont nulles, c'est-à-dire que : $\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} = 0$

Pour l'état plan de déformation, l'intégrant dans le premier terme de la partie gauche de la relation (2.5) peut être exprimé par :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) &= \sigma_x \varepsilon_x(\delta u) + \tau_{xy} \varepsilon_{xy}(\delta u) \\ &+ \tau_{yx} \varepsilon_{yx}(\delta u) + \sigma_y \varepsilon_y(\delta u) \end{aligned} \quad (2.6a)$$

En utilisant la propriété de symétrie de $\sigma_{ij}(u)$ et $\varepsilon_{ij}(\delta u)$ par rapport à i et j.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) &= \sigma_x \varepsilon_x(\delta u) + \tau_{xy} \gamma_{xy}(\delta u) + \sigma_y \varepsilon_y(\delta u) \\ &= \{\boldsymbol{\varepsilon}(\delta u)\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} \end{aligned} \quad (2.6b)$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(\delta u)\}, \{\boldsymbol{\sigma}\} \text{ sont définies par: } \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}(\delta u)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\delta u) \\ \varepsilon_y(\delta u) \\ \gamma_{xy}(\delta u) \end{Bmatrix}; \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.7a,b)$$

2.3.2 Matrice des constantes élastiques (matrice contrainte- déformation) :

Basé sur la relation entre σ_{ij} et ε_{ij} , on lie $\{\boldsymbol{\sigma}(u)\}$ et $\{\boldsymbol{\varepsilon}(u)\}$ par la matrice $[D]$

$$\{\boldsymbol{\sigma}(u)\} = [D]\{\boldsymbol{\varepsilon}(u)\} \quad (2.8)$$

$[D]$ étant la matrice des constantes élastiques.

Les composantes de σ_{ij} dans $\{\boldsymbol{\sigma}(u)\}$ sont données par,

$$\sigma_x = \kappa(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_x - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (2.9a)$$

$$\sigma_y = \kappa(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_y - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (2.9b)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.9c)$$

On peut les mettre sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4G/3 & -2G/3 & 0 \\ -2G/3 & 4G/3 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Les intégrants σ_{ij} et $\varepsilon_{ij}(\delta u)$ dans la partie gauche de la relation (2.5) peuvent être exprimés par:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) = \{\varepsilon(\delta u)\}^T [D] \{\varepsilon(u)\} \quad (2.11)$$

2.3.3 Etat plan de contraintes :

Une structure plane et mince est en état plan de contraintes (Figure.2.3), quand les charges sont appliquées dans son plan. L'épaisseur de la structure est toujours très petite par rapport aux autres dimensions et est symétrique de part et d'autre du plan (x,y), appelé surface neutre.

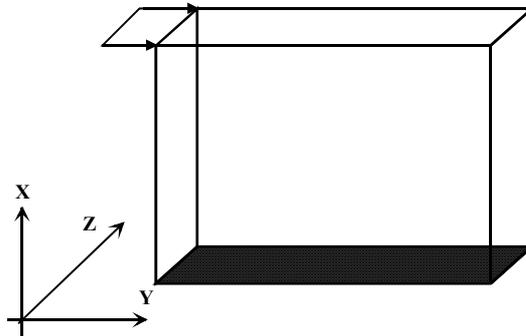


Fig. 2.3 Etat plan de contrainte

Ainsi les contraintes σ_z , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{zy} , τ_{yz} , deviennent nulles. La déformation ε_{zz} n'est pas nulle par effet de Poisson.

Dans les deux cas de figures, états plans de contraintes et de déformations, nous pouvons tirer profit des situations les caractérisant pour rendre les calculs plus faciles. De la même manière que pour l'état plan de déformation on aboutit à :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\delta u) &= \sigma_x\varepsilon_x(\delta u) + \tau_{xy}\gamma_{xy}(\delta u) + \sigma_y\varepsilon_y(\delta u) \\ &= \{\varepsilon(\delta u)\}^T \{\sigma\}\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$\{\varepsilon(\delta u)\}, \{\sigma\} \text{ sont définies par: } \quad \{\varepsilon(\delta u)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\delta u) \\ \varepsilon_y(\delta u) \\ \gamma_{xy}(\delta u) \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.13a,b)$$

$$\sigma_{ij} = \kappa(\operatorname{div} u)\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^D(u) \quad (2.14)$$

2.3.4 Matrice des constantes élastiques :

Basé sur la relation entre σ_{ij} et ε_{ij} , on lie $\{\sigma(u)\}$ et $\{\varepsilon(u)\}$ par la matrice $[D]$.

$$\{\sigma(u)\} = [D]\{\varepsilon(u)\} \quad (2.15)$$

Les composantes de σ_{ij} dans $\{\sigma(u)\}$ sont données par,

$$\sigma_x = \kappa(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.16a)$$

$$\sigma_y = \kappa(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.16b)$$

$$\sigma_z = \kappa(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0 \quad (2.16c)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.16d)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad ; \quad \gamma_{zx} = 0 \quad (2.16e,f)$$

Si on conduit en plus des transformations, on peut donner la relation suivante :

$$\varepsilon_z = \frac{\frac{2G}{3} - \kappa}{\frac{4G}{3} + \kappa} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (2.17)$$

Les relations (2.16a,b) deviennent :

$$\sigma_x = \frac{2G\left(\frac{2G}{3} + 2\kappa\right)}{\frac{4G}{3} + \kappa} \varepsilon_x + \frac{2G\left(\kappa - \frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3} + \kappa} \varepsilon_y \quad (2.18a)$$

$$\sigma_y = \frac{2G\left(\kappa - \frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3} + \kappa} \varepsilon_x + \frac{2G\left(\frac{2G}{3} + 2\kappa\right)}{\frac{4G}{3} + \kappa} \varepsilon_y \quad (2.18b)$$

On peut les mettre sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2G\left(\frac{2G}{3} + 2\kappa\right)}{\frac{4G}{3} + \kappa} & \frac{2G\left(\kappa - \frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3} + \kappa} & 0 \\ \frac{2G\left(\kappa - \frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3} + \kappa} & \frac{2G\left(\frac{2G}{3} + 2\kappa\right)}{\frac{4G}{3} + \kappa} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

De la même façon que précédemment, les intégrants σ_{ij} et $\varepsilon_{ij}(\delta u)$ dans la partie gauche de la relation (2.5) peuvent être exprimés par:

$$\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(\delta u) = \{\varepsilon(\delta u)\}^T [D]\{\varepsilon(u)\} \quad (2.19)$$

2.4 Fonctions de forme :

Le champ des déplacements \mathbf{u}_i peut être défini en fonction des déplacements nodaux $\mathbf{u}_i^{(k)}$, des fonctions de forme $N^{(k)}$ et s'écrit :

$$u_i = N^{(k)} u_i^{(k)} \quad (2.20)$$

Lorsqu'on suppose qu'on a un état plan de déformation ou de contrainte, le vecteur déformation comporte seulement les composantes : $\boldsymbol{\varepsilon}_x, \boldsymbol{\varepsilon}_y, \boldsymbol{\gamma}_{xy}$. En générale le déplacement dans la direction \mathbf{z} n'est pas utilisé. Les déformations linéaires et les déplacements nodaux sont liés par la matrice $[B]$:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(u)\} = [B] \{u_i^{(k)}\} \quad (2.21)$$

$\{u_i^{(k)}\}$ est défini, selon le nombre de nœuds et de d.d.l par :

$$\{u_i^{(k)}\} = \left\{ \begin{array}{c} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ \vdots \\ u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

Puisque on a $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, dont on a besoin pour calculer les déformations et les déplacements, on peut écrire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_j} u_i^{(k)}$$

Avec,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (2.23a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (2.23b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (2.23c)$$

La matrice [B] peut, selon le nombre (n) de nœuds se présenter sous forme :

$$[B^{(k)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$[B] = \left[[B^{(1)}], [B^{(2)}], \dots, [B^{(n)}] \right]$$

2.5 Matrice de rigidité élémentaire :

En utilisant [B] et l'intégrant $\sigma_{ij}(u)\epsilon_{ij}(\delta u)$ dans le terme gauche de la relation (2.5), on peut avoir l'expression :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(\delta u) &= \{\epsilon(\delta u)\}^T \{\sigma\} \\ &= \{\epsilon(\delta u)\}^T [D]\{\epsilon(u)\} \\ &= \{\delta u_i^{(k)}\}^T [B]^T [D][B]\{u_i^{(k)}\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Les quantités $\{\delta u_i^{(k)}\}$ et $\{u_i^{(k)}\}$ sont les valeurs des déplacements au niveau des points nodaux, et qui ne dépendent pas du domaine d'intégration car ils sont constants dans cette région, donc on peut les mettre hors de l'intégrale.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{\delta u_i^{(k)}\}^T [B]^T [D] [B] \{u_i^{(k)}\} d\Omega \\ = \{\delta u_i^{(k)}\}^T \left[\int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \right] \{u_i^{(k)}\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

La matrice suivante est appelée la matrice de rigidité élémentaire, qui est la pièce maîtresse dans la MEF :

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (2.27)$$

2.6 Vecteur des forces nodales équivalentes :

Pour les intégrales de la partie droite de l'équation (2.5), et en utilisant la relation (2.20) on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \delta u_i \cdot t_i dS = \int_{\partial\Omega} \{\delta u_i^{(k)}\}^T [N]^T \{t\} dS \\ = \{\delta u_i^{(k)}\}^T \int_{\partial\Omega} [N]^T \{t\} dS \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta u_i \cdot f_i d\Omega = \int_{\Omega} \{\delta u_i^{(k)}\}^T [N]^T \{f\} d\Omega \\ = \{\delta u_i^{(k)}\}^T \int_{\Omega} [N]^T \{f\} d\Omega \end{aligned} \quad (2.28b)$$

Avec,

$$[N] = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & \dots & N^{(n)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & \dots & 0 & N^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Le vecteur des forces extérieures est défini comme suit :

$$\{F^{(e)}\} = \int_{\partial\Omega} [N]^T \{t\} dS + \int_{\Omega} [N]^T \{f\} d\Omega \quad (2.29)$$

δu reste nul dans la région superficielle donnée par les conditions aux limites cinématiques (2.2b).

2.7 Principes énergétiques :

2.7.1 Introduction :

Tel qu'il a été exposé, au 18ème siècle par Euler, les équations de la théorie de l'élasticité peuvent être aussi développées à partir de considérations énergétiques. En effet, ces principes fournissent des outils puissants pour obtenir des solutions approximatives et la mise en œuvre des techniques de solution des méthodes numériques.

2.7.2 Principe du Travail Virtuel :

Le travail virtuel peut être défini comme "le travail exécuté sur un corps déformable, par toutes les forces qui agissent sur lui, lorsque le corps subit un hypothétique petit déplacement qui est compatible avec les contraintes présentes". Le symbole " δ ", est l'opérateur de variation. En général, les chargements consistent en des forces de volume et des forces de surface (superficielles), ces dernières agissent sur une partie de la surface extérieure (Figure.2.1) désignée par $(\partial\Omega - \partial\Omega_D)$. Sur la partie qui reste de la surface désignée par $\partial\Omega_D$, agit le champ \mathbf{u} des déplacements. $\delta \mathbf{u}$ étant un déplacement virtuel nodal cinématiquement admissible.

Par conséquent, le travail virtuel peut être défini par :

$$\delta W_{virt} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\partial\Omega} t_i \cdot \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \cdot \delta u_i d\Omega \quad (2.30)$$

On peut maintenant introduire les conditions aux limites statiques (2.2a) et appliquer le théorème de la divergence pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} t_i \cdot \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \cdot \delta u_i d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \cdot n_j \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \cdot \delta u_i d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left[(\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} + f_i \cdot \delta u_i \right] d\Omega \quad (2.31) \\
 &= \int_{\Omega} \left[(\sigma_{ij,j} + f_i^{=0}) \delta u_i + \sigma_{ij} (\delta u_{i,j}) \right] d\Omega
 \end{aligned}$$

Pour que la condition d'équilibre soit satisfaite, le premier terme de la dernière intégrale doit être nul. Le produit du tenseur symétrique des contraintes avec la partie anti-symétrique de $\delta u_{i,j}$ est égal à zéro. La partie symétrique de $\delta u_{i,j}$ n'est rien d'autre que la variation du tenseur des déformations, on peut écrire l'expression suivante, connue comme étant le Principe du Travail Virtuel, PTV (similaire à la relation 2.5):

$$\int_{\partial\Omega} t_i \cdot \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \cdot \delta u_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega \quad (2.32)$$

Il est intéressant de noter que l'équation ci-dessus est indépendante des relations constitutives et peut être appliquée à tous les matériaux continus dans les hypothèses des petites déformations.

2.7.3 Principe du Travail Virtuel Complémentaire :

Pour parvenir à un autre principe variationnel utile, nous pouvons varier le champ des contraintes et les forces appliquées, en tenant fixe le champ des déplacements.

$$\delta W_{virt}^* = \int_{\partial\Omega} \delta T dS + \int_{\Omega} \delta f d\Omega = \int_{\partial\Omega} u_i \delta T_i dS + \int_{\Omega} u_i \delta f_i d\Omega \quad (2.33)$$

En employant une approche similaire à celle utilisée pour le PTV, nous pouvons écrire le Principe du Travail Complémentaire Virtuel, PTCV, comme suit:

$$\int_{\partial\Omega} u_i \delta T_i dS + \int_{\Omega} u_i \delta f_i d\Omega = \int_{\partial\Omega} \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} d\Omega \quad (2.34)$$

2.7.4 Principe de l'énergie potentielle totale :

La forme générale des expressions constitutives pour un milieu continu élastique peut s'écrire comme suit:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.35)$$

Dans la quelle ψ est la densité d'énergie de déformation. Si nous substituons l'expression ci-dessus dans l'équation (2.32), nous allons avoir :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} t_i \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta \psi d\Omega = \delta \int_{\Omega} \psi d\Omega = \delta U \end{aligned} \quad (2.36)$$

Où U est l'énergie de déformation totale emmagasinée dans le corps. La partie gauche de l'équation (2.36) peut être définie comme la variation de l'énergie potentielle $-P$, donc nous pouvons écrire :

$$-\delta P = \delta U \Rightarrow \delta(U + P) = 0$$

ou bien

$$\delta \Pi = 0 \quad (2.37)$$

Dans laquelle Π est l'énergie potentielle totale du corps.

2.7.5 Principe de l'énergie potentielle complémentaire totale :

Le principe de l'énergie potentielle complémentaire totale peut être tiré du principe du principe du travail complémentaire virtuel en considérant une densité d'énergie de déformation spécifique complémentaire comme une fonction des contraintes tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.38)$$

En conséquence, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u_i \delta T_i dS + \int_{\Omega} u_i \delta f_i d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^*}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta \psi^* d\Omega = \delta \int_{\Omega} \psi^* d\Omega = \delta U^* \end{aligned} \quad (2.39)$$

Où U^* est l'énergie de déformation complémentaire emmagasinée dans le corps. Le terme gauche de l'équation (2.39) peut être défini comme la variation dans l'énergie potentielle $-P^*$, on peut écrire donc :

$$-\delta P^* = \delta U^* \Rightarrow \delta(U^* + P^*) = 0$$

ou bien

$$\delta \Pi^* = 0 \quad (2.40)$$

Dans laquelle Π^* est l'énergie potentielle complémentaire totale du corps.

2.7.6 Energie de déformation :

Le travail créé à l'intérieur de la matière de part sa déformation sous l'application des actions extérieures, est restitué lorsque le solide est déchargé. Cette aptitude interne, de la

matière, à fournir un travail du fait qu'elle est déformée, s'appelle énergie de déformation. Pour les corps élastiques, cette énergie peut être définie comme suit :

$$U = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \right) d\Omega \quad (2.41)$$

2.7.7 L'énergie de déformation complémentaire :

Contrairement à l'énergie de déformation, l'énergie de déformation complémentaire n'a pas d'interprétation physique évidente. Pour les corps élastiques, cette énergie peut être définie comme suit:

$$U^* = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} \right) d\Omega \quad (2.42)$$

Il est clair que dans le domaine de l'élasticité linéaire nous aurons :

$$U = U^* \quad (2.43)$$

CHAP.03

Modèle en déformation
et Condensation statique

CHAPITRE 03

MODELE DE DEFORMATION ET CONDENSATION STATIQUE

3.1 Introduction :

Ce chapitre contient une revue bibliographique sur le modèle en déformation et les divers aspects qui entourent la compréhension de celui-ci, le but est de faire le bilan de ce qui existe sur ce sujet. Un autre aspect concerne la description et la définition générale du principe de la condensation statique. Afin de bien comprendre et cerner la problématique de la conception du modèle en déformation, il est intéressant de répondre aux deux questions suivantes :

- Quels sont les avantages du modèle en déformation ?
- Comment utiliser ce modèle dans les structures ?

Les réponses à ces questions sont abordées dans les sections qui suivent.

3.2 Différents modèles :

3.2.1 Modèle en déplacement :

Dans ce modèle le but c'est d'exprimer le déplacement, en tout point d'un solide, cela est réalisé en formulant le déplacement comme une combinaison linéaire de fonctions de forme (§2.4). Une matrice de rigidité approximative peut être trouvée pour chaque élément, liant toutes les forces aux déplacements des nœuds. Les déplacements peuvent être par conséquent calculés, ainsi que les contraintes dans l'élément, une fois les déplacements nodaux sont connus. L'approximation du champ de déplacements pour résoudre les problèmes d'élasticité est toujours continue, mais ce n'est en général pas le cas des dérivées partielles de cette approximation. Dans les problèmes pratiques, on désire en général connaître les contraintes, on doit au préalable calculer d'abord les composantes de la déformation et utiliser ensuite les

équations de constitution pour calculer ces contraintes. Les dérivées partielles de l'approximation des composantes de déplacement peuvent cependant poser de sérieux problèmes d'interprétation aux valeurs nodales. Les contraintes et les déformations seront approximatives et discontinues aux frontières de l'élément. Les déplacements sont approximatifs mais continus aux frontières de l'élément. L'approximation en déplacements minimise l'énergie potentielle totale. Les éléments de déplacement pur sont cinématiquement admissibles, ils assurent la continuité des déplacements à l'intérieur de l'élément et d'un élément à l'autre. Dans ce cas, le champ de contraintes, déduit du champ de déplacements, vérifie les équations d'équilibre en moyenne mais pas localement.

Les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale (3.1) forment la formulation faible du problème, voir aussi relation (2.36) §2.7.4.

$$-\int_{\partial\Omega} t_i u_i dS - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \int_{\Omega} \psi d\Omega = \Pi \quad (3.1)$$

3.2.2 Modèle d'équilibre :

Le principe de ce modèle consiste dans un premier temps à choisir une forme paramétrique simple du champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre (2.1). On définit ainsi un ensemble de solutions admissibles. Pour imposer la réciprocité des tractions de surface à la frontière de deux éléments, il est nécessaire de choisir des connecteurs définissant univoquement ces tractions d'interface. Dans un second temps on recherche, dans cet ensemble de solutions, celle qui rend l'énergie potentielle complémentaire totale minimum. Pour cela on annule la variation première de la fonctionnelle (3.2) par rapport aux paramètres définissant le champ de contraintes.

$$-\int_{\partial\Omega} u_i T_i dS - \int_{\Omega} u_i f_i d\Omega + \int_{\Omega} \psi^* d\Omega = \Pi^* \quad (3.2)$$

Le modèle en équilibre n'a pas connu le même succès que le modèle en déplacement, en partie à cause de sa grande complexité. Les éléments du modèle d'équilibre pur sont statiquement admissibles et assurent la continuité de contraintes à l'intérieur de l'élément et d'un élément à l'autre. Le champ de déplacement est déduit du champ de contrainte, où les conditions de compatibilité ne sont vérifiées qu'en moyenne et non localement.

3.2.3 Modèle mixte :

Plusieurs champs indépendants (déplacement, déformation, contrainte) sont considérés ici, ce qui rend la formulation, ou la mise au point longue et coûteuse ; mais en contrepartie les éléments qui en découlent sont d'excellente qualité. On utilise parfois ce modèle pour corriger certains défauts du modèle de déplacement.

3.2.4 Modèle hybride :

Deux interpolations indépendantes sont considérées, l'une portant sur le champ intérieur de l'élément, l'autre sur le champ décrivant la frontière. Les paramètres inconnus du champ intérieur sont exprimés en fonction des paramètres nodaux du champ de bord. On cherche à minimiser la différence entre les deux champs. Ces derniers peuvent être du même type (déplacement- déplacement) ou de types différents (déplacement- contrainte). En général ce modèle donne des résultats meilleurs que le modèle déplacement surtout au niveau des contraintes. Parmi les modèles hybrides, le modèle Trefftz est considéré, actuellement parmi les plus précis.

3.3 Modèle en déformation :

3.3.1 Définition :

Un élément basé sur le modèle en déformation signifie que sa formulation s'obtient en intégrant un champ de déformation défini auparavant, dont les fonctions sont indépendantes. Cette idée qui a, de plus, fait sa gloire est basée sur un calcul exact des termes représentant les modes rigides, les autres composantes du champ de déplacement sont basées sur l'intégration de présumées fonctions indépendantes de déformation et le tout vérifie les équations de compatibilités (3.3)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (3.3)$$

Cette approche permet la représentation du champ de déplacement par un ordre élevé des termes des polynômes sans avoir besoin d'introduire des degrés de liberté supplémentaires ni de nœuds intermédiaires. Les éléments produits sont non-conformes mais conduisent à des résultats très encourageants. En plus, la convergence obtenue est rapide, lorsque les résultats sont comparés avec ceux donnés par des éléments basés sur le modèle en déplacement ayant le même nombre de d.d.l.

3.3.2 Classification du modèle en déformation :

Des études menées [Ashw.71a] sur la convenance d'éléments simples, (basés sur les déplacements) destinés aux structures courbes, ont montré que pour obtenir des résultats satisfaisants de convergence, on doit en avoir un très grand nombre. L'approche basée sur la déformation a été développée [Ashw.71b] pour palier à ce problème et était appliquée non seulement aux structures présentant des formes courbées mais aussi pour les structures présentant des formes planes [Sabi.83a]. Les

auteurs de cette approche ont fait d'elle un succès foudroyant et une très nombreuse descendance. Cette approche offre une combinaison de propriétés des autres modèles. A savoir, l'utilisation des mêmes étapes que celles du modèle en déplacement après formulation du champ de déplacement. Dans le cas du modèle en contrainte, ou celui mixte, qui sont généralement basés sur un champ de contrainte, les équations d'équilibre local sont souvent introduites. Concevoir une approche en déformation demande une bonne réflexion, car le fait de formuler le champ des déformations, bien qu'il est facile de le faire, il est plus complexe de vérifier les relations cinématiques déformation-déplacement (2.3) surtout lorsqu'on rajoute la vérification des équations d'équilibre local (2.1). En effet, le passage de six équations de déformation à trois équations de déplacement est souvent délicat. C'est afin d'améliorer la représentation correcte du comportement de ces structures qu'on a introduit ce modèle, offrant ainsi des éléments possédant des propriétés intéressantes.

3.4 Critères de convergence :

Un des critères principaux pour qu'un élément fini soit validé, pour une application générale dans la mécanique des structures, est qu'il soit en mesure de représenter les modes de corps rigides et ceux des déformations constantes. La représentation adéquate de ces modes est une condition nécessaire pour qu'on ait une bonne précision et des propriétés de convergence. Donc, lorsqu'une théorie imprudente est employée pour le développement d'un élément fini, de faux modes de corps rigides et de déformation peuvent apparaître.

3.5 Avantages du modèle en déformation :

L'utilisation du modèle en déformation apporte de nombreux avantages en terme de comportement des structures. En effet, on tire profit des bonnes adaptations pour la

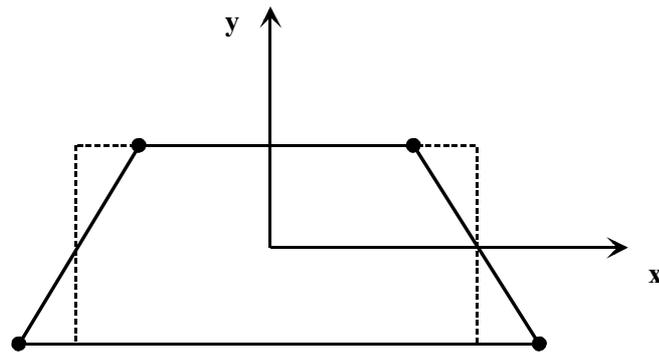
description exacte des mouvements : corps rigides et déformations constantes. Ainsi, les éléments développés permettront d'augmenter la performance des résultats, avec seulement un nombre limité d'éléments. Les avantages des éléments à modèle en déformation sont ([Bela.99]) :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide).
- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées).
- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires.

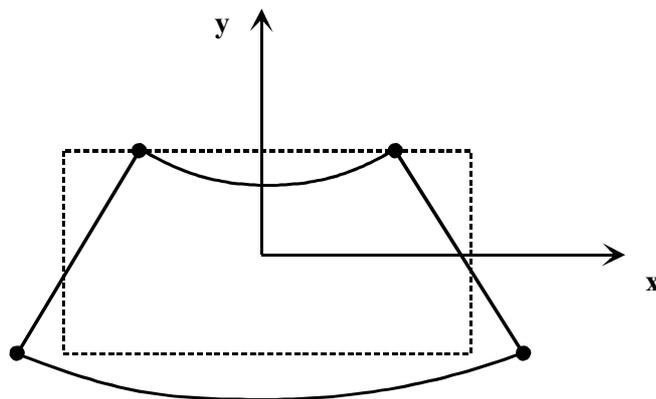
3.6 Utilisation du modèle en déformation dans l'analyse des structures :

Les éléments basés sur la déformation ont de très nombreuses applications, à commencer par les structures courbes, telles que : coques cylindriques, arcs, hémisphères, etc. Comme on peut les retrouver dans les structures planes minces et épaisses, plaque, murs, etc. Et de manière générale, dans tous les types de structures. Le but recherché le plus souvent en choisissant un élément basé sur la déformation parmi d'autres est le gain appréciable en matière du nombre d'éléments, et ce, pour un même nombre de nœuds. D'autres applications visent plutôt une augmentation de la fiabilité des éléments. Pour les structures telles que les poutres à parois minces, l'élément utilisé permet d'approcher les solutions analytiques, tout en utilisant un nombre minimum d'éléments. Dans ce cas on emploie des éléments membranaires basé sur ce modèle, ce qui permet d'améliorer les points faibles de l'élément traditionnel basé sur les déplacements, pour un même nombre de nœuds, à savoir la

sur rigidité et la linéarité à la flexion (Figure.3.1). L'utilisation de ce modèle peut améliorer plusieurs propriétés, tel que décrit dans la section §3.3. Plusieurs investigations ont d'ailleurs été effectuées dans cette optique. Les conditions d'équilibre et de compatibilité peuvent être satisfaites selon le type d'élément utilisé. Ce dernier variera en fonction des géométries des structures.



(a) linéarité à la flexion pour le modèle basé sur le déplacement



(b) rapprochement du comportement réel pour le modèle basé sur la déformation

Figure 3.1 : Comportement d'un élément a quatre noeud lors de la flexion dans le plan

3.7 Revue de littérature :

Dans la grande famille des chercheurs de l'université de Cardiff au Royaume Uni, nombreux parmi eux ont adopté et pendant longtemps le modèle basé sur le modèle en déformation. La raison essentielle était surtout liée aux performances des éléments développés, qui sont utilisés en un nombre très réduit. L'approche basée sur la déformation est l'une des approches les plus utilisées en sciences appliquées de

l'ingénieur et il existe une littérature considérable sur le sujet. Ashwell et al [Ashw.71a] dans une étude sur les structures courbées (arcs circulaires), ont fait le constat suivant: pour approcher les solutions connues de ce type de structure, on devra utiliser un très grand nombre d'éléments. Juste après cette constatation les mêmes auteurs [Ashw.71b] ont utilisé des fonctions de déformation indépendantes pour développer des éléments pour l'analyse des coques cylindriques, ils ont aboutit a de très bons résultats, avec seulement une utilisation d'un nombre limité d'éléments. Dans la même année Sabir et Ashwell [Sabi.71] montrent l'efficacité de l'élément basé sur le modèle en déformation à travers les résultats donnés en analysant les problèmes d'oscillations libres dans le plan des anneaux circulaires. Un retour sur l'analyse des coques cylindriques a travers l'article de Sabir et Lock [Sabi.72], par la suite des améliorations ont été apportées [Ashw.72] aux éléments de coque cylindrique et testés sur un cylindre pincé libre sur les cotés; même constat, toujours des résultats de plus en plus performants, soit pour les déplacements ou pour les contraintes. Des résultats plus précis que ceux de l'élément simplifié de Sabir [Sabi.72] ont été atteints. Un autre pas en avant avec des éléments pour l'analyse des arcs circulaires dans le domaine géométriquement non-linéaire, ces éléments sont supérieurs aux éléments classiques. Une extension du travail précédant a été apportée [Sabi.73], pour développer des éléments arcs se déformant hors plan de courbure [Sabi.75]. L'attention ensuite se focalise pour développer [Sabi.78] des éléments de coque, pour les charges concentrées et le calcul des contraintes aux voisinages de ces charges, pour les coques minces, forces radiales ou moments concentrés. Des résultats qui correspondent aux solutions théoriques données par Flugge [Flug.66] sont atteints. Un grand intéressement pour les éléments rectangulaires et quadrilatéraux de coque cylindriques avec les recherches de Sabir et Cherchafi

[Sabi.82]. Venue ensuite l'occasion de s'occuper de l'analyse des problèmes généraux de l'élasticité plane [Sabi.83a], avec le développement d'éléments rectangulaires avec pour chaque nœud deux degrés de liberté satisfaisant le MCR, les déformations constantes, les équations de compatibilités, et pour d'autres versions la satisfaction de l'équilibre local. La grande innovation à l'époque, c'était l'introduction de la rotation dans le plan par Sabir et Chow [Sabi.83b] pour l'analyse du flambement des panneaux plans avec ouvertures circulaires et carrées. L'année suivante a vu l'utilisation des mêmes éléments [Sabi.84] pour l'analyse des voiles avec ouvertures. L'attention s'est focalisée ensuite sur le développement et l'amélioration [Sabi.85a] des éléments rectangulaires et triangulaires ayant des rotations dans le plan au niveau des nœuds avec aboutissement à des résultats très satisfaisants avec un nombre réduit d'éléments. Des éléments secteurs en coordonnées polaires ont été développés ensuite [Sabi.85b]. Toujours avec les éléments secteurs en coordonnées polaires [Sabi.86] avec 2 d.d.l. par nœud pour l'analyse des problèmes en élasticité plane, différents tests avec différents rapports de forme (aspect ratio) sur des cylindres épais sous pression interne ont été menés. De très bons degrés de précision ont été atteints avec seulement un nombre limité d'éléments. Bouzrira a ensuite développé un élément secteur [Bouz.86] avec incorporation des rotations dans le plan (12ddl/élément). Cet élément fut modifié et amélioré par Djoudi [Djou.90], qui a suggéré que les déformations de cisaillement soient indépendantes. Une grande première, qui a fait un scoop [Sabi.95a] à l'époque, avec l'introduction de la technique de condensation statique et de l'équilibre local dans la formulation des éléments rectangulaires et triangulaires avec nœuds centraux, comme nœuds internes. L'analyse des coques et plaques avec grandes déformations (problèmes géométriquement non linéaires) fut investit par Sabir et Djoudi, [Sabi.95b] en formulant des éléments adéquats basés sur

la déformation. Dans la même année ces deux auteurs, ont développé des éléments finis pour modéliser les dômes présentant de simple et double courbures, pour des épaisseurs constantes et variables [Djou.95]. L'année suivante a vu la naissance d'éléments [Sabi.96] pour l'analyse des silos, dû à Sabir et Moussa, ces mêmes auteurs ont développé des éléments [Sabi.97a] pour les toits en coque sous forme de flûte conique. Sabir et Davis se sont intéressés aux éléments modélisant les plaques avec ouvertures et soumises à des forces dans le plan, avec calcul des fréquences naturelles [Sabi.97b], [Sabi.97c]. Des auteurs [Bela.98a] établis en Algérie se sont vus éblouir par ce modèle, ont amélioré des éléments secteurs déjà existants en incorporant des rotations dans le plan avec 12 ddl/ élément. Dans la même année et pour la première fois dans les annales de ce modèle Belarbi et Charif [Bela.98c], ont pu tester des éléments 3D basés sur la déformation, de très bonnes performances ont été enregistrées avec utilisation du principe de changement de la loi de comportement dû à Ahmad [Ahma.70]. La machine a pris de la vitesse par le développement et l'amélioration de plusieurs éléments de différents types pour l'analyse des problèmes de l'élasticité linéaire et même dans le domaine non linéaire [Bela.98b], [Bela.99] et [Bela.00]. L'analyse des structures de forme en « barils » a eu sa part avec le développement d'éléments covariants [Assa.99]. Un élément tridimensionnel vérifiant les équations d'équilibre pour la flexion des plaques minces et épaisses a été développé [Maal.02]. Un retour sur les éléments rectangulaires avec rotation dans le plan [Mous.02], dans un but de les améliorer. Les nouvelles générations s'occupant de ce modèle se sont vus frayer des chemins [Djou.03] dans les domaines non linéaires et ceux des vibrations des coques cylindriques [Djou.04a], de très bons résultats ont été obtenus. Djoudi et Bahai [Djou.04b] se sont ensuite intéressés à l'analyse des vibrations des panneaux cylindriques avec ouvertures et

l'influence de ces dernières sur le comportement dynamique des structures citées. Retour sur les éléments pour l'analyse des problèmes anti-plans, Belouar et Guenfoud [Belo.05] ont développé de nouveaux éléments modélisant la flexions des plaques et tout récemment [Bela.05] un intéressement pour le développement d'éléments secteurs par Bourezane [Bour.06].

3.8. Condensation statique :

Il se peut qu'un élément contienne certains nœuds qui ne peuvent être connectés à d'autres (des autres éléments), on les appelle nœuds internes. Etant isolés, les d.d.l internes peuvent être soustraits à l'assemblage en les éliminant préalablement au niveau de la relation « force-déplacement » de l'élément. Cette opération purement algébrique s'appelle condensation, "sous- structuration" ou encore méthode de supers éléments, utilisable tant en analyse statique que dynamique. La technique de condensation est couramment utilisée dans la M.E.F, chaque fois qu'on désire éliminer des degrés de liberté.

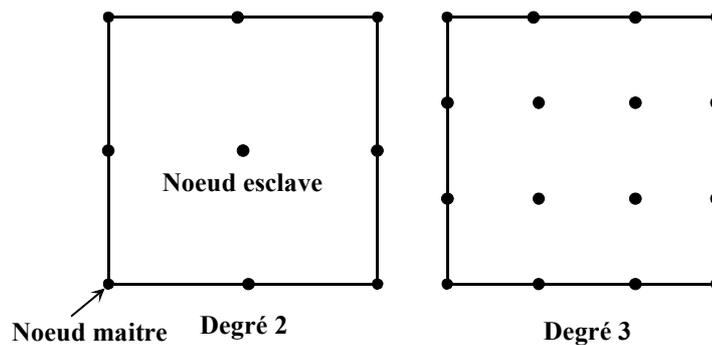


Figure 3.2 : Eléments avec nœuds internes (modèle de déplacement)

Les degrés de liberté du modèle initial sont séparés en degrés de liberté de jonction ou maîtres et degrés de libertés internes ou esclaves (Figure.3.2) qui vont être éliminés.

Le vecteur complet des d.d.l \mathbf{x} s'écrit alors : $\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_j \end{Bmatrix}$ et on partitionne en

conséquence. Le système d'équation régissant l'équilibre statique du modèle s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ddl interne} \\ \leftarrow \text{ddl de jonction} \end{array} \quad (3.4)$$

La prise en compte des conditions d'équilibre au niveau des degrés de liberté internes, qui ne sont pas susceptibles d'être connectés à d'autres d.d.l, permet d'écrire une relation de dépendance linéaire entre les déplacements internes et externes :

$$\{\mathbf{x}_i\} = -[\mathbf{K}_{ii}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{ij}] \{\mathbf{x}_j\} + [\mathbf{K}_{ii}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_i\} \quad (3.5)$$

Cette relation permet d'exprimer l'énergie potentielle totale du modèle en fonction des seuls déplacements aux d.d.l de jonction. Le système (3.4) est alors équivalent au système condensé suivant :

$$[\bar{\mathbf{K}}_{jj}] \{\mathbf{x}_j\} = \{\bar{\mathbf{F}}_j\} \quad (3.6)$$

Avec :
$$[\bar{\mathbf{K}}_{jj}] = [\mathbf{K}_{jj}] - [\mathbf{K}_{ji}] [\mathbf{K}_{ii}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{ij}] \quad (3.7a)$$

Et
$$\{\bar{\mathbf{F}}_j\} = \{\mathbf{F}_j\} - [\mathbf{K}_{ji}] [\mathbf{K}_{ii}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_i\} \quad (3.7b)$$

Les d.d.l internes, incluant tous ceux qui ne sont pas retenus, sont condensés et "rangés" dans le vecteur $\{\mathbf{x}_j\}$. Il faut noter que condenser ne signifie pas éliminer purement et simplement certains d.d.l., mais reporter sur ceux qui sont retenus la rigidité de ceux qui sont condensés. Pour la matrice de rigidité élémentaire de l'élément développé (avant et après condensation), voir Annexe B.

CHAP.04

Développement d'un nouvel élément
pour l'élasticité plane

CHAPITRE 04

DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT POUR L'ELASTICITE PLANE

4.1 Introduction :

Dans un problème de milieu continu de dimension quelconque, les variables du champ possèdent une infinité de valeurs, car elles sont fonction de chaque point du corps ou du domaine. La procédure de discrétisation par éléments finis réduit le problème en limitant le nombre d'inconnues, ceci en partageant le domaine en éléments et en exprimant le champ en termes de fonctions d'approximations pour chaque élément. Les fonctions d'approximations (appelées aussi fonctions d'interpolation) sont définies en termes des variables du champ en des points spécifiques appelés noeuds ou points nodaux. Les noeuds se situent le plus souvent sur les frontières de l'élément. En plus des noeuds de frontière, un élément peut avoir aussi un ou plusieurs noeuds internes, qui peuvent être condensés par la suite (Figure.3.2). Les valeurs nodales et les fonctions d'interpolation des éléments définissent de manière complète le comportement du champ des variables dans les éléments. Pour la représentation d'un problème par éléments finis, les valeurs nodales deviennent les inconnues. Une fois que ces inconnues sont trouvées, les fonctions d'interpolation définissent le champ de variable à travers l'assemblage des éléments. La nature de la solution et le degré d'approximation dépendent non seulement de la taille et le nombre des éléments employés mais aussi des fonctions d'interpolation choisies. Souvent les fonctions sont choisies pour que le champ des variables ou ses dérivées soient continues à travers les frontières entre les éléments adjacents. Indépendamment de l'approche utilisée pour trouver les propriétés des éléments, la solution d'un problème de mécanique de milieu continu par la MEF suit toujours un

processus de "pas-par-pas". Pour récapituler en terme général comment la MEF travaille, nous allons lister ces étapes :

- *Discrétiser le milieu*
- *Choisir les fonctions d'Interpolation*
- *Trouver les propriétés de l'élément*
- *Assembler les propriétés des éléments pour obtenir les systèmes d'équations*
- *Imposer les conditions aux limites*
- *Résoudre le système d'équations*
- *Procéder a des calculs supplémentaires si nécessaire*

4.2 Construction de l'élément R4BM :

4.2.1 Définitions :

L'élément développé à travers cette approche est basé sur des fonctions de déformation plutôt que sur celles du déplacement. Cette approche a été d'abord appliquée dans l'analyse des coques et des structures courbées [Ashw.71b]. Plus tard Sabir [Sabi.83a] a montré que l'application de cette approche n'est pas limitée seulement aux éléments courbes, mais peut être employée pour développer des éléments efficaces pour résoudre les problèmes généraux de l'élasticité plane. L'élément représente exactement les modes de corps rigide et permet aussi de vérifier les équations de compatibilité. A la différence des éléments conventionnels, les fonctions de forme ne sont pas indépendantes mais liées conformément aux relations cinématiques déplacement-déformation (2.3). Dans le modèle en déplacements, les fonctions d'interpolation sont tirées a partir des termes du triangle de Pascal (pyramide de Pascal en 3D, voir Annexe A), donc le nombre total des constantes indépendantes est égal au nombre de degrés de liberté de l'élément. Les éléments de

membrane sont parmi les éléments les plus simples à développer. Ces éléments sont employés dans l'analyse de structures soumises à des forces dans le plan. On suppose que la structure est dans le plan xy et lorsque la translation s'opère dans la direction x , respectivement y , les déplacements de tout point de ce plan sont désignés par u , respectivement par v . On considère seulement les contraintes normales (σ_x, σ_y) et la contrainte tangentielle τ_{xy} . Les contraintes dans la direction perpendiculaire au plan de la structure sont supposées être nulles. Les éléments de membranes sont employés en générale pour modéliser les structures minces ou en feuillet et même les coques soumises aux actions membranaires.

4.2.2 Considérations analytiques:

L'élément membrane développé (Figure.4.1) R4BM est particulièrement utilisé pour modéliser des structures minces où les rapports entre les dimensions (épaisseur/longueur caractéristique) sont de l'ordre de $1/10$. L'élément, possède seulement les degrés de liberté essentiels, et utilise le concept de la condensation statique [Bath.76]. L'efficacité de ces éléments a été démontrée et la convergence des résultats pour les contraintes et les déplacements a atteint un degré de précision très satisfaisant, en comparaison avec les éléments conventionnels de premier ordre rectangulaires plans. La présente formulation en éléments finis est basée sur une approximation simple et efficace pour les structures planes, via l'élément rectangulaire développé. Pour l'état plan de contrainte, les inconnues fondamentales consistent en deux déplacements (u, v), trois déformations ($\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \gamma_{xy}$) et trois contraintes ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$) par nœud. La formulation la plus simple basée sur la déformation pour les éléments bi- dimensionnelles est utilisée.

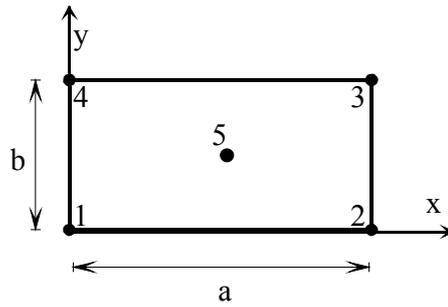


Figure 4.1 : Coordonnées et points nodaux pour l'élément rectangulaire R4BM

Les relations déformation- déplacement en élasticité plane sont données par:

Avec,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.1a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.1b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.1c)$$

Si $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ (déformations nulles), les relations (4.1) peuvent être intégrées pour obtenir:

$$u_R = a_1 - a_3 y \quad (4.2a)$$

$$v_R = a_2 + a_3 x \quad (4.2b)$$

Ces relations représentent les mouvements de corps rigide (translation et rotation).

L'élément possédant dix d.d.l., le champ de déplacement doit donc contenir dix coefficients indépendants, trois ont été utilisés pour la représentation du MCR équations (4.2), le reste se répartie sur le champ des déformations de la manière suivante:

$$\varepsilon_{xx} = a_4 + a_5 y + a_9 x \quad (4.3a)$$

$$\varepsilon_{yy} = a_6 + a_7 x + a_{10} y \quad (4.3b)$$

$$\gamma_{xy} = a_8 \quad (4.3c)$$

Ces relations doivent d'abord vérifier l'équation de compatibilité des déformations pour l'élasticité plane:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4.6)$$

Dans les équations (4.3), les coefficients a_4 , a_6 et a_8 sont les termes correspondant aux états constants des déformations, ce qui assure la convergence lorsqu'on raffine le maillage. Quant au comportement linéaire des déformations, il est assuré par les constantes a_5 , a_7 , a_9 et a_{10} . En intégrant les relations (4.3) conformément aux équations (2.3) ou (4.1) et en les rajoutant aux relations (4.2) on a :

$$u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - 0,5 a_7 y^2 + 0,5 a_8 y + 0,5 a_9 x^2 \quad (4.5a)$$

$$v = a_2 + a_3 x - 0,5 a_5 x^2 + a_6 y + a_7 xy + 0,5 a_8 x + 0,5 a_{10} y^2 \quad (4.5b)$$

Où u et v sont les déplacements suivant les directions x et y respectivement, le MCR est représenté par les termes associés aux constants a_1 , a_2 et a_3 quant aux déformations, elles sont représentées par le reste des constantes.

Par ailleurs, les relations (4.6) représentent le champ de déformations d'une autre version de l'élément, avec seulement un réarrangement des différentes constantes :

$$\varepsilon_{xx} = a_4 + a_5 x + a_6 y \quad (4.6a)$$

$$\varepsilon_{yy} = a_7 + a_8 x + a_9 y \quad (4.6b)$$

$$\gamma_{xy} = a_{10} \quad (4.6c)$$

Cette version produit une convergence rapide des déplacements, mais ne donne pas de bons résultats pour les contraintes et aura le champ des déplacements suivants :

$$u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_6 xy + 0,5 a_5 x^2 - 0,5 a_8 y^2 + 0,5 a_{10} y \quad (4.7a)$$

$$v = a_2 + a_3 x - 0,5 a_6 x^2 + a_7 y + a_8 xy + 0,5 a_9 y^2 + 0,5 a_{10} x \quad (4.7b)$$

4.2.3 Evaluation de la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$

L'évaluation de la matrice élémentaire de rigidité passe a travers l'évaluation de l'expression suivante :

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (4.8)$$

Avec

$$[K_0] = e \iint_S [Q]^T [D][Q] dx dy \quad (4.9)$$

Pour $[Q]$; $[D]$; $[A]$; $[A^{-1}]$; $[A^{-1}]_{\text{cond}}$ et $[K_0]$ voir Annexe B

Il est a noter que la matrice de rigidité résultante, possède trois, et seulement trois, valeurs propres nulles qui sont nécessaires pour la satisfaction des mouvements

généraux de corps rigides, et l'élément ne contient aucun mode parasite. Etant donné que la matrice $[A]$ et son inverse peuvent être évaluées numériquement, on réalise alors que l'évaluation de l'intégrale (4.9) devient la clé du problème. La forme de l'élément est régulière, l'intégration numérique se réduit à une intégration analytique.

4.2.4 Vecteur forces nodales équivalentes:

Les travaux virtuels des charges réparties (surfiques et de volume) appliquées sur la structure continue sont:

$$\int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{t}_i d\mathbf{S} = \left\{ \delta \mathbf{u}_i^{(k)} \right\}^T \int_{\partial\Omega} [\mathbf{N}]^T \{ \mathbf{t} \} d\mathbf{S} \quad (4.10a)$$

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{f}_i d\Omega = \left\{ \delta \mathbf{u}_i^{(k)} \right\}^T \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T \{ \mathbf{f} \} d\Omega \quad (4.10b)$$

Le champ de déplacement continu étant discrétisé par l'utilisation des fonctions de forme, on remplace les forces réparties par des forces ponctuelles sur le d.d.l. de l'élément, énergétiquement conjuguées (travail généré par les charges réparties est égal au travail généré par les charges ponctuelles sur les d.d.l. choisis. Ces forces étant globalement équivalentes au sens de l'énergie.

$$\left\{ \mathbf{F}_S^{(e)} \right\} = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{N}]^T \{ \mathbf{t} \} d\mathbf{S} \quad (4.11a)$$

$$\left\{ \mathbf{F}_S^{(e)} \right\} = [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{e} \left[\int_0^a [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{Bmatrix} d\mathbf{x} \right] \quad (4.11b)$$

$$\left\{ \mathbf{F}_V^{(e)} \right\} = \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T \{ \mathbf{f} \} d\Omega \quad (4.12a)$$

$$\{\mathbf{F}_V^{(e)}\} = [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{e} \left[\int_0^a \int_0^b [\mathbf{f}(x, y)]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} dx dy \right] \quad (4.12b)$$

4.2.5 Calcul des contraintes:

Pour ce modèle, le champ de déplacement est continu sur toute la structure (au niveau des nœuds), par contre le champ de contrainte est discontinu d'un élément à un autre. La contrainte dans chaque nœud est connue par la moyenne des contraintes dans ce même nœud commun à plusieurs éléments.

$$[\sigma] = [\mathbf{D}][\mathbf{Q}][\mathbf{A}^{-1}]\{\mathbf{u}_i^{(k)}\} \quad (4.13)$$

4.3 Tests numériques:

La méthode des éléments finis étant une technique approximative, donc elle peut engendrer des erreurs. Par conséquent, les chercheurs ont établi plusieurs tests pathologiques pour valider n'importe quel élément. Les tests sont en mesure de détecter les paramètres qui peuvent affecter la précision de l'élément. Les résultats numériques de plusieurs éléments rectangulaires plans sont utilisés et comparés avec ceux obtenus à partir du présent élément R4BM. Ces éléments sont dénommés comme:

SBRIE : élément rectangulaire plan basé sur la déformation (Strain Based Rectangular In plane Element) [Sabi.75]

SBRIE1 : élément rectangulaire plan basé sur la déformation avec un nœud interne (Strain Based Rectangular In plane Element with an internal node) [Sabi.95a]

Q4 : élément quadrangle standard avec 4 nœuds.

La plus part des exemples traités se trouvent dans la littérature pour valider les performances des éléments. On remarquera que les éléments SBRIE et SBRIE1 donnent exactement les mêmes résultats pour tous les cas traités (les différents champs de ces éléments, voir Annexe C).

4.3.1 Poutre console mince élancée soumise a une force a l'extrémité :

La poutre console mince élancée soumise à une force à l'extrémité est un problème standard pour tester la fiabilité des éléments finis [Nati.00]. E et ν désignent le module de Young et le coefficient de Poisson. Ces paramètres ainsi que le maillage sont montrés sur la Figure.4.2, quant aux résultats, ils sont représentés dans le Tableau.4.1.

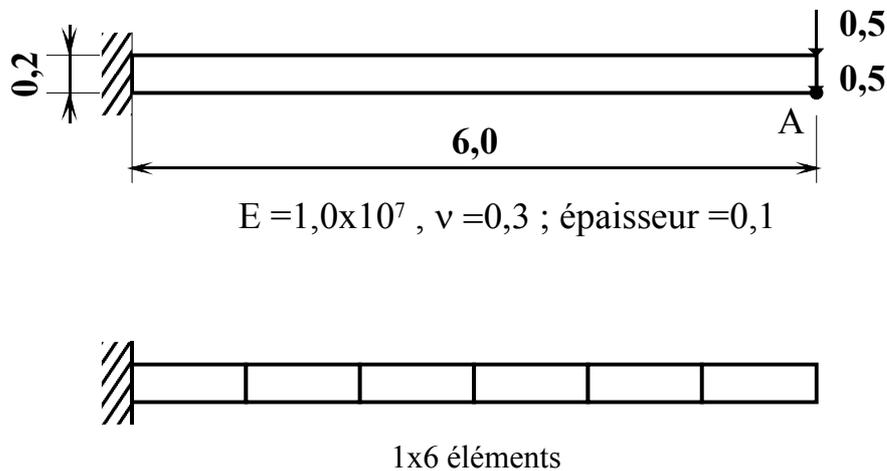


Figure 4.2 : Poutre console mince élancée soumise a une force au bout

Pour un maillage 1x6, l'élément R4BM améliore remarquablement les solutions données par les éléments SBRIE et SBRIE1 et s'approche de très près de la solution exacte.

Maillage	Fleche normée a l'extrémité
	1 x 6
SBRIE	0,903
Q4	0,093
R4BM	0,992
SBRIE1	0,903
Analyt.	1,000 (0,1081)

Tableau 4.1 : Flèche normée au point A d'une poutre console mince élancée soumise a une force de cisaillement a l'extrémité

4.3.2 Poutre console mince élancée soumise a une flexion pure à l'extrémité :

Les valeurs de la flèche au bout d'une poutre console mince élancée soumise à une flexion pure sont comparées en utilisant le présent élément R4BM. La géométrie, les paramètres et la distribution du maillage sont montrés sur la Figure.3. En utilisant quatre types de maillage, les valeurs des flèches normées de l'élément R4BM sont calculées et comparées avec celles données par d'autres éléments (Tableau.4.2).

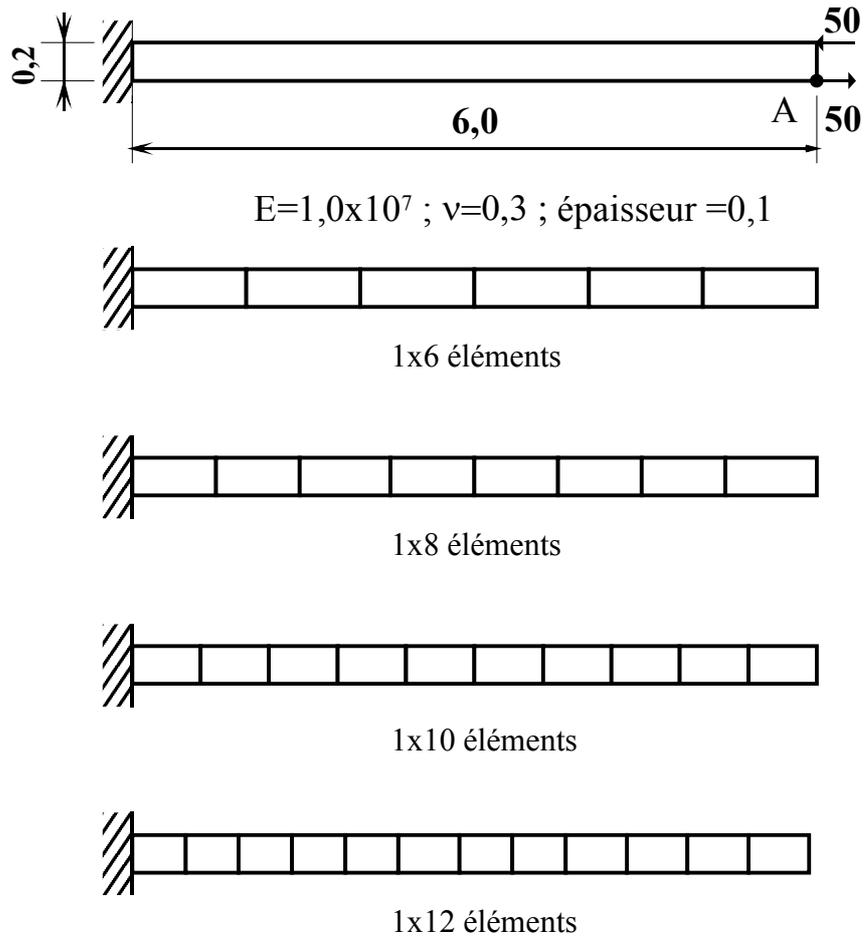


Figure 4.3 : Poutre console élancée soumise a la flexion pure

Fleche normée a l'extrémité				
Maillage	1x 6	1x 8	1x 10	1x 12
SBRIE	0,91	0,91	0,91	0,91
Q4	0,093	0,153	0,219	0,285
R4BM	1,000	1,000	1,000	1,000
SBRIE1	0,91	0,91	0,91	0,91
Analyt.	1,000 (0,270)			

Tableau 4.2 : Flèche normée au point A, d'une poutre console soumise a la flexion pure

Un point important à noter, est que la solution exacte peut être obtenue par l'élément R4BM. Les résultats donnés par SBRIE et SBRIE1 sont relativement précis.

4.3.3 Les tests du rapport de forme pour une poutre console :

Deux autres tests concernant le problème de la poutre console peuvent être conduits ici, dans le premier cas on fixe les dimensions de la poutre et on fait varier les rapports de forme de l'élément, dans le deuxième cas on fait varier le rapport de forme de la console, en prenant le même maillage.

1 Cas

En plus des exemples faits auparavant, on inclut ici un autre test pour étudier la sensibilité du présent élément en fonction de la variation du rapport de forme [Allm.88]. On considère le comportement d'une poutre console soumise à une force de cisaillement distribuée de manière parabolique et appliquée comme le montre la Figure.4.4. À partir des résultats présentés sur le Tableau.4.3, on remarque que le modèle en déplacement donne de mauvais résultats, et requiert un raffinement du maillage dans le but de rapprocher les solutions connues, par contre le R4BM possède de très bonnes performances et surpasse les éléments de Sabir.

2 Cas

Sabir propose des tests [Sabi.95a] qui sont montrés sur la Figure.4.5. Des poutres consoles larges, modérément larges et fines respectivement. Les consoles considérées ont une épaisseur de $b=0,0625$ m et une longueur $l=10$ m, les propriétés du matériau sont les suivantes: $E= 10^5$ N/mm² et $\nu= 0,2$. On détermine la flèche à l'extrémité de la poutre (Tableau.4.4), l'élément R4BM présente des résultats qui sont très proches des valeurs données par la théorie pour tous les cas considérés.

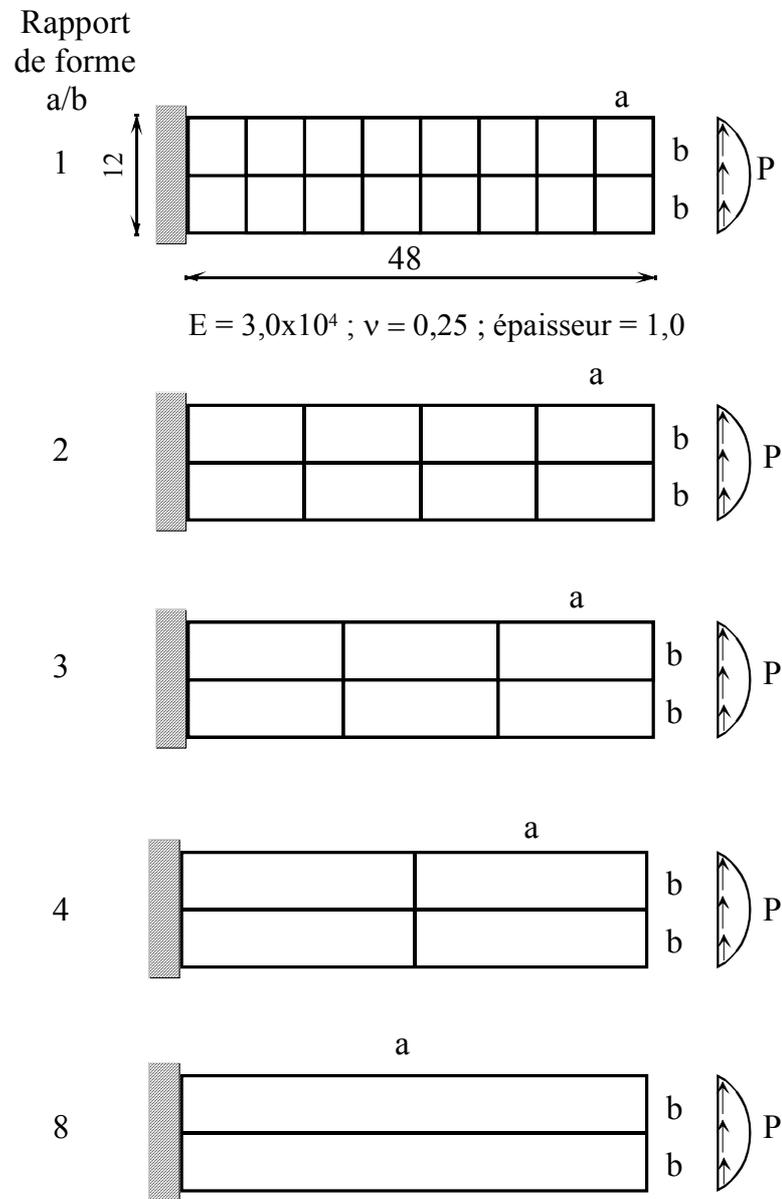


Figure 4.4 : Tests du rapport de forme d'une poutre console soumise a un effort tranchant distribué paraboliquement

Rapport de forme de l'élément a/b	Flèche normée a l'extrémité				
	1.0	2.0	3.0	4.0	8.0
Maillage	2 x 8	2 x 4	2 x 3	2 x 2	2 x 1
SBRIE	0,972	0,957	0,943	0,905	0,738
Q4	0,888	0,699	0,573	0,378	0,134
R4BM	0,988	0,972	0,958	0,919	0,750
SBRIE1	0,972	0,957	0,943	0,905	0,738
Analyt.	1,000 (0,3558)				

Tableau 4.3 : Flèche normée au point A, pour une poutre console soumise a une force de cisaillement a l'extrémité, distribuée paraboliquement

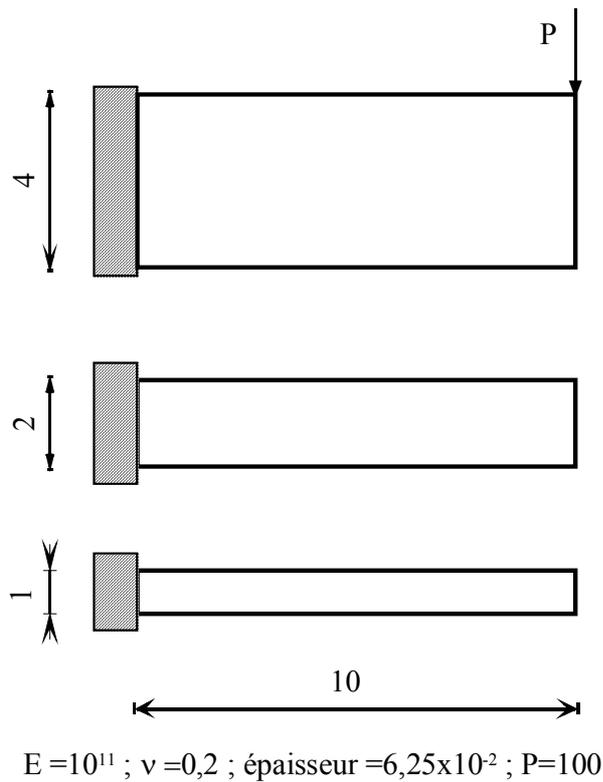


Figure 4.5 : Poutres consoles, large, moyennement large et mince

Poutre console large						
Maillage	2x2	2x4	6x6	8x8	12x12	10x16
SBRIE	0,913	0,929	0,988	0,992	0,995	0,995
Q4	0,591	0,597	0,926	0,956	0,979	0,971
R4BM	0,922	0,932	0,989	0,993	0,996	0,995
SBRIE1	0,913	0,929	0,988	0,992	0,995	0,995
Analyt.	1,000 (1,105)					

Tableau 4.4a : Flèche normée pour une console large

Poutre console moyennement large						
Maillage	2x2	2x4	6x6	8x8	12x12	10x16
SBRIE	0,916	0,923	0,988	0,992	0,996	0,995
Q4	0,275	0,275	0,771	0,856	0,930	0,903
R4BM	0,925	0,926	0,989	0,993	0,996	0,995
SBRIE1	0,916	0,923	0,988	0,992	0,996	0,995
Analyt.	1,000 (8,21)					

Tableau 4.4b : Flèche normée pour une console moyennement large

Poutre console mince						
Mesh	2x2	2x4	6x6	8x8	12x12	10x16
SBRIE	0,915	0,920	0,985	0,990	0,994	0,992
Q4	0,087	0,087	0,461	0,602	0,772	0,703
R4BM	0,924	0,922	0,986	0,990	0,994	0,993
SBRIE1	0,915	0,920	0,985	0,990	0,994	0,992
Analyt.	1,000 (64,52)					

Tableau 4.4c : Flèche normée pour une console mince

4.2.4 Poutre simplement appuyée, chargée au milieu :

La poutre large, simplement appuyée dont les détails sont donnés sur la Figure.4.6, est utilisée dans la littérature des éléments finis [Sabi.85a]. Elle est aussi utilisée ici pour tester les performances du présent élément R4BM, et une comparaison est faite avec les résultats disponibles des éléments cités ci-dessus.

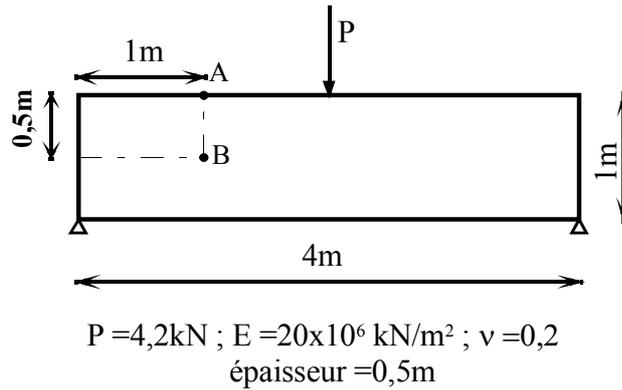


Figure 4.6 : Poutre simplement appuyée chargée au milieu

Les Tableaux 4.5 et 4.6 montrent les résultats obtenus pour les contraintes de flexion normées au point A et les contraintes de cisaillement normées au point B respectivement.

Contraintes de flexion normées au point A				
Maillage	4x12	6x12	8x16	10x20
SBRIE	1,2568	1,0051	0,9886	0,9949
Q4	1,2164	0,9456	0,9667	0,9756
R4BM	1,2592	1,0070	0,9889	0,9956
SBRIE1	1,2568	1,0051	0,9886	0,9949
Exacte	1,000 (25,2)			

Tableau 4.5 : Contraintes de flexion normées au point A

Le présent élément donne des résultats meilleurs que tous les autres éléments. Même pour un maillage grossier le R4BM produit des valeurs qui sont correctes et acceptables vis a vis des résultats utilisés par les ingénieurs dans la pratique.

Contraintes de cisaillement normées au point B				
Maillage	4x12	6x12	8x16	10x20
SBRIE	0,9560	0,9650	0,9784	0,9868
Q4	0,8346	0,8657	0,9233	0,9511
R4BM	0,9577	0,9652	0,9784	0,9868
SBRIE1	0,9560	0,9650	0,9784	0,9868
Exacte	1,000 (6,3)			

Tableau 4.6 : Contraintes de cisaillement normée au point B

Tandis que l'élément Q4 nécessite un maillage très fin pour atteindre une précision satisfaisante. On note que la solution de référence est la solution analytique obtenue à partir de la théorie de l'élasticité. L'élément R4BM est riche en terme d'approximation des contraintes.

CHAP.05

Modélisation des coques
avec éléments plans

CHAPITRE 05

MODELISATION DES COQUES AVEC ELEMENTS PLANS

5.1 Introduction :

Les éléments de coque sont largement utilisés pour modéliser les structures à géométrie courbée [Cook.89], ils sont basés sur la théorie classique des coques et sont très efficaces, mais en revanche difficiles à développer. Il y a quatre types d'éléments de coque : éléments plans, éléments courbes, éléments axisymétriques et éléments solides dégénérés de type Mindlin [Yang.90]. Ces éléments peuvent être classés selon l'épaisseur de la coque et la courbure du feuillet moyen. Selon l'épaisseur, on distingue les éléments de coques minces (Figure.5.1) et les éléments de coques épaisses. Selon la courbure, on a les éléments de coques profondes et les éléments de coques peu profondes. Cependant, à cause de ces complexités, une approche alternative pour modéliser ces structures consiste à utiliser une série d'éléments plans, qui sont plus simples et plus faciles pour l'implantation dans un code.

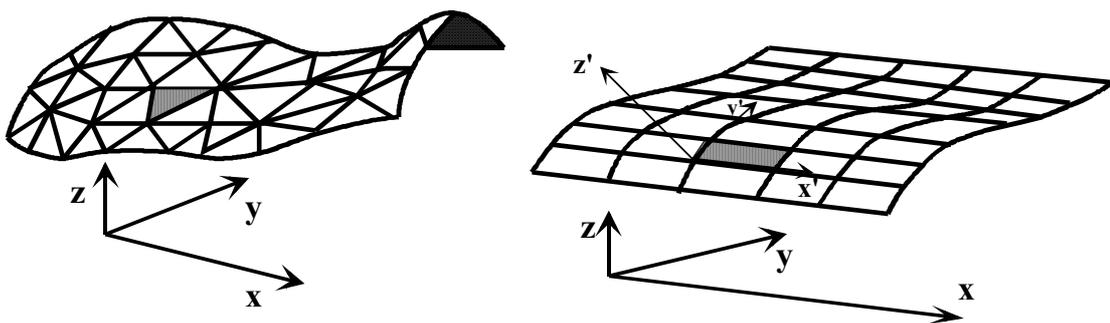


Figure 5.1 : Discretisation des coques par des éléments finis plans triangulaires et rectangulaires

Zienkiewicz [Zien.71] recommande pour modéliser les surfaces courbées, une série d'éléments plans de coque, plutôt que d'utiliser des éléments courbes. Il suggère de combiner des éléments membranaires et des éléments flexionnels pour développer ces

éléments. Cependant, l'efficacité de l'élément et la précision des résultats dépendent en grande partie du type d'élément choisi. L'élément de membrane possède les deux degrés de liberté (de translation) dans le plan et l'élément de flexion possède deux degrés de liberté de rotation et un degré de liberté de translation. Les forces de membrane et de flexion sont totalement indépendantes les unes des autres pour les éléments plans de coque.

5.2. Discrétisation d'une surface courbée par des éléments plans :

Dans le contexte de la MEF, la discrétisation du milieu continu est en mesure de surmonter certaines difficultés liées à la différence classique dans la géométrie (Figure.5.2) en présentant le concept d'une interpolation. Cependant, dans la solution pratique d'un problème de coque, des approximations doivent être invoquées pour surmonter les difficultés théoriques rencontrées dans les formulations de coque classiques, en plus de l'importance pratique de l'approximation de la surface de coque courbée au moyen de petits éléments plans (Figure.5.1).

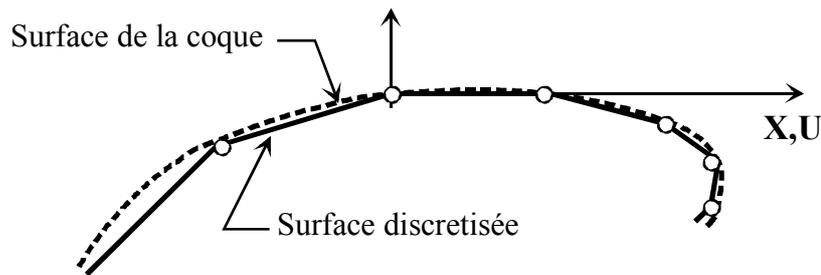


Figure 5.2 : Discrétisation d'une surface courbée par des éléments plans

La fiabilité de cette approximation physique peut être intuitivement prouvée. La convergence de l'assemblage de facettes est assurée lorsque les tailles de ces dernières représentées par les éléments finis plans sont réduites à la limite à laquelle

l'assemblage des facettes s'adapte le plus exactement possible à la surface courbée. De nombreux exemples numériques de la littérature prouvent une telle convergence.

5.3 Construction de l'élément plan de coque R4BM-ACM :

5.3.1 Superposition des deux éléments :

Les éléments plans de coques sont développés en combinant des éléments de membrane ayant deux d.d.l de translation dans le plan et les éléments de flexion des plaques contenant deux d.d.l en rotation et un degré de translation hors du plan. Un raisonnement par superposition de deux éléments « flexionnel et membranaire » a permis de démontrer que des résultats fiables peuvent être obtenus [Zien.71]. La présence de résultats très fiables (Chapitre 04) pour l'élément membranaire est un argument avancé pour justifier le scénario flexion- membrane, cette étude nous a amené à envisager ce scénario permettant de modéliser les structures courbées, l'idée consiste à introduire l'élément ACM réputé très robuste en flexion dû à Adini et Melosh [Adin.61] [Melo.63]. Les trois problèmes de coques suivants, à savoir, le cylindre pincé avec diaphragme, le cylindre pincé sans diaphragme et le toit cylindrique ont été largement employés dans la littérature comme problèmes standards d'évaluation de la précision des éléments finis plans de coques. De là une analyse est menée ici sur la performance de l'élément associé R4BM-ACM (Figure.5.3) pour les problèmes cités auparavant.

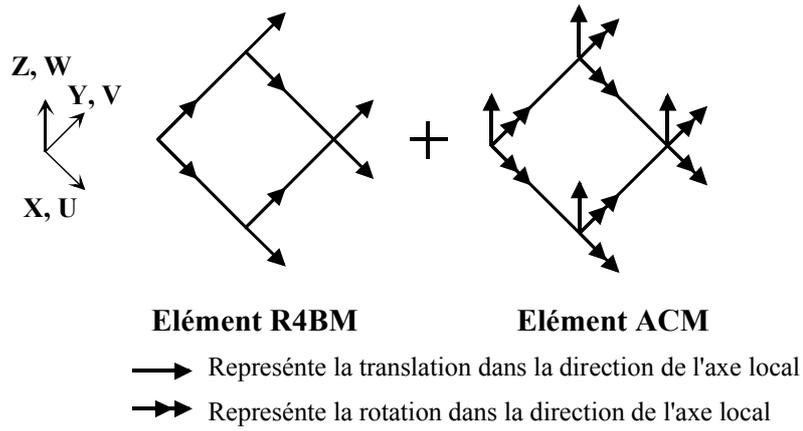


Figure : 5.3 Association de l'élément rectangulaire plan et l'élément ACM

Les éléments de coques possèdent en générale six d.d.l dans chaque nœud, les déplacements nodaux sont (Figure.5.4):

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Pour $i=1,n$

n : nombre de nœuds

u_i, v_i, w_i sont les d.d.l de translation.

$\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ sont les d.d.l de rotation

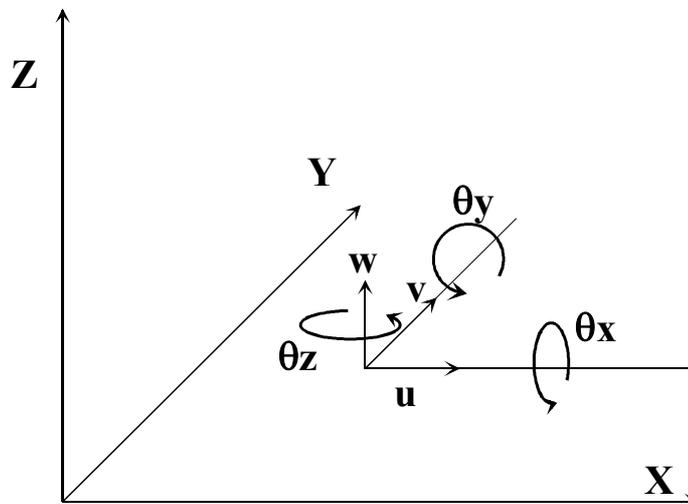


Figure 5.4 : Différents degrés de liberté de l'élément de coque

5.3.2 Élément flexionnel :

Le champ de déplacement de l'élément flexionnel ACM s'obtient à partir de:

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

C'est-à-dire:

$$W = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (5.3a)$$

$$\theta_x = -a_3 - a_5x - 2a_6y - a_8x^2 - 2a_9xy - 3a_{10}y^2 - a_{11}x^3 - 3a_{12}xy^2 \quad (5.3b)$$

$$\theta_y = a_2 + 2a_4x + a_5y + 3a_7x^2 + 2a_8xy + a_9y^2 + 3a_{11}x^2y + a_{12}y^3 \quad (5.3c)$$

On définit le champ de déformation par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Pour la représentation graphique des d.d.l. de l'élément flexionnel ainsi que les matrices $[Q]$; $[A]$; $[A^{-1}]$; et $[K_0]$ voir Annexe D. Pour les champs des déplacements et déformations de l'élément membranaire, on les retrouve dans la section §4.1.2.

La matrice de rigidité de membrane pour chaque noeud est d'ordre 2×2 , et peut être représentée par, $[K_m]_{2 \times 2}$. La matrice de rigidité de flexion pour chaque noeud est

d'ordre 3×3 et est symbolisée par, $[K_f]_{3 \times 3}$. La matrice de rigidité pour chaque noeud de l'élément de coque est d'ordre 6×6 , et est symbolisée par, $[K_e]_{6 \times 6}$.

L'assemblage des composantes des deux matrices de rigidité pour chaque noeud aboutit à l'apparition d'une valeur nulle sur la diagonale, correspondant au d.d.l de rotation θ_z , du moment que cette rotation n'est ni considérée dans l'élément de membrane, ni dans celui de flexion. Cette rigidité nulle provoque une singularité dans la matrice de rigidité de la structure lorsque les éléments sont coplanaires et il n'y a là aucun couplage entre les matrices de membrane et de flexion de l'élément. Il y a plusieurs manières de traiter ce genre de singularité. La première approche [Bath.81] [Knig.97], est d'introduire une valeur fictive pour la rigidité du d.d.l. en rotation. Yang et al. [Yang.00], estime que même si la méthode résout le problème de singularité, elle peut créer un problème de convergence qui mène parfois à des résultats erronés.

La deuxième approche est de développer un élément de membrane, auquel est rajouté le degré de liberté de rotation, appelé *Drilling Degree of Freedom* (voir Annexe E). Cette approche est moins efficace du moment qu'elle engendre un ordre d'intégration numérique plus grand. Cependant, la majorité des éléments plans de coque développés utilisent cette rigidité fictive. Dans cette étude, on a employé la première approche, puisqu'elle est plus facile pour la mise en œuvre et est plus efficace, cette dernière, rapproche étroitement le comportement des coques [Cook.91],[Macn.88]. La matrice de rigidité de l'élément de coques est d'abord assemblée par superposition de la rigidité en membrane et la rigidité en flexion au niveau de chaque noeud. La matrice de rigidité pour chaque noeud de l'élément peut ainsi être représenté par, $[K_e]_{6 \times 6}$.

$$[K_c]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [K_m]_{2 \times 2} & [0]_{2 \times 3} & 0 \\ [0]_{3 \times 2} & [K_f]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & K_r \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Où:

$[K_c]_{6 \times 6}$: est la rigidité dans chaque nœud de l'élément de coque.

$[K_m]_{2 \times 2}$: est la rigidité de membrane de chaque nœud de l'élément de coque.

$[K_f]_{3 \times 3}$: est la rigidité de flexion de chaque nœud de l'élément de coque.

K_r : est la valeur de la rigidité fictive rajoutée dans chaque nœud.

Des détails sur la constitution de la matrice de rigidité de l'élément R4BM-ACM se trouvent en Annexe F. Ces types d'éléments présentent des inclinaisons les uns par rapport aux autres. Avant d'effectuer l'assemblage pour constituer la matrice globale, il est nécessaire d'exprimer les matrices et vecteurs élémentaires dans le système de coordonnées globales (voir Annexe G).

5.3.3 Vecteur forces nodales équivalentes :

Les forces nodales dues aux charges réparties, peuvent être calculées selon les relations standards suivantes:

$$\{F^{(e)}\} = \int_{\partial\Omega} [N]^T \{t\} dS + \int_{\Omega} [N]^T \{f\} d\Omega \quad (5.6a)$$

$$\{F^{(e)}\} = [A^{-1}]^T \left[\int_{\partial\Omega} [f(x, y)]^T \{t\} dS + \int_{\Omega} [f(x, y)]^T \{f\} d\Omega \right] \quad (5.6b)$$

Pour les forces surfaciques:

$$\{F_S^{(e)}\} = [A^{-1}]^T \left[\int_0^b \int_0^a [f(x, y)]^T \begin{Bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dydx \right] \quad (5.7)$$

Et pour les forces de volume:

$$\{F_V^{(e)}\} = [A^{-1}]^T \left[\begin{array}{c} ab \\ e \int \int [f(x,y)]^T \left\{ \begin{array}{c} f \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} dx dy \\ 00 \end{array} \right] \quad (5.8)$$

Avec f(x,y) définie comme suit:

$$f(x,y) := \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & x y^2 & y^3 & y x^3 & x y^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x & -2 y & 0 & -x^2 & -2 x y & -3 y^2 & -x^3 & -3 x y^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 x & y & 0 & 3 x^2 & 2 x y & y^2 & 0 & 3 x^2 y & y^3 \end{array} \right] \quad (5.9)$$

5.3.4 Calcul des contraintes :

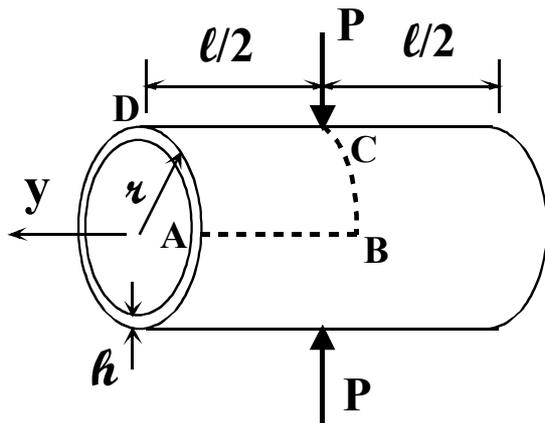
Dans ce modèle, les contraintes étant moins précises que les déplacements, elles peuvent se calculer par l'expression suivante:

$$[\sigma] = [D][Q][A^{-1}] \{u_i^{(k)}\} \quad (5.10)$$

5.4 Applications numériques :

5.4.1 Cylindre pincé avec diaphragmes :

Le cylindre pincé avec des diaphragmes rigides aux extrémités et soumis à deux charges unitaires verticales diamétralement opposées (Figure.5.5), est un test fréquemment utilisé dans les éléments de coques et est également qualifié de sévère par les ingénieurs [Nati.00].



Conditions aux limites :

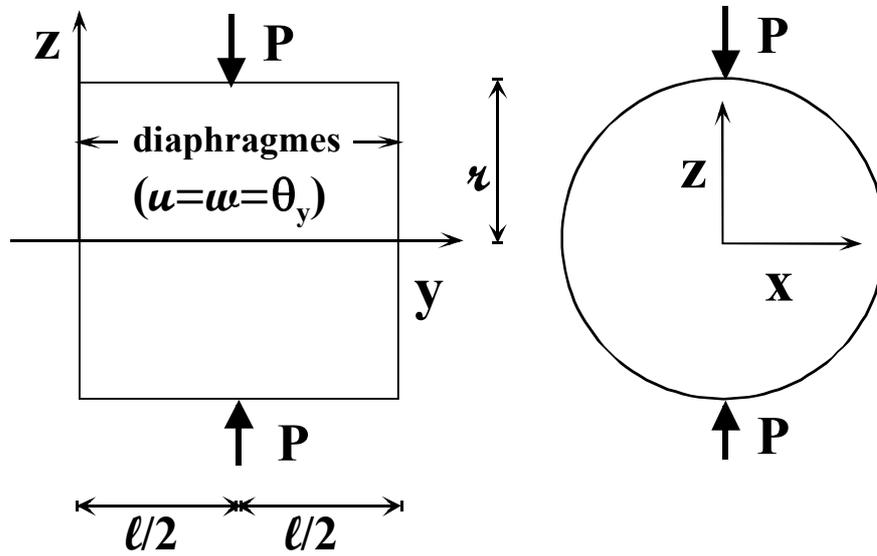
$U=W=\theta_y=0$ sur AD

Symétrie :

$W=\theta_x=\theta_y=0$ sur AB

$V=\theta_x=\theta_z=0$ sur BC

$U=\theta_y=\theta_z=0$ sur CD



$$l=600, r=300, h=3 \quad E=3 \times 10^6, \nu=0,3 \quad P=1$$

Figure 5.5 : Cylindre pincé avec diaphragmes, données

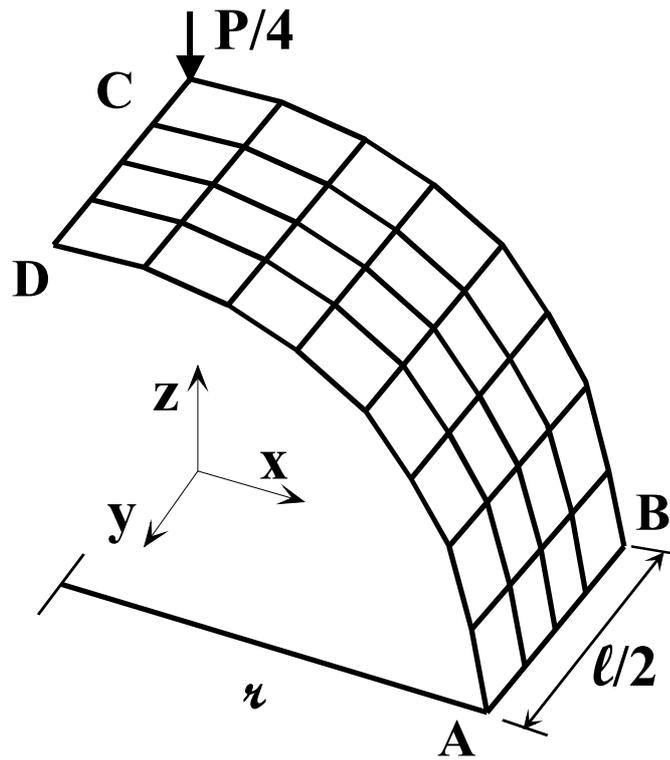


Figure 5.6 : Cylindre pincé avec diaphragmes, maillage

Ce test permet d'examiner l'aptitude d'un élément de coque à simuler des états de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne, notamment au niveau des zones sollicitées (point C). Le cylindre est court ($L/R=2$) et mince ($R/h=100$, $L/h=200$), un octant seulement de la surface totale est modélisé (en raison de la double symétrie) avec différents maillages comme indiqué dans la Figure.5.6, des maillages réguliers au nombre de $N=9$ à 36 éléments sont utilisés. On évalue les déplacements normés au point C. Dans le cylindre pincé, le blocage numérique en cisaillement est plus sévère que celui en membrane.

Le Tableau.5.1 montre la convergence des déplacements W_C suivant la direction z et V_C suivant la direction y en fonction du nombre d'éléments utilisé, les présents résultats semblent converger vers la solution exacte donnée par Flügge [Flug.60] et Lindberg [Lind.69]:

$$W_{ref} = -W_C \frac{Eh}{P} = 164,24 \quad (5.3)$$

$$V_{ref} = -V_D \frac{Eh}{P} = 4,11 \quad (5.4)$$

La flexion est dominante au voisinage du point C. Nous avons représenté sur les figures 5.8, 5.9 et 5.10 les courbes des déplacements, respectivement sur les bords DC, BC et AD. Ces déplacements sont évalués aux nœuds, un bon encadrement de la solution analytique est obtenu par l'élément R4BM-ACM.

Maillage	Déplacements Normés	
	W_C	V_D
3x3	0,272	2,630
4x4	0,719	1,679
5x5	0,861	1,451
6x6	0,955	1,308
Exacte [Flug.60] [Lind.69]	1,000 (164,24)	1,000 (4,11)

Tableau 5.1 : Cylindre pincé avec diaphragmes, convergence de W_C et V_D

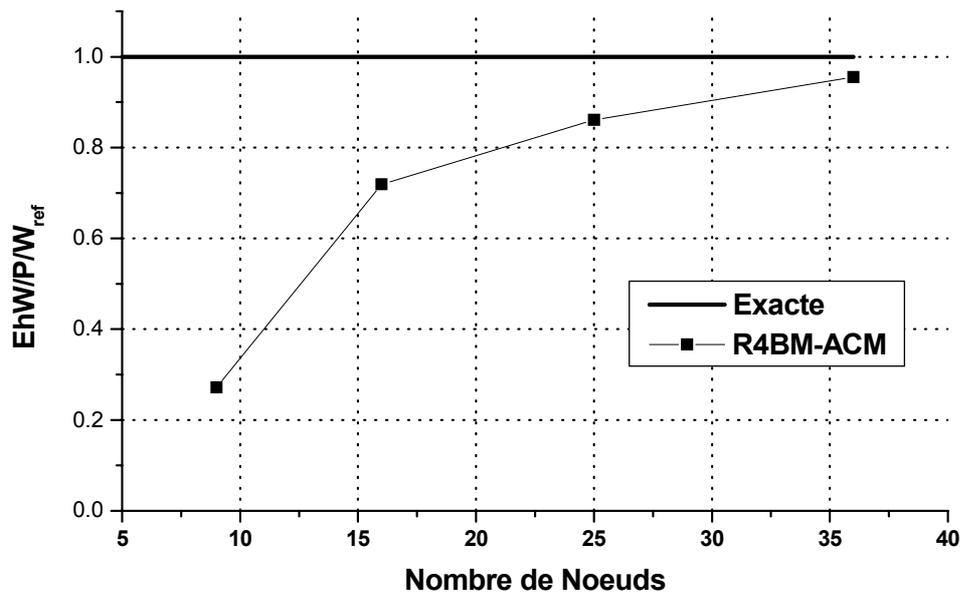


Figure 5.7 : Cylindre pincé avec diaphragme, convergence du déplacement W_C

Les allures de déformations des courbes décrivent bien le comportement réel dans le changement de forme du cylindre.

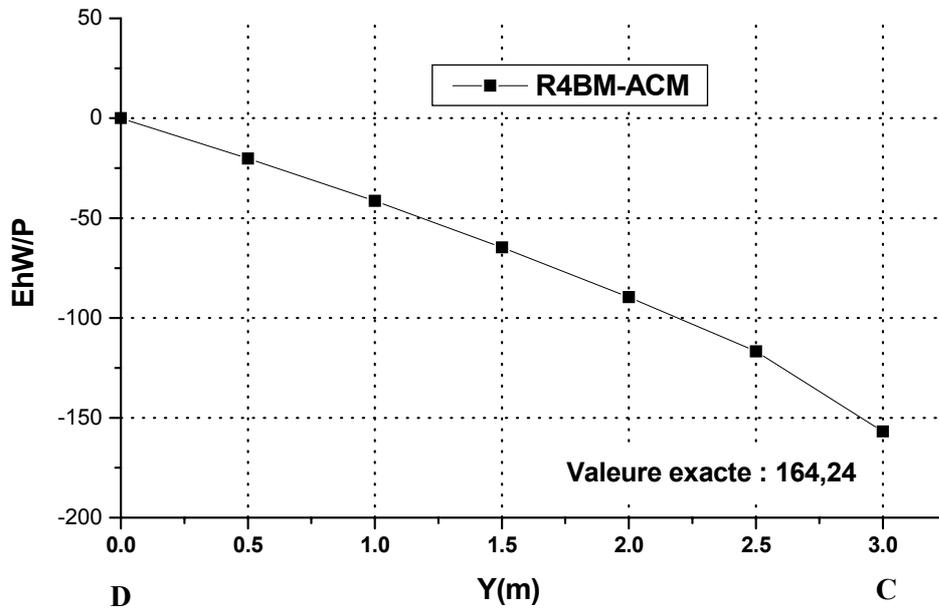


Figure 5.8 : Cylindre pincé avec diaphragme, distribution du déplacement sur le bord DC

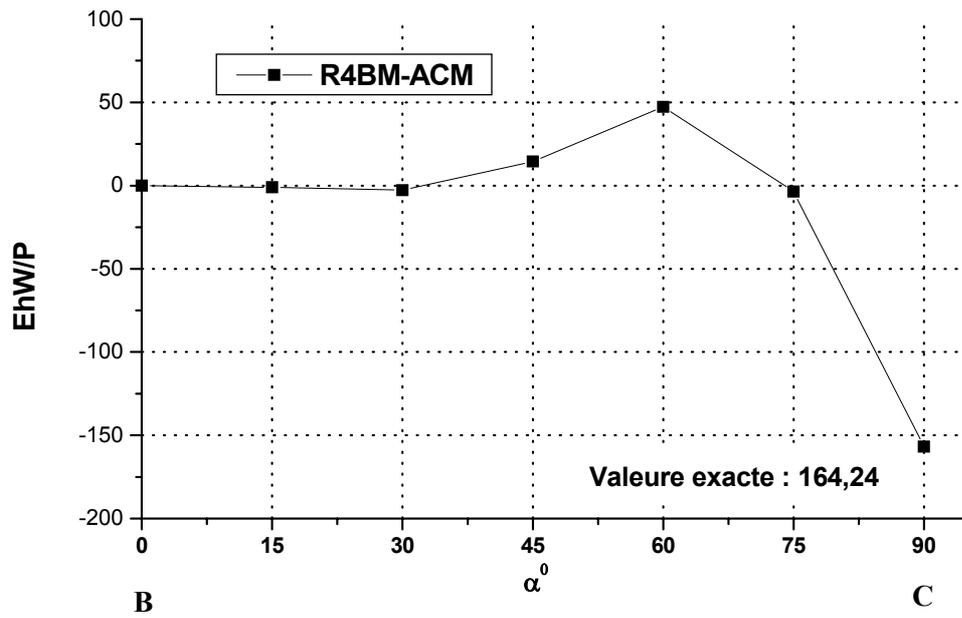


Figure 5.9 : Cylindre pincé avec diaphragme, distribution du déplacement sur le bord BC

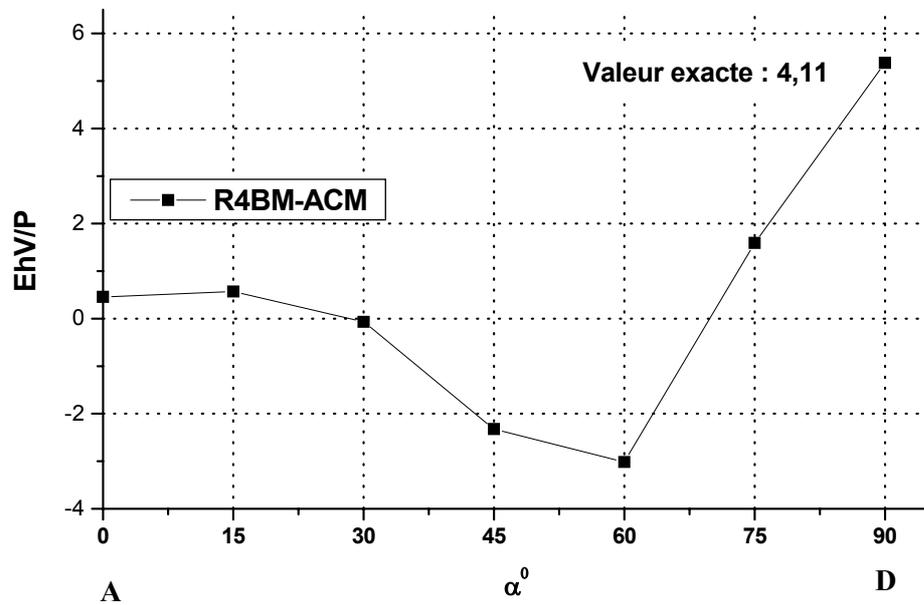


Figure 5.10 : Cylindre pincé avec diaphragme, distribution du déplacement sur le bord AD

5.4.2 Cylindre pincé à bords libres :

Cet exemple a été décrit et étudié par divers auteurs [Sans.98] et constitue un test difficile pour les formulations en éléments finis, en effet il combine les effets de flexion et de membrane. L'exemple est constitué par une coque cylindrique à bords libres, pincée par deux forces diamétralement opposées. La géométrie, le maillage et les conditions aux limites pour le huitième du cylindre sont présentés sur la Figure.5.11. Ce test a été effectué en premier lieu avec une épaisseur $h_1=0,094$ et une charge $P_1=100$ puis avec $h_2=0,01548$ et $P_2=0,1$.

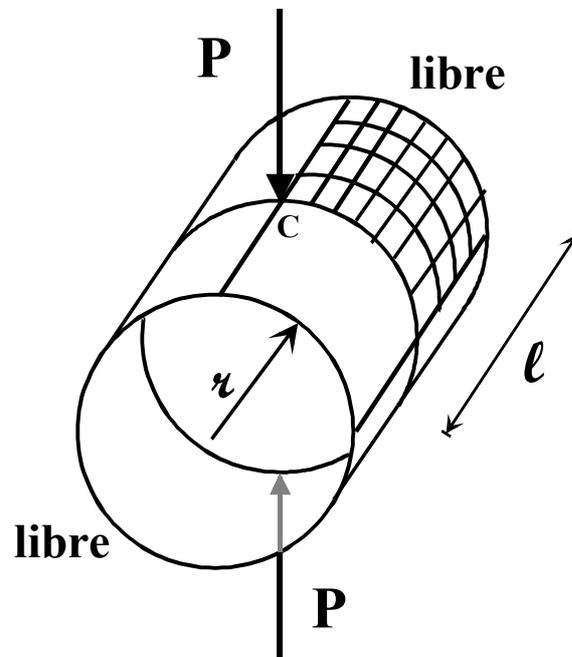


Figure 5.11 : Cylindre pincé a bords libres, données et maillage

1^{ier} cas

$$P_1=100; h_1=0,094; l=10,35 ; r=4,953 ; E=10,5 \times 10^6; \nu=0,3125$$

Les déplacements pour les différents maillages (1x1 à 1x9) issus de ce test sont présentés sur le Tableau 5.2. On constate que les résultats convergent d'une manière monotone et rapide vers la solution analytique (Figure.5.12), le présent élément performe mieux que son congénère le ACM-SBQ4 [Bela.00].

SBQ4: Strain Based Quadrilateral 4 nodes (avec drilling rotation)

Maillage	ACM-SBQ4 [Bela.00]	R4BM-ACM
1x1	0,08860	0,04791
1x3	0,1041	0,1054
1x5	0,1090	0,1104
1x7	0,1102	0,1117
1x9	0,1115	0,1121
Exacte	0,1139	

Tableau 5.2 : Cylindre pincé a bords libres (1^{er} cas), convergence de W_C

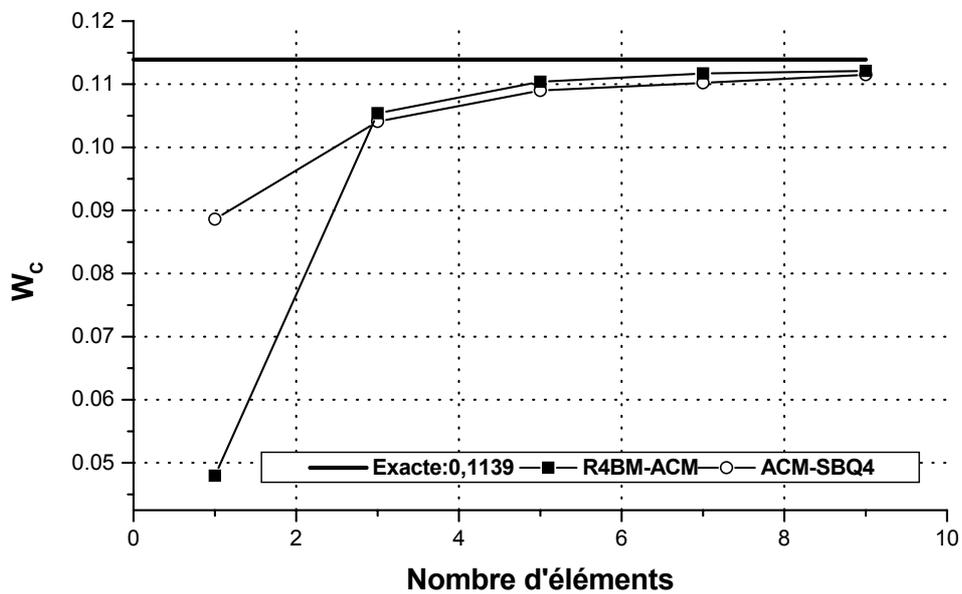


Figure 5.12 : Cylindre pincé a bords libres (1^{er} cas), convergence du déplacement W_C

2^{me} cas

$$P_2=0,1; h_2=0,01548; l=10,35 ; r =4,953 ; E=10,5 \times 10^6; \nu=0,3125$$

En utilisant quatre types de maillages, allant de 1x1 à 1x7, les résultats pour ce deuxième cas, figurent sur le Tableau.5.3. Les valeurs des déplacements du présent élément sont calculés et comparés avec ceux donnés par l'élément ACM-SBQ4. Le constat est pratiquement le même que celui du premier cas, toutefois avec de légères différences.



Maillage	ACM-SBQ4 [Bela.00]	R4BM-ACM
1x1	0,01922	0,009054
1x3	0,02302	0,02329
1x5	0,02387	0,02419
1x7	0,02418	0,02450
Exacte	0,02439	

Tableau 5.3 : Cylindre pincé à bords libres (2^{me} cas), convergence de W_C

Comparativement au cylindre pincé avec diaphragme, le maillage utilisé pour ces tests est relativement grossier. Le plus important reste de constater que malgré ce maillage la convergence est meilleure (Figure.5.12). Le R4BM-ACM revient de loin.

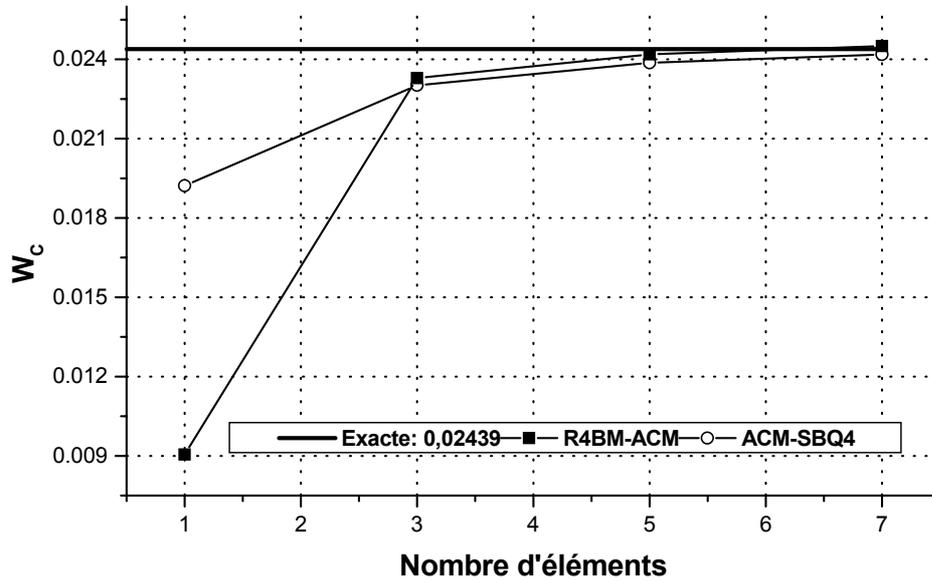


Figure 5.13 : Cylindre pincé a bords libres (2^{ème} cas), convergence du déplacement W_C

5.4.3 Panneau cylindrique:

Le toit cylindrique montré sur la Figure.5.15 chargé par son propre poids est fréquemment utilisé par les chercheurs et sert de test d'aptitude d'un élément a simuler des états de contraintes ou de déformations de membrane (les déformations de membranes sont importantes par rapport a celles de flexion).

Maillage	Déplacements aux points C et B	
	W_C	W_B
3x3	0,6203	4,062
4x4	0,5723	3,786
5x5	0,5715	3,785
6x6	0,5519	3,666
Exacte [Scor.69]	0,541	3,610

Tableau 5.4 : Panneau cylindrique, convergences de W_C et W_B

Un quart seulement du panneau est discrétisé, par un maillage allant de 3x3 à 6x6. Les résultats figurent sur le Tableau.5.4, où W_C et W_D désignent les flèches dans la direction z aux points C et D respectivement. Les résultats sont comparés a ceux théoriques données en référence [Scor.69]. Le R4BM-ACM présente des résultats tout à fait corrects. La courbe de convergence du déplacement W_C en fonction du nombre d'éléments est présentée sur la Figure.5.15. Une convergence monotone vers la solution de référence est obtenue.

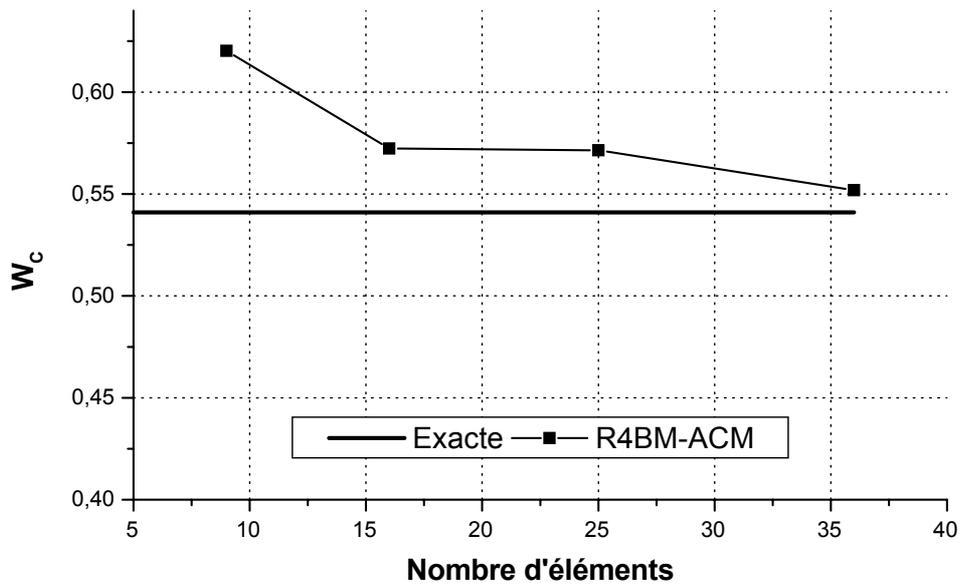


Figure 5.15 : Panneau cylindrique, convergences de W_c

On a en générale une bonne performance de l'élément R4BM-ACM pour ce type de structure, ceci s'explique par le fait que les effets de membrane et de flexion sont bien simulés par ce dernier.

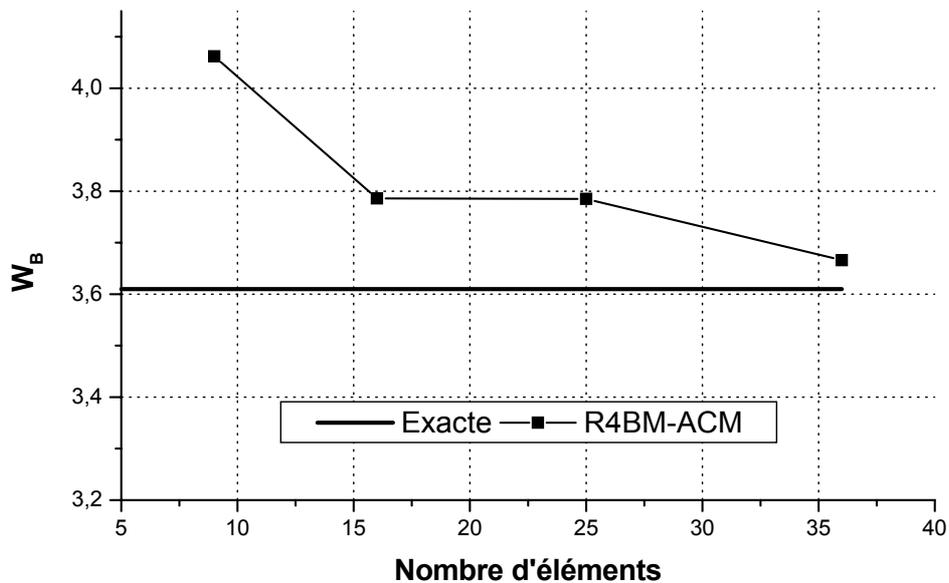


Figure 5.16 : Panneau cylindrique, convergences de W_b

Conclusions et Recommandations

Conclusions et Recommandations

Les éléments rectangulaires basés sur le modèle en déformation ont été revus. Une étude étalée sur les mécanismes et les propriétés qui se rattachent à ce modèle a été effectuée. Un nouvel élément, baptisé R4BM, basé sur le même modèle est développé pour l'analyse des problèmes plans de l'élasticité linéaire. En s'appuyant sur le développement d'un élément rectangulaire membranaire et en y incorporant la technique de la condensation statique, l'amélioration des éléments de Sabir [Sab.95a] est devenue possible. L'élément développé est avant tout membranaire, possédant pour chaque nœud, seulement les deux degrés de liberté nécessaires, peut approcher les solutions connues des flexions des poutres à parois minces, considérées dans des états plans de contrainte. Une intégration analytique exacte pour évaluer la matrice de rigidité élémentaire est utilisée. Les résultats obtenus sont meilleurs que ceux des autres éléments basés sur la déformation et *de facto* mieux que ceux de l'élément standard basé sur le modèle en déplacement. Pour l'étude de l'influence des rapports de forme sur le comportement de l'élément, des tests numériques ont été menés. L'approche exposée offre la possibilité de les passer sans grande difficulté. L'estimation de cet effet est mise en œuvre et montre bien la performance du présent élément, que se soit pour les déplacements ou les contraintes, des résultats exactes peuvent parfois être atteints. L'élément développé est intégré dans le code de calcul de type universitaire le « ALGMEF », outil de calcul par éléments finis, pensé et écrit par Belarbi [Bel.00]. Il a été très largement popularisé par ses différentes versions développées selon les cas analysés, par différents auteurs. Pour le cas de la présente thèse ce code est adapté aux états plans de déformations et de contraintes de l'élasticité. La rigueur dans l'utilisation de ce code d'un grand niveau fait

qu'il est très apprécié pour tous les types de structures. Une base d'expansion est construite à partir d'une superposition des deux effets, l'effet membranaire du présent élément et l'effet flexionnel de l'élément ACM [Adi.61] et [Mel.63], démontre qu'il est possible d'obtenir une qualité des résultats, qui se rapproche à celle des éléments courbes classiques de coque. Des applications basées sur la comparaison des résultats permettent de confirmer la fiabilité de l'élément associé, et montrent aussi la possibilité de le tester sur plusieurs cas de figures de structures courbées. Nous estimons, enfin, que cette étude permet d'augurer favorablement sur les possibilités du présent élément d'être reformulé pour s'adapter à l'analyse des domaines non linéaires (géométrique et matérielle) et les phénomènes vibratoires, les possibilités du modèle en déformation ont été déjà prouvées.

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [Adin.61] Adini A. and Clough R.W., Analyse of plate bending by the finite element method, *Report to the Nat. Sci. Found., U.S.A., G 7337*, 1961.
- [Ahma.70] Ahmad S., Irons B.M. and Zienkiewick O.C., Analysis of thin and thick shell structure by curved elements, *IJNME*, Vol.2, pp. 419-451, 1970.
- [Allm.88] Allman D.J., A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *IJNME*, Vol.26, pp. 717-730, 1988.
- [Ashw.71a] Ashwell D.G., Sabir A.B., Limitation of certain curved finite elements applied to arches, *IJMS* Vol. 13, pp. 133-139, 1971.
- [Ashw.71b] Ashwell D.G., Sabir A.B. and Roberts T.M., Further studies in the application of curved finite elements to circular arches, *IJMS* Vol. 13, pp. 507-517, 1971.
- [Ashw.72] Ashwell D.G and Sabir A.B., A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions, *IJMS* Vol. 14, pp. 171-183, 1972.
- [Assa.99] Assan A.E., Analysis of multiple cylindrical stiffened barrel shell structures by strain based finite element. *Thin Walled Structures* (35): 233-253. 1999.
- [Bath.76] Bathe K.J. and Wilson E.L., *Numerical Methods in finite element analysis*. Printice Hall, New Jersey, 1976.
- [Bath.81] Bathe, K. J., and Ho, L. W., A Simple and Effective Element for Analysis of General Shell Structures, *Computers and Structures*, Vol. 13, pp. 673-681, 1981.
- [Bath.96] Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, second edn, Prentice-Hall. 1996.
- [Bela.97] Belarbi M.T. et Charif A., Analyse des plaques relativement épaisses à l'aide d'un élément cubique simple basé sur le modèle de déformation, *Premier Congrès Arabe de la mécanique, Damas (Syrie) 1-3 juin*, Vol. 2, pp. 25-30, 1997.
- [Bela.98a] Belarbi M.T. et Charif A., Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol.7, N^o4, pp. 439-458, Juin 1998.

- [Bela.98b] Belarbi M.T. et Charif A., Nouveau Quadrilatère « SBQ4 » avec Drilling rotation, *Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de l'Ingénieur CIMASI'98 27-29 octobre, Casablanca*, Vol. 2, pp. 136-141, 1998.
- [Bela.98c] Belarbi M.T. et Charif A., Nouvel hexaèdre simple « SBH8 » pour l'étude des plaques minces et épaisses, *Les annales Maghrébines de l'Ingénieur, Vol.12, N^o Hors série, extrait de l'acte du 6^{ème} Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur CMMNI6, Tunis 24-26 Nov.*, Vol. 2, pp. 632-627, 1998.
- [Bela.99] Belarbi M.T. et Charif A., Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol.8, N^o 2, pp. 135-157, 1999.
- [Bela. 00] Belarbi M.T., Développement de nouveaux éléments finis à modèle en déformation, application linéaire et non linéaire. *Thèse de Doctorat*, Université de Constantine, 235 pages, Février 2000.
- [Bela.05] Belarbi M.T. and Bourezane M., On improved Sabir triangular element with drilling rotation, *Revue Européenne de Génie Civil*, Vol.9, N^o 9-10, pp. 1151-1175, 2005.
- [Belo.05] Belounar L. and Guenfoud M., A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, *Thin Wall Structures*, Vol.43, pp. 47-63, 2005.
- [Bely.00] Belytschko, T., W. K. Liu and B. Moran, *Nonlinear finite elements for continua and structures*, first edn, John Wiley & Sons Inc. 2000.
- [Bour.06] Bourezane M., Utilisation of the strain model in the analysis of structures. *Thèse de Doctorat*, Université de Biskra, Juillet 2006.
- [Bouz.86] Bouzrira C., Strain based sector with drilling rotation. *Master degree*, University college of Cardiff (U.K). 1986.
- [Clou.60] Clough, R. W. "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis," *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, PA, September 8-9, 1960.
- [Cook.89] Cook R. D., Malkus D. S., and Plesha M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1989.b
- [Cook.91] Cook R.D., Modified formulations for nine d.o.f. plane triangles that include vertex rotations, *IJNME*, Vol.31, pp. 825-835, 1991.

- [Djou.90] Djoudi M.S., Strain based finite elements for linear and geometrical nonlinear analysis of structure, *PhD thesis* University of Wales College of Cardiff (U.K). 1990.
- [Djou.95] Djoudi M.S. and Sabir A.B., Finite element analysis of singly and doubly curved dams of constant or variable thickness, *Thin walled structures* (21), 279-289, 1995.
- [Djou.03] Djoudi M.S. and Bahai H., A shallow shell finite element for the linear and nonlinear analysis of cylindrical shells. *Engineering structures*. Vol. 25, 769-778, 2003.
- [Djou.04a] Djoudi M.S. and Bahai H., A cylindrical strain based shell element for vibration analysis of shell structures, *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 40, 1947-1961, 2004
- [Djou.04b] Djoudi M.S. and Bahai H., Strain based finite element for vibration of cylindrical panels with openings. *Thin Walled Structures* Vol. 42, 575-588, 2004.
- [Flug.60] Flugge W., *Stresses in shells*, Springer verla, 1960.
- [Flug.66] Flugge W. and Fosberge K., Point load on shallow elliptic paraboloid, *J. Appl. Mech.* Vol. 33, pp. 575-585, 1966.
- [Hugh.87] Hughes, T. J. R. (1987), *The Finite Element Method*, first edn, Prentice-Hall.1987.
- [Knig.97] Knight Jr. N. F., The Raasch Challenge for Shell Elements, *AIAAJ*, Vol. 35, pp.375-388. 1997.
- [Lind.69] Lindberg G.M., Olson M.D. and Cowper G.R., New development in the finite element analysis of shells, *Q. Bull Div. Mech. Eng. And Nat. Aeronautical Establishment*, National Research Council of Canada, Vol. 5. 1969.
- [Maal.02] Maalem T., Investigation numérique des problèmes de flexion de plaque par un élément fini parallélépipédique basé sur le modèle en déformation, *mémoire de Magistère*, Université de Constantine. 2002.
- [Macn.88] McNeal, R. H. and Harder, R.L., A refined four noded membrane element with rotational degrees of freedom, *C.S*, Vol.28, pp. 75-84, 1988.
- [Macn.98] McNeal, R. H., Perspective on finite elements for shell analysis, *Finite Elements in Analysis and Design* 30, 175–186. 1998.

- [Melo.63] Melosh R.J., Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method, *AIAAJI*, Vol.1, pp. 1631-1637, 1963.
- [Mous.02] Moussa A., Tayeh S., A rectangular finite element for plane elasticity with in-plane rotation. *Proceedings of the sixth Conference on Computational Structures Technology*. Civil-Comp press Edinburgh, UK, 2002
- [Nati.00] National Agency for Finite Element Methods and Standards (NAFEMS), UK, "The Standards NAFEMS Benchmarks", TNSB, Rev. 3, October 1990
- [Sabi.71] Sabir A.B. and Ashwell D.G., A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.18, N°11, pp. 555-563, 1971.
- [Sabi.72] Sabir A.B. and Lock A.C., A curved cylindrical shell finite element, *IJMS*. Vol.14, pp. 125-135, 1972.
- [Sabi.73] Sabir A.B. and Rao A.K., Flexure of thick rectangular plates. *J.Appl Mech ASME*, pp. 298-299, 1973.
- [Sabi.75] Sabir A.B. Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions, *The Mathematics of Finite Elements and Application II*. Editor J.R. Whiteman, Chapter 34, 411-421, Academic Press, 1975.
- [Sabi.78] Sabir A.B. and Ashwell D.G., Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells, *The Mathematics of Finite Elements and Application III*. Editor J.R. Whiteman, Academic Press, 1978.
- [Sabi.82] Sabir A.B. and Charchafchi T.A., Curved rectangular and quadrilateral shell elements for cylindrical shells. *The Mathematics of Finite Elements and Application IV*. Editor J.R. Whiteman, 231-239, Academic Press, 1982.
- [Sabi.83a] Sabir A.B. A new class of Finite Elements for plane elasticity problems, *CAFEM 7th, Int. Conf. Struct. Mech. In Reactor Technology*, Chicago, 1983.
- [Sabi.83b] Sabir A.B. and Chow F.Y., Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes., *Int. Conf. on instability and plastic collapse of steel structures*, Manchester University. 1983.
- [Sabi.84] Sabir A.B., Strain based elements for the analysis of shear walls., *Proc. Int. Conf. on tall buildings*, 447-453, Hong Kong University. 1984.

- [Sabi.85a] Sabir A.B., A Rectangular and Triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, *Chapter 9 in proceeding of the second international conference on variational methods in engineering*, Southampton University, Springer-verlag, Berlin, pp. 17-25, 1985.
- [Sabi.85b] Sabir A.B. and Ramdhani F., A shallow shell finite element for general shell analysis, *Variational Methods in Engineering, proceeding of the 2nd international conference*, Southampton University, England, 1985.
- [Sabi.86] Sabir A.B. and Salhi H.Y., A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, *Res. Mechanica* 19, pp. 1-16, 1986.
- [Sabi.95a] Sabir A.B. and Sfindji A., Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. *Thin-walled Structures* 21.pp 225-232 .1995
- [Sabi.95b] Sabir A.B. and Djoudi M.S., Shallow shell finite element for the large deflection geometrically nonlinear analysis of shells and plates. *Thin-walled Structures* 18.pp 67-82 .1995
- [Sabi.96] Sabir A.B. and Moussa A.I., Finite element analysis of cylindrical conical storage tanks using strain based elements. *Structural Engineering Review*. Vol.8, pp 367-374.1996
- [Sabi.97a] Sabir A.B. and Moussa A.I., Analysis of fluted conical shell roofs using the finite element method. *Computers and Structures*. 64, 1-4: pp 239-251. 1997.
- [Sabi.97b] Sabir A.B. and Davies G.T., Natural frequencies of plates with square holes when subjected to in-plane uniaxial, biaxial or shear loading. *Thin-walled Structures* (28): pp 321-335. 1997.
- [Sabi.97c] Sabir A.B. and Davies G.T., Natural frequencies of square plates with reinforced central holes subjected to in-plane loads. *Thin-walled Structures* (28): pp 337-353. 1997.
- [Scor.69] Scordelis A.C. and Lo K.S., Computer analysis of cylindrical shells, *J.Amer. Concrete Institute* Vol.61, pp.539-561,.1969
- [Sans.98] Sansour C, and Bocko J. On hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain finite element formulations for a geometrically exact shell theory with drilling degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 43:175 –192. 1998.
- [Turn.56] Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., and Topp L. C., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *J. Aeronaut. Sci.*, Vol. 23, No. 9, pp. 805–823, 854. 1956.

- [Yang.90] Yang H. T. Y., Saigal S., and Liaw, D. G., Advances of Thin Shell Finite Elements and some applications – version – I, *Computers and Structures*, 35, pp. 481-504, 1990.
- [Yang.00] Yang H. T., Saigal S., Masud A., Kapania R. A Survey of Recent Shell Finite Elements, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, pp. 101-127. 2000.
- [Zien.71] Zienkiewicz O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1971.
- [Zien.00] Zienkiewicz, O. C. and R.L. Taylor, *The Finite Element Method, vol 1*, fifth edn, Butterworth-Heinemann. 2000.

LOGICIELS UTILISES

- [FORT. 95] Fortran Power Station 4.0, Microsoft Developer Studio 1995, Microsoft Corporation.
- [MAPL. 00] MAPLE 6, Watreloo Maple Inc. Jan. 2000, Build ID 16401.
- [ORIG. 97] ORIGIN 5.0, Microcal Origin, Microcal Software, Inc. 1997.

Annexes

ANNEXE A

Pyramide de Pascale

Dans cette annexe, est détaillée la pyramide de Pascal en 3D qui concerne le fonctions d'interpolation du modèle de déplacement §4.1.1. Le polynôme d'interpolation s'écrit (composante U par exemple) :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) = & a_1 \\
 & + a_2x + a_3y + a_4z \\
 & + a_5x^2 + a_6xy + a_7y^2 + a_8yz + a_9z^2 + a_{10}zx \\
 & + a_{11}x^3 + a_{12}x^2y + a_{13}xy^2 + a_{14}y^3 + a_{15}y^2z + a_{16}yz^2 + a_{17}z^3 + a_{18}z^2x + a_{19}zx^2 + a_{20}xyz \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Pyramide	Degré	p	Nombre de termes
	Constant	0	1
	Linéaire	1	4
	Quadratique	2	10
	Cubique	3	20

Fig. A.1 : Pyramide de Pascal

ANNEXE B

Détails sur les différentes matrices

Dans cette annexe, sont détaillées, les matrices $[Q]$; $[D]$; $[K_0]$; $[A]$; $[A^{-1}]$ et $[A^{-1}]_{\text{cond}}$ de l'élément R4BM (§4.1) ainsi que $[K_e]$ et $[K_e]_{\text{cond}}$ du même élément (§3.8).

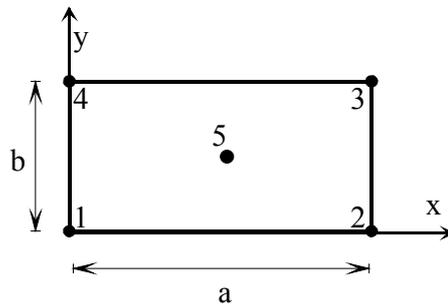


Fig. B.1 Coordonnées et points nodaux pour l'élément rectangulaire R4BM

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D11 & D12 & 0 \\ D12 & D22 & 0 \\ 0 & 0 & D33 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$D11 = D22 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad ; \quad D12 = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \quad ; \quad D33 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$[K_0] = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & H1 & H2 & H3 & H4 & 0 & H5 & H6 \\
 & & & & H7 & H8 & H9 & 0 & H10 & H11 \\
 & & & & & H12 & H13 & 0 & H14 & H15 \\
 & \text{Sym} & & & & & H16 & 0 & H17 & H18 \\
 & & & & & & & H19 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & H20 & H21 \\
 & & & & & & & & & H22
 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
 H1 &= D_{11} S & H2 &= D_{11} S_1 & H3 &= S D_{12} \\
 H4 &= D_{12} S_2 & H5 &= D_{11} S_2 & H6 &= D_{12} S_1 \\
 H7 &= D_{11} S_4 & H8 &= D_{12} S_1 & H9 &= D_{12} S_3 \\
 H10 &= D_{11} S_3 & H11 &= D_{12} S_4 & H12 &= D_{22} S \\
 H13 &= D_{22} S_2 & H14 &= D_{12} S_2 & H15 &= D_{22} S_1 \\
 H16 &= D_{22} S_5 & H17 &= D_{12} S_5 & H18 &= D_{22} S_3 \\
 H19 &= D_{33} S & H20 &= D_{11} S_5 & H21 &= D_{12} S_3 & H22 &= D_{22} S_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= ab & S_1 &= \frac{ab^2}{2} & S_2 &= \frac{ba^2}{2} \\
 S_3 &= \frac{a^2 b^2}{4} & S_4 &= \frac{ab^3}{3} & S_5 &= \frac{ba^3}{3}
 \end{aligned}$$

$$[A]= \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a^2 & 0 \\
 0 & 1 & a & 0 & -\frac{1}{2}a^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -b & a & ab & 0 & -\frac{1}{2}b^2 & \frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}a^2 & 0 \\
 0 & 1 & a & 0 & -\frac{1}{2}a^2 & b & ab & \frac{1}{2}a & 0 & \frac{1}{2}b^2 \\
 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}b^2 & \frac{1}{2}b & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b^2 \\
 1 & 0 & -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a & \frac{1}{4}ab & 0 & -\frac{1}{8}b^2 & \frac{1}{4}b & -\frac{1}{8}a^2 & 0 \\
 0 & 1 & \frac{1}{2}a & 0 & -\frac{1}{8}a^2 & \frac{1}{2}b & \frac{1}{4}ab & \frac{1}{4}a & 0 & \frac{1}{8}b^2
 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{3}{4} \frac{1}{b} & -\frac{3}{4} \frac{1}{a} & -\frac{1}{4} \frac{1}{b} & \frac{3}{4} \frac{1}{a} & \frac{1}{4} \frac{1}{b} & -\frac{1}{4} \frac{1}{a} & -\frac{3}{4} \frac{1}{b} & \frac{1}{4} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\
 -2 \frac{1}{a} & -\frac{1}{2} \frac{b}{a^2} & 0 & \frac{1}{2} \frac{b}{a^2} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{2} \frac{b}{a^2} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{2} \frac{b}{a^2} & 4 \frac{1}{a} & 0 \\
 \frac{1}{b a} & 0 & -\frac{1}{b a} & 0 & \frac{1}{b a} & 0 & -\frac{1}{b a} & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} \frac{a}{b^2} & -2 \frac{1}{b} & \frac{1}{2} \frac{a}{b^2} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{2} \frac{a}{b^2} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{2} \frac{a}{b^2} & 0 & 0 & 4 \frac{1}{b} \\
 0 & \frac{1}{b a} & 0 & -\frac{1}{b a} & 0 & \frac{1}{b a} & 0 & -\frac{1}{b a} & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} \frac{1}{b} & -\frac{1}{2} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2} \frac{1}{b} & \frac{1}{2} \frac{1}{a} & \frac{1}{2} \frac{1}{b} & \frac{1}{2} \frac{1}{a} & \frac{1}{2} \frac{1}{b} & -\frac{1}{2} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\
 2 \frac{1}{a^2} & \frac{b}{a^3} & 2 \frac{1}{a^2} & -\frac{b}{a^3} & 2 \frac{1}{a^2} & \frac{b}{a^3} & 2 \frac{1}{a^2} & -\frac{b}{a^3} & -8 \frac{1}{a^2} & 0 \\
 \frac{a}{b^3} & 2 \frac{1}{b^2} & -\frac{a}{b^3} & 2 \frac{1}{b^2} & \frac{a}{b^3} & 2 \frac{1}{b^2} & -\frac{a}{b^3} & 2 \frac{1}{b^2} & 0 & -8 \frac{1}{b^2}
 \end{bmatrix} \quad (B.5)$$

$$[A]^{-1}_{\text{cond}} = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{3}{4} \frac{1}{b} & -\frac{3}{4} \frac{1}{a} & -\frac{1}{4} \frac{1}{b} & \frac{3}{4} \frac{1}{a} & \frac{1}{4} \frac{1}{b} & -\frac{1}{4} \frac{1}{a} & -\frac{3}{4} \frac{1}{b} & \frac{1}{4} \frac{1}{a} \\
 -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{a b} & 0 & -\frac{1}{a b} & 0 & \frac{1}{a b} & 0 & -\frac{1}{a b} & 0 \\
 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\
 0 & \frac{1}{a b} & 0 & -\frac{1}{a b} & 0 & \frac{1}{a b} & 0 & -\frac{1}{a b} \\
 -\frac{1}{2} \frac{1}{b} & -\frac{1}{2} \frac{1}{a} & -\frac{1}{2} \frac{1}{b} & \frac{1}{2} \frac{1}{a} & \frac{1}{2} \frac{1}{b} & \frac{1}{2} \frac{1}{a} & \frac{1}{2} \frac{1}{b} & -\frac{1}{2} \frac{1}{a}
 \end{bmatrix} \quad (B.6)$$

[Ke]_{cond}
R4BM

$\frac{1}{156}$ $\frac{16b^2 D11D22+39D22D33a^2 - 13D12^2 b^2}{b D22a}$	$\frac{3}{52} D12 + \frac{1}{4} D33$	$\frac{1}{156}$ $\frac{-16b^2 D11D22+39D22D33a^2 + 13D12^2 b^2}{b D22a}$	$-\frac{1}{52} D12 - \frac{1}{4} D33$
	$\frac{1}{156}$ $\frac{52D22a^2 D11+39D11b^2 D33-25D12^2 a}{a D11b}$	$-\frac{3}{52} D12 + \frac{1}{4} D33$	$\frac{1}{156}$ $\frac{26D22a^2 D11-39D11b^2 D33-35D12^2 a^2}{a D11b}$
		$\frac{1}{156}$ $\frac{16b^2 D11D22+39D22D33a^2 - 13D12^2 b^2}{b D22a}$	$\frac{1}{52} D12 - \frac{1}{4} D33$
			$\frac{1}{156}$ $\frac{52D22a^2 D11+39D11b^2 D33-49D12^2 a^2}{a D11b}$
Symétrique			

[Ke]_{cond}=
suite
R4BM

$-\frac{3}{52} D_{12} + \frac{1}{4} D_{33}$	$\frac{-1}{156} \frac{10b^2 D_{11} D_{22} + 39 D_{22} D_{33} a^2 - 13 D_{12}^2 b^2}{b D_{22} a}$	$\frac{1}{52} D_{12} - \frac{1}{4} D_{33}$	$\frac{-1}{156} \frac{-10b^2 D_{11} D_{22} + 39 D_{22} D_{33} a^2 + 13 D_{12}^2 b^2}{b D_{22} a}$
$\frac{-1}{156} \frac{-39 D_{11} b^2 D_{33} - 25 D_{12}^2 a^2 + 52 D_{22} a^2 D_{11}}{a D_{11} b}$	$\frac{3}{52} D_{12} - \frac{1}{4} D_{33}$	$\frac{-1}{156} \frac{26 D_{22} a^2 D_{11} + 39 D_{11} b^2 D_{33} - 35 D_{12}^2 a^2}{a D_{11} b}$	$-\frac{3}{52} D_{12} - \frac{1}{4} D_{33}$
$\frac{3}{52} D_{12} + \frac{1}{4} D_{33}$	$\frac{-1}{156} \frac{-10b^2 D_{11} D_{22} + 39 D_{22} D_{33} a^2 + 13 D_{12}^2 b^2}{b D_{22} a}$	$-\frac{1}{52} D_{12} - \frac{1}{4} D_{33}$	$\frac{-1}{156} \frac{10b^2 D_{11} D_{22} + 39 D_{22} D_{33} a^2 - 13 D_{12}^2 b^2}{b D_{22} a}$
$\frac{-1}{156} \frac{26 D_{22} a^2 D_{11} + 39 D_{11} b^2 D_{33} - 35 D_{12}^2 a^2}{a D_{11} b}$	$-\frac{1}{52} D_{12} + \frac{1}{4} D_{33}$	$\frac{-1}{156} \frac{-39 D_{11} b^2 D_{33} - 49 D_{12}^2 a^2 + 52 D_{22} a^2 D_{11}}{a D_{11} b}$	$\frac{1}{52} D_{12} + \frac{1}{4} D_{33}$
$\frac{1}{156} \frac{16b^2 D_{11} D_{22} + 39 D_{22} D_{33} a^2 - 13 D_{12}^2 b^2}{b D_{22} a}$	$-\frac{1}{52} D_{12} + \frac{1}{4} D_{33}$	$\frac{1}{156} \frac{-16b^2 D_{11} D_{22} + 39 D_{22} D_{33} a^2 + 13 D_{12}^2 b^2}{b D_{22} a}$	$\frac{3}{52} D_{12} - \frac{1}{4} D_{33}$
	$\frac{1}{156} \frac{52 D_{22} a^2 D_{11} + 39 D_{11} b^2 D_{33} - 49 D_{12}^2 a^2}{a D_{11} b}$	$\frac{1}{52} D_{12} + \frac{1}{4} D_{33}$	$\frac{1}{156} \frac{26 D_{22} a^2 D_{11} - 39 D_{11} b^2 D_{33} - 35 D_{12}^2 a^2}{a D_{11} b}$
		$\frac{1}{156} \frac{16b^2 D_{11} D_{22} + 39 D_{22} D_{33} a^2 - 13 D_{12}^2 b^2}{b D_{22} a}$	$-\frac{3}{52} D_{12} - \frac{1}{4} D_{33}$
			$\frac{1}{156} \frac{52 D_{22} a^2 D_{11} + 39 D_{11} b^2 D_{33} - 25 D_{12}^2 a^2}{a D_{11} b}$

[Ke]=
R4BM

$\frac{1}{12}$ $\frac{80 D11 b^4 + 2 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 + a^4 D22}{a b^3}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 + 15 D12 a^2 b^2 + 2 a^4 D22 + 3 D33 a^2 b^2}{b^2 a^2}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{48 D11 b^4 - 2 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 - a^4 D22}{a b^3}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 - 19 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 - 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{50 D11 b^4 + 2 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 + a^4 D22}{a b^3}$
	$\frac{1}{12}$ $\frac{13 D11 b^4 + 10 D12 a^2 b^2 + 8 a^4 D22 + 3 D33 a^2 b^2}{b a^3}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{20 D11 b^4 + 5 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 - 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{13 D11 b^4 - 2 D12 a^2 b^2 + 2 a^4 D22 - 3 D33 a^2 b^2}{b a^3}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{20 D11 b^4 + 9 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 + 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$
		$\frac{1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 + 2 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 + a^4 D22}{a b^3}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{20 D11 b^4 - 9 D12 a^2 b^2 + 2 a^4 D22 + 3 D33 a^2 b^2}{b^2 a^2}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{30 D11 b^4 - 2 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 - a^4 D22}{a b^3}$
			$\frac{1}{12}$ $\frac{13 D11 b^4 - 14 D12 a^2 b^2 + 8 a^4 D22 + 3 D33 a^2 b^2}{b a^3}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{20 D11 b^4 - 13 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 - 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$
				$\frac{1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 + 2 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 + a^4 D22}{a b^3}$
Symétrique				

[Ke]=
(suite)
R4BM

$\frac{1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 - 15 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 + 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{78 D11 b^4 - 2 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 - a^4 D22}{a b^3}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 + 11 D12 a^2 b^2 - 2 a^4 D22 - 3 D33 a^2 b^2}{b^2 a^2}$	$\frac{-64}{3}$ $\frac{D11 b}{a}$	$\frac{-2}{3}$ $\frac{D12 b^2 + D22 a^2}{b^2}$
$\frac{1}{12}$ $\frac{13 D11 b^4 - 2 D12 a^2 b^2 + 2 a^4 D22 - 3 D33 a^2 b^2}{b a^3}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 + 11 D12 a^2 b^2 - 2 a^4 D22 - 3 D33 a^2 b^2}{b^2 a^2}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{b (13 D11 b^2 + 10 D12 a^2 - 3 D33 a^2)}{a^3}$	$\frac{-2}{3}$ $\frac{13 D11 b^2 + 5 D12 a^2}{a^2}$	$\frac{-4}{3}$ $\frac{D22 a}{b}$
$\frac{1}{12}$ $\frac{20 D11 b^4 - 13 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 - 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{50 D11 b^4 + 2 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 + a^4 D22}{a b^3}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{20 D11 b^4 + 9 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 + 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$	$\frac{-40}{3}$ $\frac{D11 b}{a}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{D12 b^2 + D22 a^2}{b^2}$
$\frac{-1}{12}$ $\frac{b (13 D11 b^2 - 14 D12 a^2 - 3 D33 a^2)}{a^3}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 - 15 D12 a^2 b^2 - 3 D33 a^2 b^2 + 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{13 D11 b^4 - 2 D12 a^2 b^2 + 2 a^4 D22 - 3 D33 a^2 b^2}{b a^3}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{13 D11 b^2 - 7 D12 a^2}{a^2}$	$\frac{-4}{3}$ $\frac{D22 a}{b}$
$\frac{1}{12}$ $\frac{20 D11 b^4 - 9 D12 a^2 b^2 + 2 a^4 D22 + 3 D33 a^2 b^2}{b^2 a^2}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{48 D11 b^4 - 2 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 - a^4 D22}{a b^3}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{20 D11 b^4 + 5 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 - 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$	$\frac{-40}{3}$ $\frac{D11 b}{a}$	$\frac{-2}{3}$ $\frac{D12 b^2 + D22 a^2}{b^2}$
$\frac{1}{12}$ $\frac{13 D11 b^4 - 14 D12 a^2 b^2 + 8 a^4 D22 + 3 D33 a^2 b^2}{b a^3}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 - 19 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 - 2 a^4 D22}{a^2 b^2}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{13 D11 b^4 - 2 D12 a^2 b^2 - 6 a^4 D22 + 3 D33 a^2 b^2}{b a^3}$	$\frac{-2}{3}$ $\frac{13 D11 b^2 - 7 D12 a^2}{a^2}$	$\frac{-4}{3}$ $\frac{D22 a}{b}$
	$\frac{1}{12}$ $\frac{80 D11 b^4 + 2 D12 a^2 b^2 + 3 D33 a^2 b^2 + a^4 D22}{a b^3}$	$\frac{-1}{12}$ $\frac{32 D11 b^4 + 15 D12 a^2 b^2 + 2 a^4 D22 + 3 D33 a^2 b^2}{b^2 a^2}$	$\frac{-64}{3}$ $\frac{D11 b}{a}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{D12 b^2 + D22 a^2}{b^2}$
		$\frac{1}{12}$ $\frac{13 D11 b^4 + 10 D12 a^2 b^2 + 8 a^4 D22 + 3 D33 a^2 b^2}{b a^3}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{13 D11 b^2 + 5 D12 a^2}{a^2}$	$\frac{-4}{3}$ $\frac{D22 a}{b}$
			$\frac{208}{3}$ $\frac{D11 b}{a}$	0
				$\frac{16}{3}$ $\frac{D22 a}{b}$

ANNEXE C

Champs des déplacements et déformations des éléments membranaires

Dans cette annexe, sont détaillés, les différents champs des éléments SBRIE [Sabi.85a], SBRIE1 [Sabi.95a] et le Q4 (§4.2).

Les champs de déformation et de déplacement pour l'élément SBRIE sont :

$$\varepsilon_{xx} = a_4 + a_5 y \quad (\text{C.1a})$$

$$\varepsilon_{yy} = a_6 + a_7 x \quad (\text{C.1b})$$

$$\gamma_{xy} = a_8 \quad (\text{C.1c})$$

$$u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - 0,5 a_7 y^2 + 0,5 a_8 y \quad (\text{C.2a})$$

$$v = a_2 + a_3 x - 0,5 a_5 x^2 + a_6 y + a_7 xy + 0,5 a_8 x \quad (\text{C.2b})$$

Les champs de déformation et de déplacement pour l'élément SBRIE1:

$$\varepsilon_{xx} = a_4 + a_5 y \quad (\text{C.3a})$$

$$\varepsilon_{yy} = a_6 + a_7 x \quad (\text{C.3b})$$

$$\gamma_{xy} = a_8 + a_9 x + a_{10} y \quad (\text{C.3c})$$

$$u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - 0,5 a_7 y^2 + 0,5 a_8 y + 0,5 a_{10} y^2 \quad (\text{C.4a})$$

$$v = a_2 + a_3 x - 0,5 a_5 x^2 + a_6 y + a_7 xy + 0,5 a_8 x + 0,5 a_9 x^2 \quad (\text{C.4b})$$

Les champs de déplacement et de déformation pour l'élément Q4 sont (§4.2):

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \quad (\text{C.5a})$$

$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \quad (\text{C.5b})$$

$$\varepsilon_{xx} = a_2 + a_4 y \quad (\text{C.6a})$$

$$\varepsilon_{yy} = a_7 + a_8 x \quad (\text{C.6b})$$

$$\gamma_{xy} = a_3 + a_6 + a_4 x + a_8 y \quad (\text{C.6c})$$

ANNEXE D

Élément flexionnel ACM

On retrouve ici la représentation graphique des 03 d.d.l. de l'élément flexionnel ACM ainsi que les matrices $[A]$; $[A^{-1}]$; $[K_0]$ et $[Q]$ (§5.3).

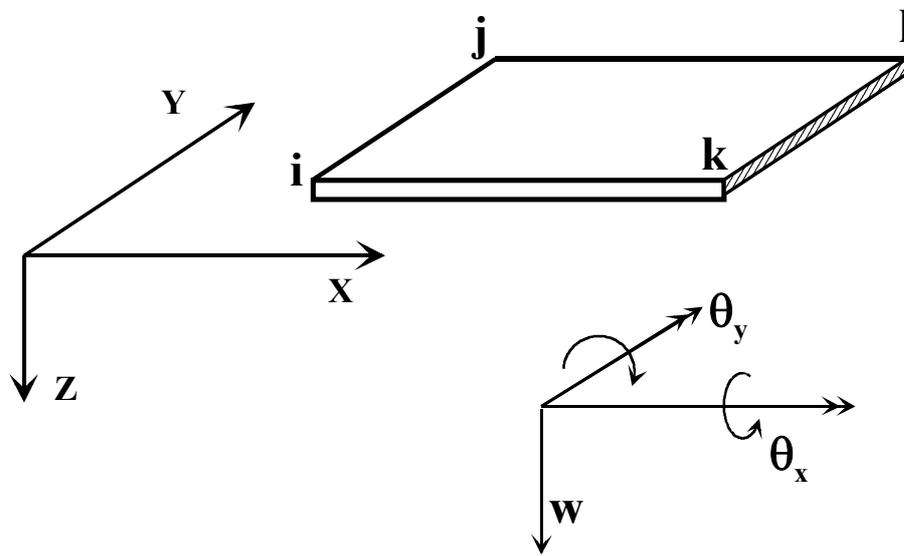


Figure D.1 : D.d.l. de l'élément flexionnel

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix}$$

$$[A]= \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\
 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\
 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3
 \end{bmatrix} \quad (D.1)$$

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix}
 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 -3\frac{1}{a^2}, & 0, & -2\frac{1}{a}, & 3\frac{1}{a^2}, & 0, & -\frac{1}{a}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 -\frac{1}{ab}, & \frac{1}{a}, & -\frac{1}{b}, & \frac{1}{ab}, & -\frac{1}{a}, & 0, & -\frac{1}{ab}, & 0, & 0, & \frac{1}{ab}, & 0, & \frac{1}{b} \\
 -3\frac{1}{b^2}, & 2\frac{1}{b}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 3\frac{1}{b^2}, & \frac{1}{b}, & 0 \\
 2\frac{1}{a^3}, & 0, & \frac{1}{a^2}, & -2\frac{1}{a^3}, & 0, & \frac{1}{a^2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 3\frac{1}{a^2b}, & 0, & 2\frac{1}{ab}, & -3\frac{1}{a^2b}, & 0, & \frac{1}{ab}, & 3\frac{1}{a^2b}, & 0, & -\frac{1}{ab}, & -3\frac{1}{a^2b}, & 0, & -2\frac{1}{ab} \\
 3\frac{1}{ab^2}, & -2\frac{1}{ab}, & 0, & -3\frac{1}{ab^2}, & 2\frac{1}{ab}, & 0, & 3\frac{1}{ab^2}, & \frac{1}{ab}, & 0, & -3\frac{1}{ab^2}, & -\frac{1}{ab}, & 0 \\
 2\frac{1}{b^3}, & -\frac{1}{b^2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -2\frac{1}{b^3}, & -\frac{1}{b^2}, & 0 \\
 -2\frac{1}{ba^3}, & 0, & -\frac{1}{a^2b}, & 2\frac{1}{ba^3}, & 0, & -\frac{1}{a^2b}, & -2\frac{1}{ba^3}, & 0, & \frac{1}{a^2b}, & 2\frac{1}{ba^3}, & 0, & \frac{1}{a^2b} \\
 -2\frac{1}{ab^3}, & \frac{1}{ab^2}, & 0, & 2\frac{1}{ab^3}, & -\frac{1}{ab^2}, & 0, & -2\frac{1}{ab^3}, & -\frac{1}{ab^2}, & 0, & 2\frac{1}{ab^3}, & \frac{1}{ab^2}, & 0
 \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

[K0]=[D]

$$\begin{bmatrix}
 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 0, & 0, & 0, & 4ab, & 0, & 4vab, & 6a^2b, & 2ab^2, & 2va^2b, & 6vab^2, & 3a^2b^2, & 3va^2b^2 \\
 0, & 0, & 0, & 0, & 2ab-2vab, & 0, & 0, & -2(-1+v)a^2b, & -2(-1+v)ab^2, & 0, & -2(-1+v)a^3b, & -2(-1+v)ab^3 \\
 0, & 0, & 0, & 4vab, & 0, & 4ab, & 6va^2b, & 2vab^2, & 2a^2b, & 6ab^2, & 3va^2b^2, & 3a^2b^2 \\
 0, & 0, & 0, & 6a^2b, & 0, & 6va^2b, & 12b^3, & 3a^2b^2, & 4va^3b, & 9va^2b^2, & 6a^3b^2, & 6va^3b^2 \\
 0, & 0, & 0, & 2ab^2, & -2(-1+v)a^2b, & 2vab^2, & 3a^2b^2, & \frac{8}{3}b^3 - \frac{8}{3}va^3b + \frac{4}{3}a^3b^3, & -(v-2)a^2b^2, & 4vab^3, & 3a^4b - 3a^4bv + 2a^2b^3, & 2a^2b^3 \\
 0, & 0, & 0, & 2va^2b, & -2(-1+v)ab^2, & 2a^2b, & 4va^3b, & -(v-2)a^2b^2, & \frac{4}{3}b^3 + \frac{8}{3}ab^3 - \frac{8}{3}vab^3, & 3a^2b^2, & 2a^3b^2, & 2a^3b^2 + 3ab^4 - 3ab^4v \\
 0, & 0, & 0, & 6vab^2, & 0, & 6ab^2, & 9va^2b^2, & 4vab^3, & 3a^2b^2, & 12ab^3, & 6va^2b^3, & 6a^2b^3 \\
 0, & 0, & 0, & 3a^2b^2, & -2(-1+v)a^3b, & 3va^2b^2, & 6a^3b^2, & 3a^4b - 3a^4bv + 2a^2b^3, & 2a^3b^2, & 6va^2b^3, & \frac{18}{5}a^5b - \frac{18}{5}a^5bv + 4a^3b^3, & 2(v+1)a^3b^3 \\
 0, & 0, & 0, & 3va^2b^2, & -2(-1+v)ab^3, & 3a^2b^2, & 6va^3b^2, & 2a^2b^3, & 2a^3b^2 + 3ab^4 - 3ab^4v, & 6a^2b^3, & 2(v+1)a^3b^3, & 4a^3b^3 + \frac{18}{5}ab^5 - \frac{18}{5}ab^5v
 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Avec } [D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2
 \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

ANNEXE E

Drilling rotation

Le degré de liberté de rotation (§5.3) peut être physiquement interprété comme l'angle formé par les bissectrices des cotés adjacents des formes déformée et non déformée de l'élément fini. L'angle et les dérivées partielles associées aux déplacements de l'élément sont montrés sur la Figure.E.1

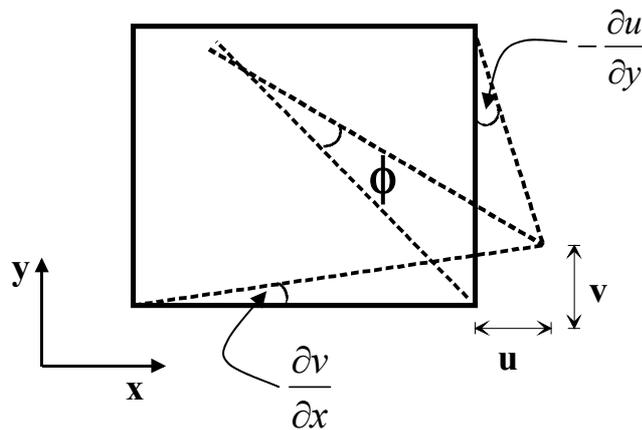


Fig. E.1 Interprétation physique du degré de liberté de rotation (drilling degree of freedom)

Le degré de liberté de rotation est défini par :

$$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{E.1})$$

ANNEXE F

Constitution de la matrice de rigidité de l'élément combiné

Détails sur la constitution de la matrice de rigidité de l'élément R4BM-ACM (§5.3).

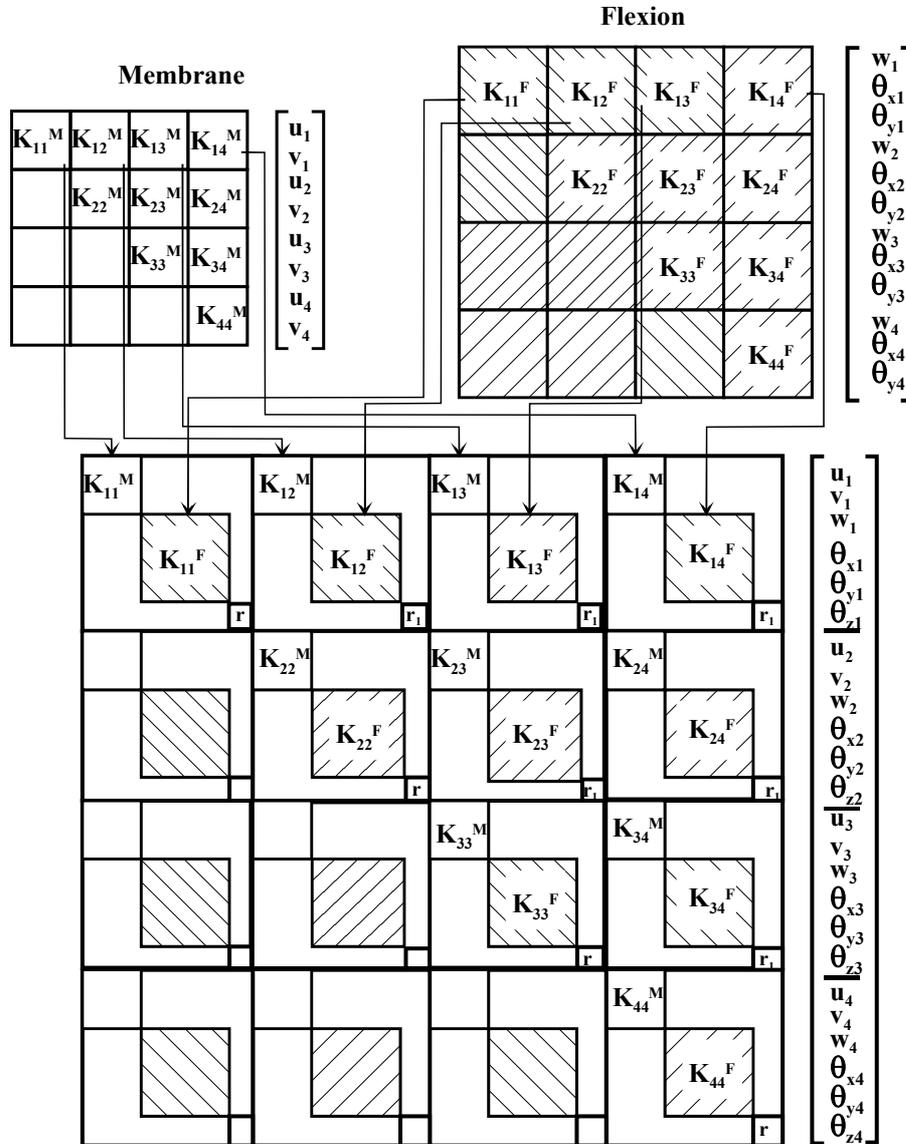


Fig. F.1 Matrice de rigidité de l'élément combiné R4BM-ACM

$$r(\theta_{zi}) = \alpha \cdot \sum_i r_i^F(\theta_{xi}, \theta_{yi}) \quad (F.1)$$

Avec: $\alpha = 10^{-6}$ [Cook.91],[Macn.88]

et $r_1 = -\left(\frac{r}{3}\right)$

ANNEXE G Transformations géométriques

On retrouve ici l'expression des matrices et vecteurs élémentaires (de l'élément plan de coque) dans le système de coordonnées globales (§5.3), en effet avant d'assembler les éléments et d'écrire les équation d'équilibre appropriés, il est nécessaire de procéder a des transformations du système de coordonnées locales (x',y',z') a celui des coordonnées globales (x,y,z). Les deux systèmes sont représentés sur la Figure.G.1

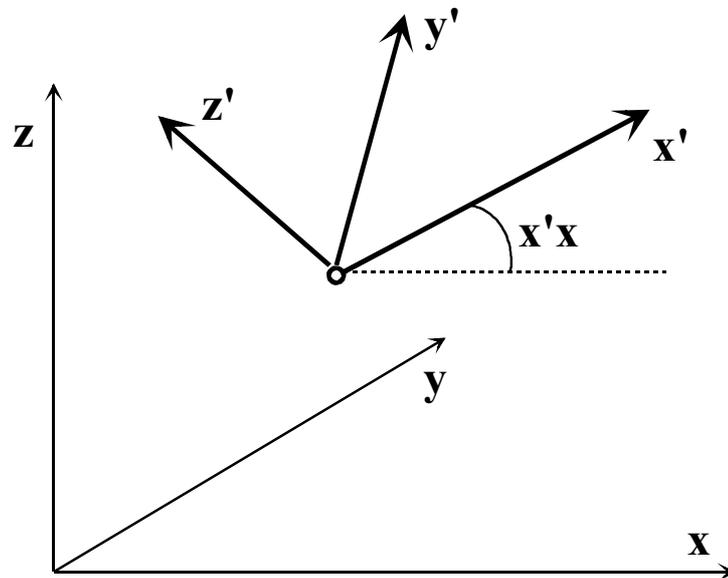


Figure G.1 Coordonnées locales et globales

Les déplacements et forces au niveau de chaque nœud peuvent être transformés du repère global a un repère local par la matrice [L] définie comme suit:

$$u'_i = [L]u_i \quad (G.1)$$

$$f'_i = [L]f_i \quad (G.2)$$

avec
$$[L] = \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix}$$

et la matrice des cosinus directeurs
$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{i'j} = \cos(\hat{i}', j) \quad i', j=1,3$$

Pour un élément, on définit la matrice de passage [T] comme:

$$[T]_{24 \times 24} = \begin{bmatrix} [L] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [L] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [L] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [L] \end{bmatrix} \quad (G.3)$$

Pour la transformation de la matrice de rigidité élémentaire on a :

$$[K_e] = [T]^T [K'_e] [T] \quad (G.4)$$

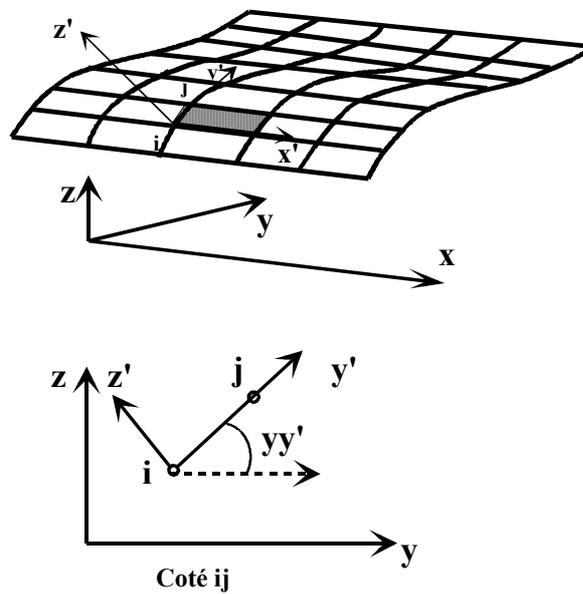


Figure G.2 Coque cylindrique coordonnées locales et globales

Lorsque le repère local se présente par rapport au repère global comme le montre la Figure.G.2, les cosinus directeurs auront pour valeurs.

$\lambda_{x'x} = 1$	$\lambda_{x'y} = 0$	$\lambda_{x'z} = 0$
$\lambda_{y'x} = 0$	$\lambda_{y'y} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$	$\lambda_{y'z} = \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$
$\lambda_{z'x} = 0$	$\lambda_{z'y} = -\frac{z_j - z_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$	$\lambda_{z'z} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$

